Kullback divergence にもとづく新たな相互情報量

リスク解析戦略研究センター　医薬品・食品リスク研究グループ
融合プロジェクト特任研究員　　公文　雅之

1　情報の伝達を測る相互情報量

1.1　測度論的確率論での相互情報量

通常の情報理論においては，各情報源 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ のエントロピー $H(X) = -E_{P_X} \log P_X(X)$, $H(Y) = -E_{P_Y} \log P_Y(Y)$ を第 1 基本量とする．エントロピーは情報源から発生する確率変数の不確定性を測る尺度とみなせるが，Shannon の情報源符号化定理によれば，エントロピーは確率変数列の平均最小符号語長を与えるものである．そして結合エントロピー $H(X,Y)$ や条件付エントロピー $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ を用いて

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

により X と Y との相互情報量 $I(X;Y)$ が第 2 基本量として導入される．相互情報量 $I(X;Y)$ は X (Y) を知ることによる Y (X) の不確定の度合の減少量，よって X (Y) が Y (X) について含む情報量を測る尺度とみなされる．

1.2　ゲーム確率論での相互情報量

一方ゲーム確率論においては，各ゲーム情報源 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は Reality (現実) の行動を表す確率分布 P_A, P_B と Forecaster (予測) の行動を表すリスク中立分布 Q_A, Q_B の対 $\mathcal{A} = \{P_A, Q_A\}$, $\mathcal{B} = \{P_B, Q_B\}$ と認識される．そして $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の第 1 基本量は Kullback divergence $\mu_A = D(P_A \| Q_A)$, $\mu_B = D(P_B \| Q_B)$ であることが確立している (Kumon et al.(2008)(2010), Takeuchi et al.(2009)(2010))．即ち Kullback divergence は，Skeptic (検証) の戦略による資金過程の平均最大指数増加率を与えるものである．これを達成する Skeptic の最適戦略は，効率的な算術符号や逐次検定の手順をも提供しており，医療分野での無駄のない検定法にも通じる．そこで結合ゲーム情報源 $\mathcal{C} = \{P_C, Q_C\}$ の divergence $\mu_C = D(P_C \| Q_C)$ や条件付ゲーム情報源 $\mathcal{A}|\mathcal{B}$, $\mathcal{B}|\mathcal{A}$ の条件付 divergence $\mu_{A|B} = D(P_{A|B} \| Q_{A|B} | P_B)$, $\mu_{B|A} = D(P_{B|A} \| Q_{B|A} | P_A)$ を用いて

$$I(A;B) = \mu_{A|B} - \mu_A = \mu_{B|A} - \mu_B = \mu_C - (\mu_A + \mu_B) \tag{1.1}$$

によりゲーム A と B との相互情報量 $I(A;B)$ を第 2 基本量として導入する．相互情報量 $I(A;B)$ はゲーム A (B) を知ることによる ゲーム B (A) での Skeptic の最適戦略資金過程の指数増加率の変化量を表し，ゲーム A (B) が ゲーム B (A) について含む情報量を測る尺度とみなせる．$I(A;B) = I(B;A)$ であり，この相互情報量は次のように分解される．

$$I(A;B) = I_1(A;B) - I_2(A;B); \tag{1.2}$$

$$I_1(A;B) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_C(x,y) \log \frac{P_C(x,y)}{P_A(x) P_B(y)} = D(P_C \| P_A P_B), \tag{1.3}$$

$$I_2(A;B) = \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} P_C(x,y)\log\frac{Q_C(x,y)}{Q_A(x)Q_B(y)}. \tag{1.4}$$

$I_1(A;B) \geq 0$ であり，これは Reality の確率分布に関する通常の測度論的相互情報量である．また $Q_C(x,y) = Q_A(x)Q_B(y)$ ならば $I_2(A;B) = 0$ である．よってゲーム確率論的相互情報量 $I(A;B)$ は構造的に測度論的相互情報量 $I_1(A;B)$ を含んでおり $I(A;B)$ は非負とは限らない．

2 通信路の性能を測る通信路容量

2.1 測度論的確率論での通信路容量

通常の情報理論では，条件付確率分布 $P_{Y|X}(y|x)$ により通信路 $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ が表現され 相互情報量 $I(X;Y)$ から $C = \max_{P_X(x)} I(X;Y)$ によって通信路容量 C が定義される．通信路容量 C は情報伝送に関する通信路の性能を測る尺度とみなされ，Shannon の通信路符号化定理によれば，通信路容量は誤り確率無限小で可能な最大情報伝送率を与えるものである．

2.2 ゲーム確率論での通信路容量

ゲーム確率論では，条件付確率分布の対 $\{P_{B|A}(y|x),\ Q_{B|A}(y|x)\}$ によりゲーム通信路 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ が表現される．そこで相互情報量 $I(A;B)$ から

$$C_g = \max_{P_A(x),Q_A(x)} I(A;B) \tag{2.1}$$

によってゲーム通信路容量 C_g を定義する．C_g は非負であるが，基本的な binary symmetric erasure channel においても $C_g = 0$ となり得る．$C_g = 0$ のゲーム通信路では，Skeptic の条件付ゲーム $B|A$ での利得が ゲーム B での利得を決して上回れず，このゼロ容量ゲーム通信路の存在は 知り得た**知識**と利用できる**情報**との違いを示唆している．

参考文献

Kumon, M., Takemura, A. and Takeuchi, K.(2008). Capital process and optimality properties of a Bayesian Skeptic in coin-tossing games, *Stochastic Analysis and Applications*, **26**, 1161-1180.

Takeuchi, K., Kumon, M. and Takemura, A.(2009). A new formulation of asset trading games in continuous time with essential forcing of variation exponent, *Bernoulli*, **15**, 1243-1258.

Kumon, M.(2010). Studies of information quantities and information geometry of higher order cumulant spaces, *Statistical Methodology*, **7**, 152-172.

Takeuchi, K., Kumon, M. and Takemura, A.(2010). Multistep Bayesian strategy in coin-tossing games and its application to asset trading games in continuous time, `arXiv:0802.4311v2`, *Stochastic Analysis and Applications*, conditionally accepted.

Takeuchi, K., Takemura, A. and Kumon, M.(2010). New procedures for testing whether stock price processes are martingales, `arXiv:0907.3273v1`, *Computational Economics*, conditionally accepted.

Kumon, M., Takemura, A. and Takeuchi, K.(2010). Sequential optimizing strategy in multi-dimensional bounded forecasting games, `arXiv:0911.3933v1`, submitted for publication.