

速度フーリエ記述子を用いた開曲線形状分析

モデリング研究系
特任研究員 田中英希

1 はじめに

形は本質的に無限の自由度をもつ特質であるが、多変量解析の手法を用いて解析するためには各々の形のデータを特定の長さの特徴ベクトルとして表す必要がある。生物器官形状の解析では関係ない部位の形状変動の影響を除去するために、多くの場合、全体ではなく、関心のある部位のみを扱う方が望ましい。ここで扱うのは、平面画像から得られる物体の外郭線形状だが、2次元曲線図形における部分形状は始点と終点の2端点をもつ開曲線で表される。そこで、本発表では、開曲線形状の新しい数値記述方法を提案し、それを用いた生物器官形状の統計解析の結果を紹介する。まず統計解析にふさわしい図形の数値記述方法として、次の3条件を設定した。(1)形の情報をなるべく低次元に縮約できること。(2)特徴ベクトルから曲線形状を一意に再構成できること。(3)並進、回転、スケーリングなどの変換に対し、不変であるか、もしくは簡単に記述子から規格化可能であること。開曲線について、これら3条件を満たす数値記述方法はこれまで知られていないが、閉曲線に対して、3条件を満たす曲線形状の記述方法として、フーリエ記述子(FD)がある。FDは、弧長でパラメータ表示されたxy座標のフーリエ係数である。xy座標は、閉曲線の場合、連続な周期関数だが、開曲線の場合、2端点間で不連続である。不連続な関数のフーリエ変換はGibbs現象をもたらし、結果的に上記の条件を満たさない。そこで、開曲線の場合も、連続な周期関数のフーリエ変換となるようなものとして「速度フーリエ記述子(VFD)」を考案した。

2 速度フーリエ記述子(VFD)

曲線(弧長 s で媒介変数表示された xy座標) $\{(x(s), y(s)) \mid s \in [0, L]\}$ が与えられているとする。ここで L は曲線の全長。位置関数 $p(s)$ を複素数値関数 $p(s) = x(s) + \sqrt{-1} y(s)$ として定義する。最小エネルギー運動における弧長 s を以下のように定義する:

$$s^* = \operatorname{argmin}_{s \in F} \int_0^L \left| \frac{d^2 p(s(t))}{dt^2} \right|^2 dt.$$

ここで F は $s(0)=0, s(L)=L, \dot{s}(0)=\dot{s}(L)=0$ であるような全ての実数値関数 s の集合。ドットは時間 t についての微分を表す。 k 次速度フーリエ記述子 c_k は次のように定義される:

$$c_k = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dp(s^*(t))}{dt} e^{-\sqrt{-1} 2\pi kt/L} dt.$$

これは最小エネルギー運動における速度関数(位置関数の時間微分(図2))のフーリエ係数である。速度関数は連続な周期関数であり、VFDは前節の3条件を満たす。VFDの部分集合、例えば打ち切り次数を M として $\{c_{-M}, \dots, c_M\}$ を特徴ベクトルとして統計解析に用いる。

3 VFDを用いた生物器官形状の遺伝解析

VFDを用いて、生物器官の部分形状の遺伝解析を行った。用いたデータは、2つの系統を起源とするF2世代の多数のマウスについての、染色体上の特定の122箇所の遺伝型データと、下顎骨の特定部位の形状を表す開曲線形状データ(図3)である。目的は、形態形成に対して大きな影響力をもつ遺伝子の探索と、その遺伝子の影響の様子の視覚化による解釈である。まず、個々の曲線形状をVFDを用いて数値表現した後、主成分分析により全体の形状変動を各主成分に分解した。そして各々の主成分(図4、5)について、染色体上の各サイトの遺伝型によりグループ分けし、主成分得点を用いて分散分析を行うことで、その主成分得点が表す形状変動成分に対する、染色体上の各サイト(の近傍にある遺伝子)の影響力を測った(図6、7)。逆フーリエ変換によりVFDから曲線形状を簡単に再構成できるので、各主成分がどのような形状変動に対応しているかは、視覚的に解釈できる。この解析により、異なる形状変動にたいし、異なる位置の遺伝子が影響力を及ぼしていることなどが分かった。

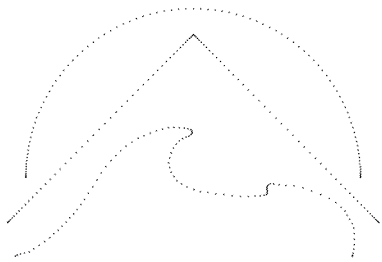


図1：3つの開曲線

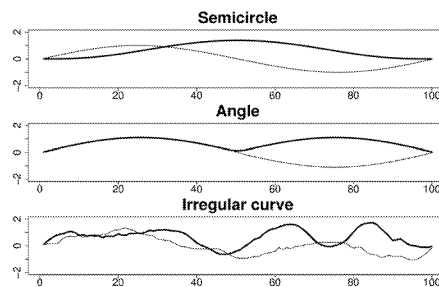


図2：図1の曲線に沿った最小エネルギー運動における速度関数

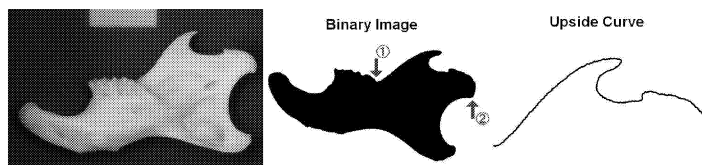


図3：部分形状を表す開曲線の切り出し

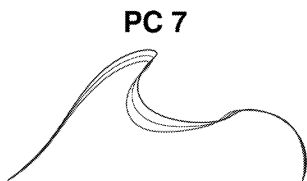


図4：第7主成分の形状変動

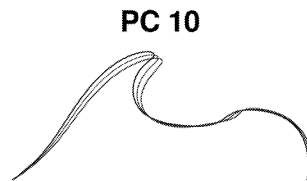


図5：第10主成分の形状変動

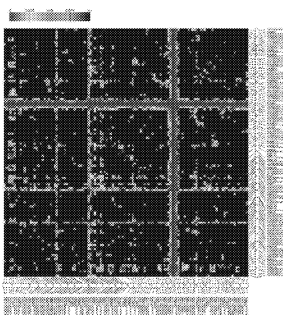


図6：第7主成分に対する遺伝子の影響力のマップ

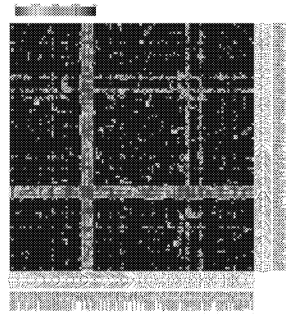


図7：第10主成分に対する遺伝子の影響力のマップ