2項モデルの予測によるリスク総額最小化

リスク解析戦略研究センター
特任研究員　　赤司 健太郎

1　はじめに

例えば銀行の企業への貸付や、信販会社の個人への信用供与を考えるとき、貸出側はまず借り手の返済能力から返済できるか否かをを予測して、貸し出すか否かの意思決定を下していると思われる。ここでは、借り手が返済できない確率を事故率と呼ぶこととする。また、経済原理からは、貸し手は利潤を最大化するように行動していると考えられる。以下で、こうした貸出モデルを簡単に記述し、最適な 2 項決定の解を考える。

2　目的関数と最適解

標準的な 2 項モデルを考える。

$$y_i \quad = \quad 1\{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_i + \epsilon_i \geq 0\} \tag{2.1}$$

ここで、y_i は借り手 i $(i = 1, ..., N)$ の事故発生時に 1 をとる指示関数 (その他で 0)、$(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})$ はそれぞれ説明変数と係数ベクトルである。$F(.)$ で $-\epsilon_i$ の累積分布関数を表すと、事故率は $F(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_i)$ と表せる。

次に、借り手の当期返済額と利子収入などを合わせた利潤を $r_i(> 0)$、事故発生時の貸し倒れなどの損失額を指示関数 $d_i(> 0)$ とする。また z_i を貸し出すか否かの指示関数とする (貸す時は 1, その他で 0)。不確実性があるので、まず期待利潤の最大化問題を考えると、

$$\max_{z_i} \mathcal{E}[q_i(z_i)] \quad = \quad \max_{z_i} \mathcal{E}[r_i(1 - y_i)z_i - d_i y_i z_i] \tag{2.2}$$

仮に最適解を z_i^* としたとき、利潤総額あるいは貸し手にとってのリスク総額は貸出数 N が大きいとき、次の意味で最小化されていると云える。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^N q_i(z_i)}{\sum_{i=1}^N q_i(z_i^*)} \xrightarrow{p} \frac{\lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{i=1}^N \mathcal{E}[q_i(z_i)]}{\lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{i=1}^N \mathcal{E}[q_i(z_i^*)]} < 1 \tag{2.3}$$

したがって、各々の借り手に対して期待利潤の最適解を求める必要がある。

このとき、貸し手が利用可能なすべての情報 $\mathbf{w}_i = (r_i, d_i, \mathbf{x}_i')'$ を用いて期待利潤を最大化することを考える。ここで、事故率は (r_i, d_i) への依存も許して、事故率を $F(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{w}_i)$ と表現し直す。実際には未知係数 $\boldsymbol{\beta}$ は最尤法などで推定しなければならないが、真値 $\boldsymbol{\beta}$ を所与とすると、最適解は次で与えられる。

$$z_i^* = 1\{F(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{w}_i) \leq \frac{r_i}{r_i + d_i}\} \tag{2.4}$$

つまり、最適解は事故率に対して $0 < r_i/(r_i + d_i) < 1$ を閾値としてもつ形となる。また、現実には (r_i, d_i) は所与ではあるが、最適な閾値は個体間で異なる確率変数 (random threshold) である。こうした最適解は、統計的決定論と同様の枠組みで考えることができる (Rao(1965) 7 章を参照)。

報告会では、最適な閾値とそうでない閾値を用いた際の利潤総額を比較した数値実験の結果などを示す。

参考文献

Rao, C. R.(1965). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, John Wiley and Sons, Inc.