確率変動する閾値による倒産分布のモデル化

複合科学研究科　統計科学専攻
大野忠士(D3) #20091502
主指導教員　椿広計

１．はじめに

倒産企業と正常企業を判別する場合、財務指標によって測定される信用リスク値が一定の値（閾値）を超えるか否かという切り口でモデル化することが多い。しかし、同じ信用リスク値の企業であっても金融緩和時には倒産せず、金融緊縮時に倒産することがある。他方、倒産企業の信用リスク値の分布をみると大企業の場合、信用リスク値の高いほうに裾が厚い非対称分布となる傾向がある。ここでは、与信判断の基準となる閾値そのものが確率変動すると考えることで、上記事象を包括的に説明しようと試みている。

２．先行研究

（倒産判別モデル） 倒産に関する統計的アプローチの中では、多変量線形判別モデルたる Altman(1967)の Z スコア･モデルが有名である。また、金融実務界では 0%から 100%の倒産確率を出力できる便宜性、モデルの頑健性等から、ロジット・モデルが広く用いられている。

（極値分布） 稀な現象の分布を捉える極値モデルには 2 つのものがある。一般化極値分布(GEV)は同一分布を持つ大きな標本から集められた最大観測値の分布である。他方、分布の裾に近いところで切断したときの最大値分布は一般化パレート分布(GPD)に従うことが知られている。いずれも正の歪度をもつ右裾の厚い分布となっている。

一般化極値分布(GEV)：

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1+\xi x\right)^{-1/\xi}\right\} & \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \xi = 0 \quad (Gumbel) \end{cases}$$

一般化パレート分布(GPD)：

$$G_{\xi,\beta(x)} = \begin{cases} 1-(1+\xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0, \\ 1-\exp(-x/\beta) & \xi = 0 \ (Exponential) \end{cases}$$

３．本件仮説（閾値の確率的変動モデル）

本研究では、一般化パレート分布の考え方同様、企業の信用リスク値が閾値を超えた場合に倒産するとするが、閾値を固定したものと捉えずに確率的に変動すると考える。元の企業分布の密度関数を$g(x)$とし、閾値の密度関数を$h(y)$とすれば、倒産企業の信用リスク値 X*と閾値 Y の同時分布$f(x^*,y)$は$f(x^*,y) = g(x^*|y)h(y)$

倒産企業の密度関数$g(x^*|y)$は、$y < x^* < \infty$の範囲で、

$$g(x^*|y) = \frac{g(x)}{\int_y^{\infty} g(x)dx} = \frac{g(x)}{1-G(y)}$$

ゆえに$f(x^*,y) = g(x^*|y)h(y) = \frac{g(x^*)}{1-G(y)}h(y)$。

この結果、倒産企業の密度関数$f(x^*)$は、

$$f(x^*) = \int f(x^*,y)dy = g(x^*)\int_{-\infty}^{x^*} \frac{h(y)}{1-G(y)}dy$$

４．実証分析手法

（財務データサンプルと信用リスク値）

ロジット・モデルによる倒産判別モデルを構築し、そこで計測した信用リスク値(ロジット変換前)を企業の財務力尺度とする。モデル作成の為、正常先データとして S&P500 社から金融保険・不動産を除いた 397 社の 2001 年度データを用い、倒産企業データとして 2002 年に倒産した米国上場企業 53 社(総資産 1 億ドル以上先)の 2001 年度データを用いた。説明変数は S&P Compustat データで用いられる 48 財務指標から倒産判別力の高い 18 指標を選びこの組み合わせを選択することで絞り込んだ(説明変数の選択基準はステップワイズ減少法)。

二項ロジットモデルによる倒産確率: $P(Z) = \dfrac{\exp(Z)}{1+\exp(Z)}$

信用リスク値：Z

$= -0.484\,\mathrm{ngl}(\text{Oper. Margin Before Depreciation})$

$- 0.629\,\mathrm{ngl}(\text{Net Profit Margin})$

$+ 1.355\,\mathrm{ngl}(\text{Total Debts/Market value of Equity Margin}) - 8.497$

(注)負の財務指標値の取り扱いに関しては森平・岡崎（2009）を参考に、次に示す負の対数変換(neglog: negative logarithmic transformation)を利用した。

$$ngl(x) = \begin{cases} -\log(1-x) & if\ x \leq 0 \\ +\log(1+x) & if\ x > 0 \end{cases}$$

５．倒産先分布推移の実証分析

倒産先信用リスク値の分布推移をみれば図１の通り。倒産先の分布推移が与信基準の変化を示している。信用リスク判断基準が厳しくなれば比較的良い財務内容の企業でも倒産可能性が出てくる為、分布の位置が信用リスク値の小さいほう（下方向）にシフトし、与信判断が甘くなれば分布は信用リスク値の高い方（上方向）にシフトすると考えられる。 2002 年から 2003 年にかけて与信基準は一段と厳しくなったが(Enron,WorldCom 倒産後)、その後景気拡大と共に 2004 年,2005 年,2006 年と３年間信用緩和期に入り、2007 年に再び厳格化したこと(サブプライム危機深刻化)がこの図から読み取れる。

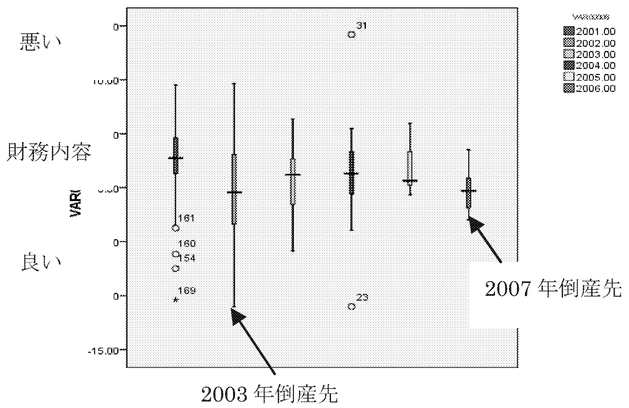

図１：倒産先信用リスク値分布推移

６．倒産企業分布形状シミュレーションと実証結果

閾値が確率変動するモデルを用いて倒産企業の分布形状をシミュレーションしてみれば図２の通り。閾値の確率変動が大きければ、倒産企業分布は歪度の小さい形状となり、閾値の確率変動が小さければ歪度の大きい形状となる。実証データでみれば図３の通り。総資産１億ドル以上の倒産先の分布が歪度の小さい分布であるのに対し、総資産５億ドル以上先の分布は右裾を引く歪度の大きい分布となっている。これは、シミュレーション結果と符合している。即ち大企業を与信先対象とする場合、与信基準が安定する結果、閾値変動幅は小さくなると考えられ、他方、中小企業までを広く対象とする場合、与信基準のばらつきが大きくなる結果、閾値変動幅は大きくなる為と考えられる。

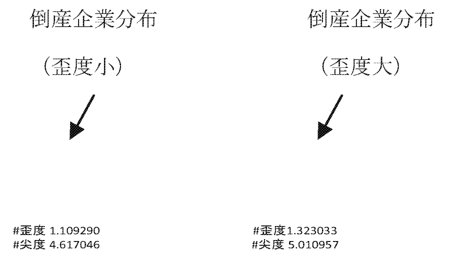

図２：閾値変動シミュレーション

(左：閾値変動幅が大きい場合、右：小さい場合)

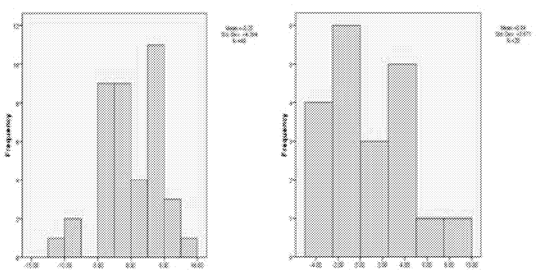

図３：倒産企業信用リスク値分布（2001 年データ）

(左：総資産１億ドル以上、右：総資産５億ドル以上)

７．まとめ

ここでは企業倒産という現象を、企業の信用リスク値が閾値を超えた時に発生する現象と捉え、更に、与信判断基準たる閾値自体が確率的に変化すると考えた。こう捉えることで、財務内容が然程悪くなくとも倒産する場合や逆に財務内容が悪くても倒産しない場合を上手く説明することができる。また、大型倒産になるほど分布の形状が歪む傾向がある点も閾値の変動幅が小さいためと理解することで上手く説明することができる。

(参考文献)

森平爽一郎、岡崎貫治(2009)「マクロ経済効果を考慮したデフォルト確率の基幹構造推定」日本ファイナンス学会第 17 回大会、103-112

木島正明、小守林克哉(1999).「信用リスク評価の数理モデル」朝倉書店.

白田佳子(2003)　「企業倒産予知モデル」中央経済社.

Altman, E.I. (1967). *“ The Prediction of Corporate Bankruptcy:A Discriminant Analysis,”* Ph.D.Dissertation, University of California, Los Angeles, California.

McNeil, A.J. et al (2005) “Quantitative Risk Management”, Princeton