生体環境リスク解析のトピックスと非定常生成死滅過程の統計数理

リスク解析戦略研究センター　環境リスク研究グループ
客員教授　　金野　秀敏　(筑波大学大学院システム情報工学研究科)

1　生体環境リスクのトピックス

近年, リスク解析の各分野でも非線形・非定常の時系列データ解析への関心が一段と高まってきている. 余震の発生予測 (尾形,1993) をはじめ, 経済時系列データ解析 (北川,1997), 非経済時系列データ解析 (樋口,1997) への適用はよく知られている. 生体環境リスク解析の分野でも疾病発症過程では競合リスクや多重リスク因子を考慮した非定常解析の必要性が指摘されている (金野,2010). 本報では, 我々が研究中の (A)「インフルエンザの流行過程」と (B)「突然死に至る心室細動時の回転らせん波の生成崩壊過程」について説明し, 非定常生成死滅過程解析の統計数理の必要性について述べる. また, 特別な場合には, 解析解が得られるのでその結果について報告する.

2　感染症流行の数理モデルにおける非定常生成・死滅過程

感染病流行動態を記述する古典的なモデル SIR モデルが有名である (稲葉ほか,2008). $\frac{d}{dt}S = -\beta IS$, $\frac{d}{dt}I = \beta IS - \gamma I$, $\frac{d}{dt}R = \gamma I$ ここで,β は感染率,γ は回復率／隔離率をあらわす. よって,$\beta I(t)$ は時刻 t における感染力をあらわす. このモデルでは総人口は常に一定値をとる $N = S(t) + I(t) + R(t) =$ 一定.

非線形力学の観点から様々な拡張が行われている (稲葉ほか,2008) が, 最近の H1N1 インフルエンザ流行の動態の様子をかんがみても, このような力学モデルによる記述では現実をとらえていない. 実際,WHO などで報告されている基本再生生産数 $R_0 = 2.0$ と置いて感染の動態を解析してみると, $R(\infty)$ は全人口の８割と推定され, 矛盾が明らかになる.

現実のインフルエンザ流行過程データの解析に際しては, 環境揺らぎをはじめとした様々な不確定要素が考えられるので確率論的な考え方に根ざしたモデル化やパラメータの推定方法を考える必要がある. 確率 SIR モデルは次のようなマスター方程式で記述される：

$$\frac{d}{dt}P(S,I,t) = \beta(S+1)(I-1)P(S+1,I-1,t)+\gamma(I+1)P(S,I+1,t)-[\beta SI+\gamma I]P(S,I,t) \tag{2.1}$$

初期条件が $I(0) = a$, $S(0) = N - a$ であるとする. 初期段階では $I << N$, $S \approx N$ であるから確率モデルは次式のように感染者数 I のみの式で近似できる

$$\frac{d}{dt}P(I,t) = \beta N(I-1)P(I-1,t) + \gamma(I+1)P(I+1,t) - [\beta NI + \gamma I]P(I,t) \tag{2.2}$$

これは単純生成死滅過程に帰着する. しかし, 流行が発生し始めると各種対策が施されるために β や γ は一定値ではなく, $\beta(t)$ や $\gamma(t)$ は時間変化すると考えられる. 従って, 実データ解析では非定常の生成・死滅過程を考える必要がある. 突然死に至る心室細動発生時にも, 頻拍時に発生する「回転らせん波」が不安定化し非定常性を内包する生成・死滅過程の記述が問題となる.

3　一般化ポリア過程と非定常生成・死滅過程の統計数理

感染症流行過程の動態を表現可能なモデルとして一般化ポリア過程がある.

$$\frac{d}{dt}p(n,t) = \lambda(n-1,t)p(n-1,t) - \lambda(n,t)p(n,t) \quad (n \geq 1) \tag{3.1}$$

ここで, $\lambda(n,t)$ は１次の n 依存性があるとし,$\kappa(t)$ は時間の任意関数とする; $\lambda(n,t) = \kappa(t)(\alpha n + \beta)$. Feller(1967) は $\lambda(n,t) = (1+\alpha n)/(1+\alpha t)$ の場合,Konno(1986) は $\lambda(n,t) = \lambda(1+\alpha n)/(1+\alpha\beta t)$ の場合の解を与えている. 上記のモデル (3.1) の解は

$$p(n,t) = (\exp(-\Lambda(t)))^{\frac{\beta}{\alpha}} \binom{n+\frac{\beta}{\alpha}-1}{n} (1-\exp(-\Lambda(t)))^n \ . \tag{3.2}$$

ただし, $\Lambda(t) = \alpha\int_0^t \kappa(\tau)d\tau$.

一方, 非定常生成死滅過程を上記と同様な遷移確率を持つ場合について解析的に解くのは難しい. ここでは, 次の簡単な場合を考える：

$$\frac{d}{dt}p(n,t) = \lambda(n-1,t)p(n-1,t) + \mu(n+1,t)p(n+1,t) - [\lambda(n,t)+\mu(n,t)]p(n,t) \ , \tag{3.3}$$

$\lambda(n,t) = \lambda(t)n$　そして　$\mu(n,t) = \mu(t)n$. ここで,$\lambda(t)$ 及び $\mu(t)$ は任意の時間関数とする. このマスター方程式 (3.3) の解は

$$p(n,t) = \frac{(W(t))^{n-1}V(t)V(0)}{(V(t)+W(t))^{n+1}} \ (n \neq 0) \ , \tag{3.4}$$

ここで, $V(t) = \exp\left\{ -[\Lambda(t) - M(t)]\right\} V(0)$ 及び $W(t) = \int_0^t \lambda(\tau)V(\tau)\ d\tau$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\ d\tau$ そして $M(t) = \int_0^t \mu(\tau)\ d\tau$ と置いた.　ただし,$V(0) = 1$ 及び $W(0) = 0$ に注意する.　詳細は講演の際に述べる.

4　まとめと課題

ここでは, 一般化された非定常マスター方程式を基礎として非定常生成・死滅過程の解析例を紹介した.　非平衡開放系の実データの時空変動は多彩であり, 様々な拡張と未知の非定常関数 (感染症の SIR モデルでは感染率 $\beta(t)$ や隔離率 $\gamma(t)$) の同定法の確立が必要である.

参考文献

[1] 尾形良彦, 地震学とその周辺の地球科学分野に於ける統計モデルと統計的手法, 日本統計学会誌,22 巻 (3)(1993) 413-463.

[2] 北川源四郎, 季節調整プログラム DECOMP とその後の展開, 統計数理 45 巻 (2) (1997) 217-232.

[3] 樋口知之, 非経済時系列データの季節調整法について, 統計数理 45 巻 (2) (1997) 319-328.

[4] 金野秀敏, 確率論的リスク解析の数理と方法,(コロナ社, 東京, 2010)

[5] 稲葉寿編著, 感染症の数理モデル,(培風館, 東京, 2008).

[6] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases (Wiley, NY, 2000).

[7] W. Feller, Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I and II (Wiley, NY, 1967).

[8] H. Konno, Ann. Nucl. Energy **13** (1986) 185-201.