

開曲線形状解析のための速度フーリエ記述子

田中 英希 新領域融合研究センター 融合プロジェクト 特任研究員

はじめに

細い管状器官や繊維状器官の形状は、開曲線形状とみなせばxyz座標の系列として表せる。また、2次元画像における物体の外郭線の部分形状も開曲線として表される。このような開曲線形状を解析するために、ふさわしい開曲線形状の数値記述方法、速度フーリエ記述子を提案する。

速度フーリエ記述子

\mathbb{R}^3 内の長さ l の曲線が、写像 $r : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ として与えられているとする。 F をつぎのすべての条件をみたす C^3 級関数 $s : [0, l] \rightarrow [0, l]$ の全体からなる集合とする:

1. $s(0) = s'(0) = s'(l) = 0$,
2. $s(l) = l$,
3. $s'(t) \geq 0 \quad (\forall t \in [0, l])$.

プライムは導関数を示す。 F は凸集合である。すなわち

$$u, v \in F \Rightarrow \alpha u + (1 - \alpha)v \in F \quad (\forall \alpha \in (0, 1)). \quad (1)$$

ここで、 F 上の汎関数 I をつぎのように定義する:

$$I[s] := \int_0^l \left\| \frac{d^2 r(s(t))}{dt^2} \right\|^2 dt \quad (s \in F). \quad (2)$$

$I[s]$ の凸性を示す。式(2)を展開すると(s は $[0, l]$ から $[0, l]$ への全単射で狭義単調増加関数であることを用いると)

$$I[s] = \int_0^l \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right)^2 dt + \int_{s(0)}^{s(l)} \left(\frac{ds}{dt}(t) \right)^3 \left\| \frac{d^2 r}{ds^2}(s(t)) \right\|^2 ds(t).$$

$s'(t) \geq 0 \quad (\forall s \in F, \forall t \in [0, l])$ なので

$$\begin{aligned} ((\alpha u + (1 - \alpha)v)''(t))^2 &\leq \alpha (u''(t))^2 + (1 - \alpha) (v''(t))^2, \\ ((\alpha u + (1 - \alpha)v)'(t))^3 &\leq \alpha (u'(t))^3 + (1 - \alpha) (v'(t))^3 \\ (\forall u, v \in F, \forall \alpha \in (0, 1), \forall t \in [0, l]). \end{aligned}$$

等号が成り立つのは、それぞれ $u''(t) = v''(t)$, $u'(t) = v'(t)$ のときのみ。よって

$$u \neq v \Rightarrow I[\alpha u + (1 - \alpha)v] < \alpha I[u] + (1 - \alpha)I[v] \quad (\forall u, v \in F, \forall \alpha \in (0, 1)). \quad (3)$$

ここで

$$\exists s^* \in F \quad \text{s.t.} \quad \forall s \in F, \quad I[s^*] \leq I[s] \quad (4)$$

が言えるが、この s^* の一意性、すなわち

$$I[s] = I[s^*] \Rightarrow s = s^* \quad (\forall s \in F)$$

を示す。 $s \in F$ が $I[s] = I[s^*]$ であるとする。 $u = \alpha s + (1 - \alpha)s^*$ ($\alpha \in (0, 1)$) とすると、式(1)より $u \in F$ 。このとき $s \neq s^*$ と仮定すると、式(3)より、 $I[u] < \alpha I[s] + (1 - \alpha)I[s^*] = I[s^*]$ となり、 s^* の定義(4)と矛盾する。よって $s = s^*$ 。

r に対し一意に定まる写像 $r \circ s^* : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ の導関数 $\frac{d}{dt}r(s^*(t))$ のxyz成分それぞれのフーリエ係数として、速度フーリエ記述子は定義される:

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix} = \frac{2}{l} \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(s^*(t)) \\ \frac{d}{dt}y(s^*(t)) \\ \frac{d}{dt}z(s^*(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{2n\pi t}{l} & \sin \frac{2n\pi t}{l} \end{bmatrix} dt.$$

適当な次数で打ちきられたフーリエ係数の部分集合を、曲線の特徴ベクトルとして解析に用いる。

速度フーリエ記述子の性質

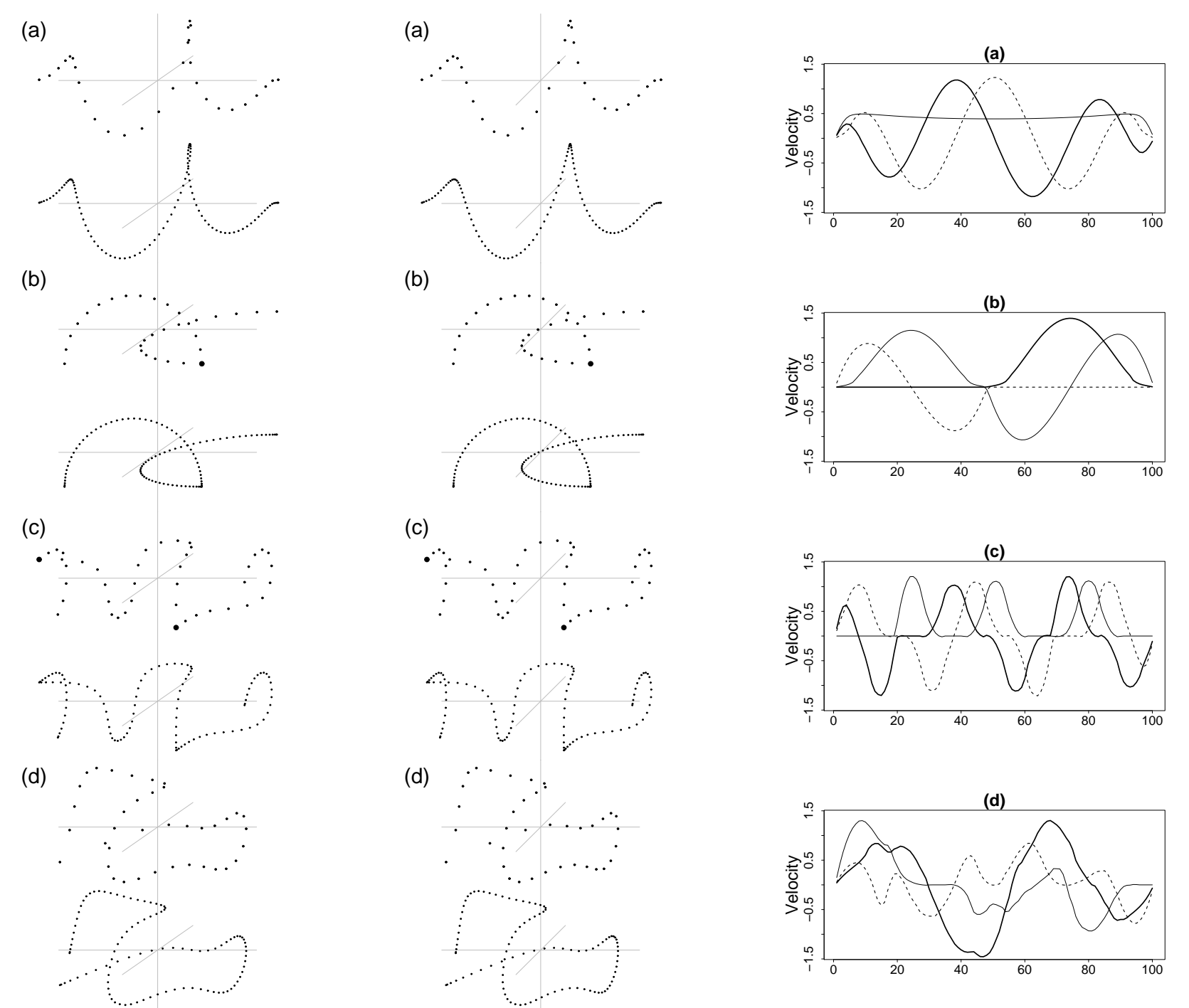


図1. 点列(左下) (それに対する長さ l の3次スプライン曲線として $r : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ を得る)、 $\{r(s^*(il/n))\}_{i=0, \dots, n}$ のプロット(左下)と、 $\frac{d}{dt}r(s^*(t))$ のグラフ(右)。細線、太線、破線はそれぞれxyz成分。左図は交差法で立体視できる。 $\frac{d}{dt}r(s^*(t))$ は連続な周期関数であり、フーリエ変換で低次元に情報を圧縮できる。

逆フーリエ変換で記述子から曲線形状を再構成可能。形の解析において注目する形状変動を視覚化し解釈できる。また、VFDは優れた次元縮約能力をもつ。元の曲線形状の情報が低次元VFDの部分集合の中に集約されている(図2)。VFDはスケールリング、並進に対し不変だが、回転については別に基準化する必要がある。

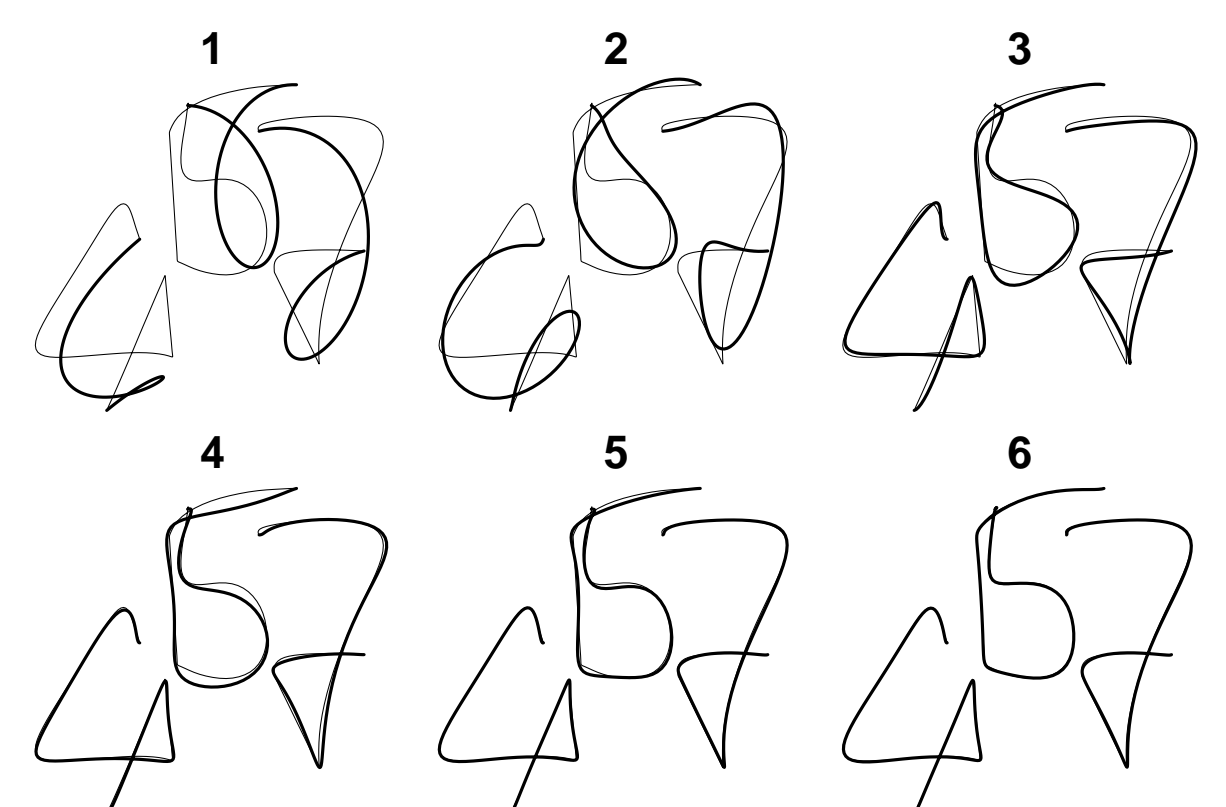


図2. 各次数(上の数字)で打ちきられたフーリエ係数の部分集合から再構成された曲線(太線)。細線は元の曲線。