3価nodesに注目した合同凸五角形による edge-to-edgeタイリングの研究

モデリング研究系

特任研究員　　杉本　晃久

1　凸五角形タイル張り問題

凸多角形による平面タイル張りの研究は, 一種類の合同図形のみで平面を隙間なく充填できる平面充填形（タイル）の網羅を目指して行われてきた．三角形と四角形は凹形も含めてすべて平面充填形で，凸六角形は平面充填形が3種類に表現でき，7辺以上の凸多角形には充填形が存在しないと証明されている．平面充填凸五角形は，現在までに14種類に表現されている（図1参照）が，これで網羅という証明はなく唯一の未解決問題である．この問題は，凸五角形タイル張り問題と呼ばれている．本研究の最終目的は充填凸五角形の完全網羅である．我々は一つ一つ段階を積み上げげて解決を目指している．

凸五角形タイル張りでタイル（凸五角形）の辺上に他のタイルの頂点を許すようなnon-edge-to-edgeの場合は，六角形タイル張りで凸条件を緩和したものなどとみなすこともできる．したがって我々はこのような観点から，edge-to-edge凸五角形タイル張りが真の意味で充填凸五角形のタイル張りと考え，まずedge-to-edge凸五角形タイル張りに限定して研究を進めている．なお，既知の14種の平面充填凸五角形のうちedge-to-edgeタイル張りとして扱えるものは8種類ある（図1でのtype 1とtype 2のタイリングはnon-edge-to-edgeであるが，これらに属する凸五角形は特殊な場合にedge-to-edgeタイル張り可能である．例えば，「$A+B+C = 360°, a = d$」を満たす凸五角形は, type 1に属しedge-to-edgeタイル張り可能である）. 以下, 簡略化のためにedge-to-edgeタイル張りを必要がない限り単にタイル張りと書き, タイル張り内でn個のタイルが1点に会する点（タイル張りの頂点）をn価nodeと呼ぶことにする.

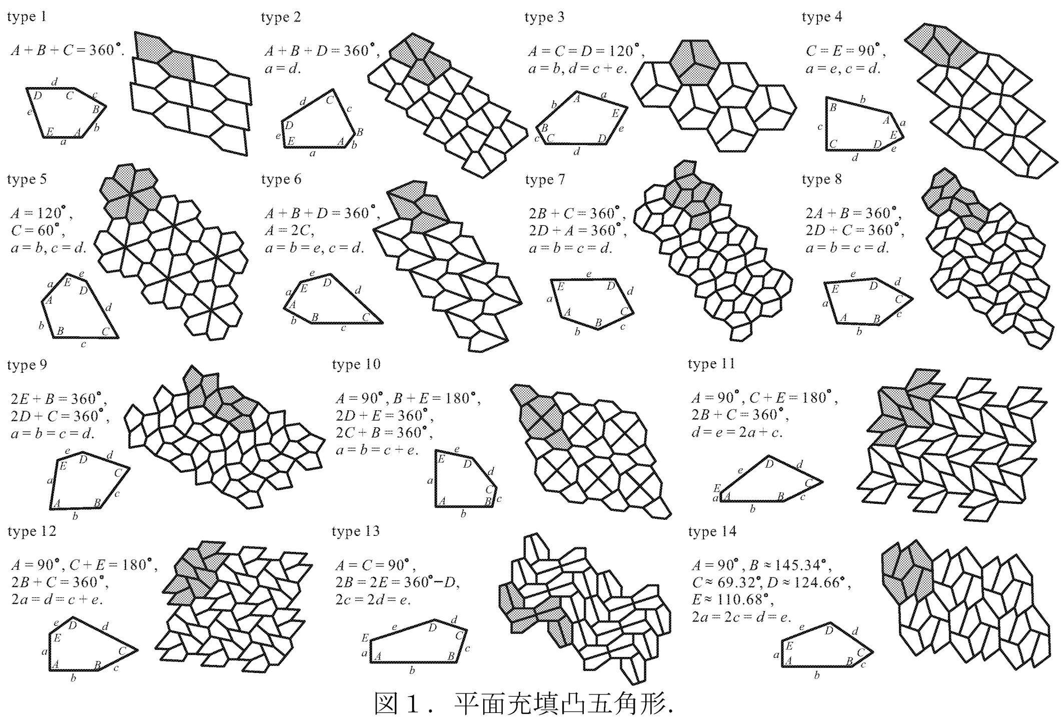

図１．平面充填凸五角形.

2　五角形タイリングのnodeの性質

我々は，この問題にとり組むにあたってnodeの性質に注目した．タイル張り内のnodeの分布が平衡状態になっているとすると，五角形タイル張りのnodeの価数の平均は$10/3 \approx 3.333\cdots$と考察できる．したがって，五角形のタイル張りには価数3のnodeを含む複数の種類のnodeが必要である．

Baginaは，5等辺凸五角形を用いたタイル張りの研究において，以下のPropositionを与えた．

Bagina's Proposition (2004). In each edge-to-edge tiling of the plane by uniformly bounded pentagons, there exists a tile with at least three nodes of valence three.

このBagina's Proposition (2004)では，タイリングの五角形がunifomly bounded（There exist positive numbers *r* and *R* such that any tile contains a certain disk of radius *r* and is contained in a certain disk of radius *R* in which case we say the tiles in tiling are uniformly bounded.）であることのみ要求されている．したがって，タイリングの五角形が本研究対象のように合同で凸である場合もBagina's Proposition (2004)が，成り立つことは明白である．

一方，五角形の5種類の頂点を3価nodeの形に集結させる組み合わせは全部で35種類ある．

3　価数3のnodeの性質に注目した考察

我々は，nodeの性質から，edge-to-edgeタイル張り可能な凸五角形ならば備えている3価nodeの組合せ465通りを導いた（ただし，既存のtype 1やtype 2に属すと簡単に判断できるものは，この465通りの組合せには含まれていない）．一方，タイル張り可能な5等辺凸五角形の条件は，すでに HirschhornとHuntによって示されている．また，全ての辺長が異なる凸五角形はタイル張り不可能で，4価node1種類と3価node2種類（1種類に退化する場合を含む）に限定したタイル張り可能な4等辺凸五角形に関する情報を，我々は得ている．このようなこれまでの結果等を使い，465通りの組合せから検討すべき（未解決状態である）場合を72通りに絞り込んだ．また，タイル張りを4価node1種類と3価node2種類（1種類に退化する場合を含む）に限定すると，72通りをさらに26通りまで絞り込める．以上のような考察から，4価node1種類と3価node2種類（1種類に退化する場合を含む）に限定したタイル張りが可能な凸五角形は，既存のtypeのどれかに属する等の結果を得た．

参考文献

Bagina, O. (2004). Tiling the plane with congruent equilateral convex pentagons, *Journal of Combinatorial Theory, Series A,* **105**, 221-232.

Grübaum, B. and Shepard, G. C. (1987). *TILINGS AND PATTERNS*, W. H. Freeman and Company, New York, pp.492-497 (Chapter 9).

Hirschhorn, M. D. and Hunt, D. C. (1985). Equilateral convex pentagons which tile the plane, *Journal of Combinatorial Theory, Series A,* **39**, 1–18.

Sugimoto, T. and Ogawa, T. (2005). Systematic Study of Convex Pentagonal Tilings, I: Case of Convex Pentagons with Four Equal-length Edges, *Forma*, **20**, 1-18.

Sugimoto, T. and Ogawa, T. (2006). Properties of Tilings by Convex Pentagons, *Forma*, **21**, 113-128.

Sugimoto, T. and Ogawa, T. (2010). Systematic Study of Convex Pentagonal Tilings, II: Case of Convex Pentagons with Four Equal-length Edges, *Research Memorandum*, ISM, **1113**, 1-31.