ベイズ的方法によるデータ解析

リスク解析戦略研究センター
データ科学研究系多次元データ解析グループ

教授　柏木　宣久

1　はじめに

近年のベイズ的方法の進展は著しく、進展以前の観念論に過ぎないとの批判を覆し、実用的方法として広く一般に受け入れられるようになった。特に従来解決困難とされてきた非線形問題、大規模問題、識別問題等の解決に威力を発揮している。著者の提案に限っても、例えば、非線形問題として線形トレンドにおける構造的変化の多数同時検知 (Kashiwagi, 1996)、大規模問題として時空間季節変動調整 (Kashiwagi et al. 2003)、識別問題として環境汚染に対する未知発生源寄与率の推定 (Kashiwagi, 2004) 等がある。こうした方法が開発される契機になったのが状態空間、マルコフ連鎖モンテカルロといった計算法の普及に伴う計算可能性の拡大である。これにより現実により則したモデリングが可能になった。そしてまた、問題解決におけるモデリングの重要性が一層認識されるようになった。本報告では、ベイズ的方法の適用課題のひとつとして、最近になり検討を再開した、熱帯降雨観測衛星等に搭載されている降雨レーダに関する話題の内から、雨滴粒径分布の同定について述べる。

2　レーダ反射因子と降雨強度

マイクロ波は雨滴に当たると散乱する。降雨レーダは、マイクロ波を放射し、降雨散乱により反射してきたマイクロ波の強度を観測している。マイクロ波の受信強度から降雨強度を推定するのであるが、受信強度と降雨強度の関係は決定論的ではない。

マイクロ波の進行方向距離 r におけるレーダ反射因子、すなわち真の反射強度を $Z_0(r)$ とする。レーダ反射因子は雨滴の後方散乱断面積 $\sigma(s)$ に比例する。ただし、s は雨滴の粒径（mm）である。雨滴の粒径は、均一ではなく、距離 r で条件付けられた確率分布 $p(s\,|\,r)$ で表現される。従って、レーダ反射因子は

(1) $$Z_0(r) \propto \int_0^\infty \sigma(s)\,p(s\,|\,r)\,ds$$

で与えられる。もし散乱が Rayleigh 散乱で近似できるなら、後方散乱断面積は

(2) $$\sigma(s) = \frac{\pi^4\,|\,K\,|\,s^6}{\lambda^4}, \qquad K = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

と書ける。ただし、ε は水の比誘電率であり、λ は電波の波長である。(2)式を(1)式に代入すると、定数が相殺され、

(3) $$Z_0(r) = \int_0^\infty s^6\,p(s\,|\,r)\,ds$$

が導かれる。ここで、雨滴粒径分布として修正ガンマ分布

(4) $$p(s\,|\,r) = N_0(r)\,s^{\mu(r)} \exp\left\{-\Lambda(r)s\right\}, \qquad N_0(r) = \frac{N_T \Lambda(r)^{\mu(r)+1}}{\Gamma\left(\mu(r)+1\right)}$$

を仮定すると、

(5) $$Z_0(r) = N_0(r)\frac{\Gamma\left(\mu(r)+7\right)}{\Lambda(r)^{\mu(r)+7}}$$

となる。一方、降雨強度（mm/h）は

(6) $$R(r)=\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \left(\frac{s}{2}\right)^3 v(s)p(s\,|\,r)ds$$

で与えられる。ただし、$v(s)$ は粒径 s の雨滴の終端落下速度（m/s）である。経験則に基づき、終端落下速度が $v(s)=3.778s^{0.67}$ で近似できるとすると、

(7) $$R(r)=0.002268\pi N_0(r)\frac{\Gamma\left(\mu(r)+4.67\right)}{\Lambda(r)^{\mu(r)+4.67}}$$

となる。

雨滴粒径分布を同定できれば、レーダ反射因子と降雨強度は、(5)式と(7)式により計算できる。しかし、一般に、雨滴粒径分布を経常的に同定するのは困難である。そこで、経験則に基づくZ-R関係 $Z_0(r)=bR(r)^a$, $R(r)=b'Z_0(r)^{a'}$ を利用し、レーダ反射因子から降雨強度を推定している。ただし、Z-R関係の定数を何らかの方法で同定しなければならない。定数の同定は雨滴粒径分布の同定にもつながる。

3　減衰補正

レーダ反射因子 $Z_0(r)$ は直接観測できない。なぜなら、マイクロ波は、距離 r に到達するまでに降雨により減衰し、散乱した後も更に降雨減衰するからである。そのため、観測反射因子 $Z_m(r)$ から $Z_0(r)$ を推定しなければならない。両者の関係は、減衰係数を $k(r)$ として、

(8) $$Z_m(r)=Z_0(r)\exp\left\{-0.2\ln(10)\int_0^r k(t)dt\right\}$$

と書ける。経験則に基づく k-Z 関係 $k(r)=\alpha(r)Z_0(r)^\beta$ を使うと、

(9) $$Z_m(r)=Z_0(r)\exp\left\{-0.2\ln(10)\int_0^r \alpha(t)Z_0(t)^\beta dt\right\}$$

となる。この積分方程式を $Z_0(r)$ について解くと、

(10) $$Z_0(r)=Z_m(r)\Big/\left(1-0.2\ln(10)\beta\int_0^r \alpha(t)Z_m(t)^\beta dt\right)^{1/\beta}=Z_m(r)\Big/\left(1-\varsigma(r)\right)^{1/\beta}$$

が得られる。この解をそのまま使うと、誤差が集積し、多くの場合に $\hat{\varsigma}(r)\geq 1$ となるが、一応 $Z_0(r)$ の推定が可能になる。ただし、この場合も、k-Z 関係の定数を何らかの方法で同定しなければならない。

現在、Z-R 関係を中心に検討しており、既に第 2 報 (Kozu et al. in press) が採択されている。

参考文献

Kashiwagi, N. (1996). A state-space approach to polygonal line regression, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 215-228.

Kashiwagi, N. et al. (2003). A space-time state-space modeling of Tokyo Bay pollution, *Sustainable Environments: A Statistical Analysis* (eds. A.K.Ghosh et al.), 42-62, Oxford University Press, New Delhi.

Kashiwagi, N. (2004). Chemical mass balance when an unknown source exists, *Environmetrics*, **15**, 777-796.

Kozu, T. et al. (in press). Estimation of N_0^* for the two-scale gamma raindrop size distribution model and its statistical properties at several locations in Asia, *Journal of Applied Meteorology and Climatology*.