測度空間における最適化
～線形計画問題の目的関数値の下限を求める～

数理・推論研究系　計算数理グループ
准教授　　伊藤　聡

1　無限次元線形計画問題

X および Y をコンパクトなハウスドルフ空間とし，連続関数 $f \in C(X), g \in C(Y), \varphi \in C(X \times Y)$ が与えられているとき，$L_1(X)$ 上の線形計画問題

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} \displaystyle\inf_{h \in L_1(X)} & \displaystyle\int_X f(x)\,h(x)\,dx \\ \text{subj. to} & \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\,h(x)\,dx \ge g(y) \quad \bigl(\forall y \in Y\bigr), \quad h(x) \ge 0 \ \text{ a.e. on } X \end{array}$$

を考える．ここで，問題 (P) の目的関数値は下に有界であり

$$\int_X \varphi(x,y)\,h_0(x)\,dx > g(y) \quad \bigl(\forall y \in Y\bigr), \quad h(x) \ge 0 \ \text{ a.e. on } X$$

なる $h_0 \in L_1(X)$ が存在することを仮定し，この目的関数値の下限を求めたい．

2　目的関数値の下限を求めるアルゴリズム

問題 (P) の目的関数値の下限 $V(\mathrm{P})$ を求めるため，切除平面法に基づく以下のようなアルゴリズムを考える．ここで，$M(X)$ は X 上の符号つきボレル測度の空間である．

Step 1: $\varepsilon > 0$ を十分小さい正数，$Y_1 = \{y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{n_1}^1\}$ を Y の有限部分集合とし，$n_1 = |Y_1|$, $k = 1$ とおく．

Step 2: 半無限計画問題

$$(\mathrm{P}(Y_k)) \qquad \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{\mu \in M(X)} & \displaystyle\int_X f(x)\,d\mu(x) \\ \text{subj. to} & \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\,d\mu(x) \ge g(y) \quad \bigl(\forall y \in Y_k\bigr), \quad \mu \ge 0 \end{array}$$

およびその双対

$$(\mathrm{D}(Y_k)) \qquad \begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\nu \in R^{n_k}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} g(y_i^k)\,\nu_i \\ \text{subj. to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \varphi(x, y_i^k)\,\nu_i \le f(x) \quad \bigl(\forall x \in X\bigr), \quad \nu \ge 0 \end{array}$$

の最適解 $\mu^k \in M(X)$ および $\nu^k \in R^{n_k}$ を求める．

Step 3:

$$\delta(\mu^k) := \min_{y \in Y} \left\{ \int_X \varphi(x,y)\,d\mu^k(x) - g(y) \right\}$$

を計算し，右辺の最小解 $\bar{y}^k$ を求める．

Step 4: $\delta(\mu^k) \geq -\varepsilon$ なら，問題 $(\mathrm{P}(Y_k))$ の最適目的関数値 $V\bigl(\mathrm{P}(Y_k)\bigr)$ を問題 (P) の目的関数値の下限 $V(\mathrm{P})$ の近似値として，計算を終了する．

Step 5: $A_k = \{y_i^k \in Y_k \mid \nu_i^k > 0\}$, $n_{k+1} = |A_k|+1$, $Y_{k+1} = A_k \cup \{\bar{y}^k\} = \{y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \ldots, y_{n_{k+1}}^{k+1}\}$ とおき，$k := k+1$ として Step 2 へ戻る．

3 アルゴリズムの収束

一般に問題 (P) の最適解は $L_1(X)$ の範囲には存在しないが，許容解のクラスを $M(X)$ に拡大すれば，すなわち

$$
\text{(CP)} \qquad \begin{aligned} & \min_{\mu \in M(X)} \int_X f(x)\, d\mu(x) \\ & \text{subj. to} \quad \int_X \varphi(x,y)\, d\mu(x) \geq g(y) \quad \bigl(\forall y \in Y\bigr), \quad \mu \geq 0 \end{aligned}
$$

に対しては，1 節の仮定のもとで最適解の存在が保証される．

前節のアルゴリズムの収束に関して以下の定理が成立する（定理中のいずれの仮定も問題設定を工夫することにより満たすことができる）．

定理 1. Step 2 で生成される問題 $(\mathrm{P}(Y_k))$ の解の列 $\{\mu^k\} \subset M(X)$ が有界ならば，問題 (CP) の最適解 μ^* に収束する $\{\mu^k\}$ の部分列が存在し，また対応する $\delta(\mu^k)$ も $\delta(\mu^*)$ に収束する．

定理 2.

$$
\int_X \varphi(x,y)\, d\bar{\mu}(x) > 1 \quad \bigl(\forall y \in Y\bigr)
$$

を満たす非負測度 $\bar{\mu} \in M(X)$ が存在するならば，$\delta(\mu^k) < 0$ のとき

$$
\bigl|V(\mathrm{P}) - V\bigl(\mathrm{P}(Y_k)\bigr)\bigr| \leq \left| \delta(\mu^k) \int_X f(x)\, d\bar{\mu}(x) \right|,
$$

また $\delta(\mu^k) \geq 0$ のとき $V(\mathrm{P}) = V\bigl(\mathrm{P}(Y_k)\bigr)$ が成立する．

4 数値実験

Step 2 における半無限計画問題は適当な仮定のもとで有限回の反復で解くことができる．以下の 2 つの例題に対する数値実験の結果を報告する．いずれも問題 (P) に最適解は存在せず，対応する問題 (CP) の最適解 μ^* は離散測度となる．

例題 1. $X = Y = [-1, 1]$, $f(x) = 1$, $g(y) = 1$, $\varphi(x,y) = \bigl((x-y)^2 - 2\bigr)^2$

例題 2. $X = Y = [-\pi/2, \pi/2]$, $f(x) = 1$, $g(y) = 1$, $\varphi(x,y) = 2\sin(x-y)^2$

参考文献

Ito, S., Wu, S.-Y., Shiu, T.-J. and Teo, K. L. (2010). A numerical approach to infinite-dimensional linear programming in L_1 spaces, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **6**-1, 15–28.