ブラウン運動により生成される円周上の非対称確率分布

加藤　昇吾　　数理・推論研究系　助教

ブラウン運動と確率分布

はじめに

円周上の確率分布として知られるwrapped Cauchy分布は，単位円盤上の点を出発した平面上ブラウン運動の粒子が，単位円にぶつかる場所の分布として導かれる．

本報告では，このブラウン運動の問題を一般化することで，wrapped Cauchy分布を特別な場合として含む非対称確率分布を提案する．

分布の定義 (Kato & Jones, revised)

$\{B_t\,;\,t \geq 0\}$: 複素平面$\mathbb{C}$上ブラウン運動，
$B_0 = \xi \ (\in \{z \in \mathbb{C}\,;\,|z| < 1\})$,
$\tau_1 = \inf\{t \geq 0\,;\,|B_t| = 1\}$,
$\tau_2 = \inf\{t \geq 0\,;\,|B_t| = r,\ r > 1\}$.

とする．このとき，

$B_{\tau_2} = re^{i\mu}$を所与としたときのB_{τ_1}の条件付き分布

を新たな確率分布として提案する．ここに，$-\pi \leq \mu < \mu$.

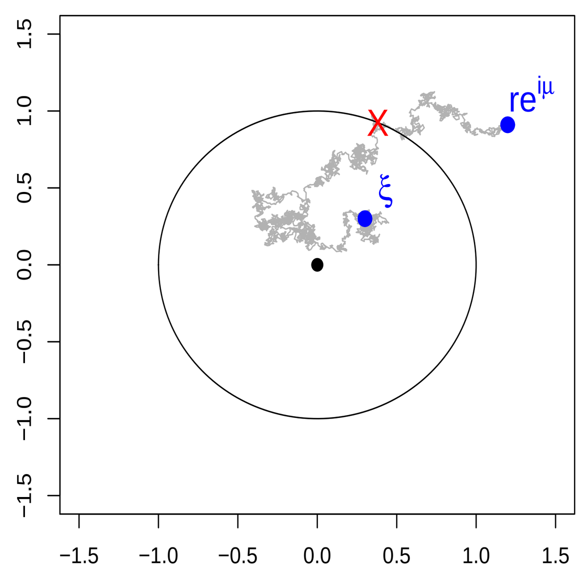

図１．ブラウン運動により生成される確率分布．

確率分布の性質

以後便利のため，$Z = B_{\tau_1}$，$(\phi_1, \phi_2) = (\xi, r^{-1}e^{i\mu})$と表すこととする．ここで，$i$ は虚数をあらわす（$i^2 = -1$）．

確率密度関数

$B_{\tau_2} = 1/\overline{\phi_2} \,(= re^{i\mu})$ を所与としたときのZの条件付き密度関数は，

$$f(z;\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2\pi}\frac{|1-\phi_1\overline{\phi_2}|^2}{1-|\phi_1\overline{\phi_2}|^2}\frac{1-|\phi_1|^2}{|z-\phi_1|^2}\frac{1-|\phi_2|^2}{|z-\phi_2|^2}, \quad z \in \partial D, \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，$\phi_1, \phi_2 \in D \ (= \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\})$，$\partial D = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

特に，$\phi_1 = 0$または$\phi_2 = 0$のとき，密度関数(1)はwrapped Cauchy分布の密度関数と等しくなる．

密度関数の形

- 密度関数(1)は，パラメータ ϕ_1, ϕ_2 のとり方により，対称か非対称，一山型か二山型となる．
- 密度関数(1)が対称

$$\iff \quad |\phi_1| = |\phi_2|,\ \ \phi_j = 0 \text{ or } \arg\left(\phi_1\overline{\phi_2}\right) = (j-1)\pi \quad (j = 1, 2).$$

- 密度関数(1)が一山型となる条件は，$|\phi_1|$，$|\phi_2|$，$\arg\left(\phi_1\overline{\phi_2}\right)$の不等式で表すことができる．

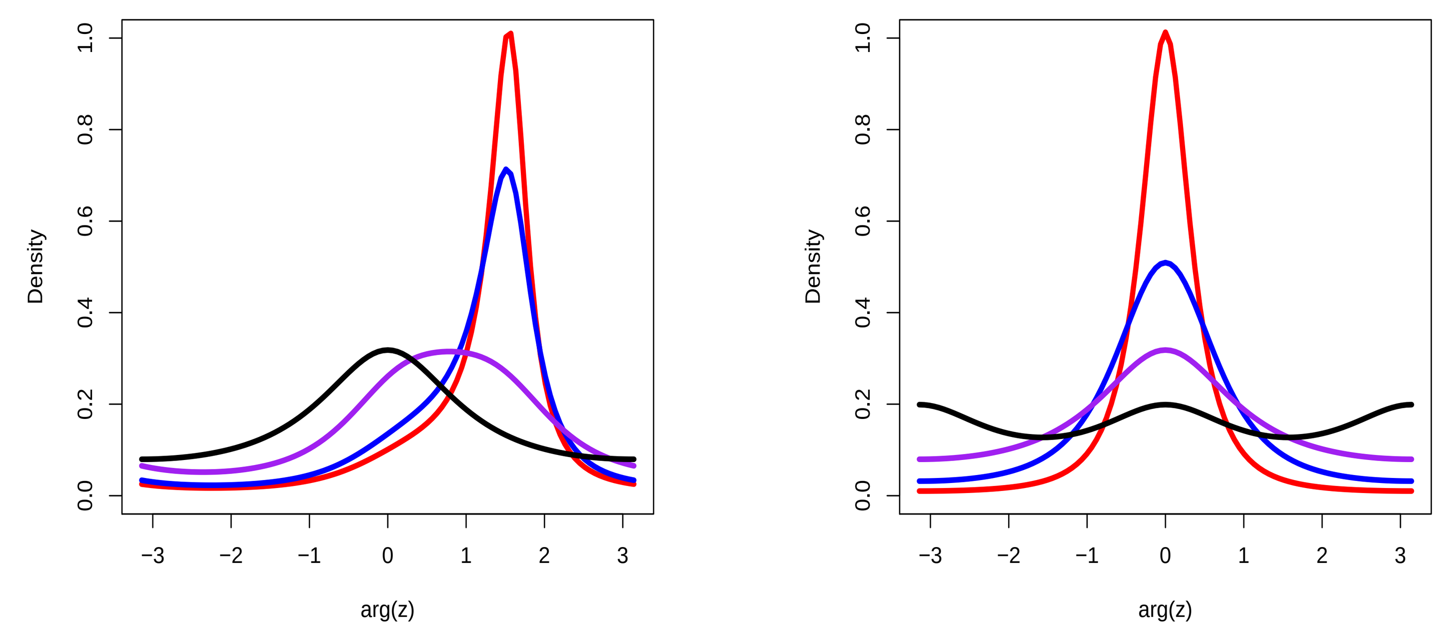

図２．密度関数(1)のプロット．
（左）$\phi_1 = 1/3$, $\arg(\phi_2) = \pi/2$, $|\phi_2| = 0$, $1/3$, $2/3$, $3/4$.
（右）$\phi_1 = 1/3$, $\phi_2 = -1/3$, 0, $1/3$, $2/3$.

極限分布

確率変数Zが確率分布(1)に従っているとする．
また，$\phi_j = \rho_j e^{i\mu_j}$, $\rho_j \in [0, 1)$, $\mu_1 = \mu_2 \,(\in [-\pi, \pi))$ $(j = 1, 2)$と仮定する．
このとき，

$$\frac{\sqrt{\rho_1}}{1-\rho_1}\{\arg(Z) - \mu_1\} \xrightarrow{d} \begin{cases} \text{standard Cauchy}, & \rho_1 \neq \rho_2, \\ t\text{-dist. with } \sqrt{3} \text{ d.o.f.'s}, & \rho_1 = \rho_2, \end{cases} \quad \text{as} \quad \rho_1 \to 1.$$

Fourier coefficients

確率変数Zが確率分布(1)に従っているとき，

$$E(Z^n) = \begin{cases} \dfrac{|1-\phi_1\overline{\phi_2}|^2}{1-|\phi_1\overline{\phi_2}|^2}\left(\dfrac{\overline{\phi_1}\phi_2^{n+1}}{1-\overline{\phi_1}\phi_2} + \dfrac{\phi_1^{n+1}\overline{\phi_2}}{1-\phi_1\overline{\phi_2}} + \dfrac{\phi_1^{n+1}-\phi_2^{n+1}}{\phi_1-\phi_2}\right), & \phi_1 \neq \phi_2, \\ \dfrac{1+n+(1-n)|\phi_1|^2}{1+|\phi_1|^2}\phi_1^n, & \phi_1 = \phi_2, \end{cases}$$

が成立する（$n \in \mathbb{N}$）．また，この結果より，以下がただちに導かれる．

$$E(Z) = 0 \quad \iff \quad \phi_1 = -\phi_2.$$

conformal invariance

メビウス変換$g : \partial D \to \partial D$は，

$$g(w) = \alpha\frac{w+\beta}{\overline{\beta}w+1}, \quad w \in \partial D; \quad \alpha \in \partial D,\ \beta \in D.$$

で定義される．このとき，密度関数(1)に対して次が成り立つ．

$$f(z;\phi_1,\phi_2) = f\{g(z); g(\phi_1), g(\phi_2))\}|g'(z)|^2.$$

References

[1] Kato, S. & Jones, M.C. An extended family of circular distributions related to wrapped Cauchy distributions via Brownian motion, revised.