

# ポロノイ・セル相互作用モデルとその周辺

モデリング研究系 時空間モデリンググループ  
教授 種村 正美

## 1 はじめに

自然界では、多結晶金属に現れる粒界、森林における樹冠による空間分割、生物組織に見られる細胞パターンなど、種々の多角形分割データが得られる。そこで、これらのデータに対する統計モデルを構築することは重要な課題である。

昨年度の年度研究報告会では種々のタイプの多角形分割データに対応できる MCMC を用いた比較的簡単な統計モデルとして「ポロノイ・セル相互作用モデル」を提案した。今年度はこのモデルを改良するとともに、疑似尤度によるパラメータ推定を試みた。

## 2 ポロノイ・セル相互作用モデル

多角形分割データが所与の点配置から構成されるポロノイ多角形と見なせると仮定する。まず、 $N$  個の多角形に対応して点配置  $X \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  が与えられているとして、各点が有限領域  $A$  内にあり、 $A$  がポロノイ多角形たち  $\text{Vor}(X) \equiv \{\text{Vor}(x_1), \text{Vor}(x_2), \dots, \text{Vor}(x_N)\}$  で分割されているとする（ポロノイ多角形をポロノイ・セルとも呼ぶ）。そして  $\text{Vor}(X)$  は次のポテンシャル・エネルギーの下で平衡に保たれていると考える。

$$(2.1) \quad U_N = \alpha \sum_{i < j} L(x_i, x_j) + \beta \sum_{i=1}^N (V(x_i) - \bar{V})^2.$$

ここで  $L(x_i, x_j)$  は隣接するポロノイ・セル  $\text{Vor}(x_i)$  と  $\text{Vor}(x_j)$  の間の辺の長さを表し、 $V(x_i)$  はポロノイ・セル  $\text{Vor}(x_i)$  の面積、 $\bar{V}$  は平均面積である。また、 $\alpha, \beta$  はモデルを規定するパラメータである。 $U_N$  の第一項はポロノイ・セルの間の相互作用を表すと考えることができ、われわれは上のモデルを「ポロノイ・セル相互作用モデル」と呼んだ [種村 (2009)]。今年度は (2.1) 式に第 3 の項を加えた次のモデル：

$$(2.2) \quad U_N = \alpha \sum_{i < j} L(x_i, x_j) + \beta \sum_{i=1}^N (V(x_i) - \bar{V})^2 + \gamma \sum_{i < j} (L(x_i, x_j) - \bar{L})^2$$

を提案した [種村 (2009a)]。ここで  $\bar{L}$  は  $\text{Vor}(X)$  のすべての辺の平均辺長であり、パラメータ  $\gamma$  はこの項を規定する。(2.2) 式は (2.1) 式を包含するモデルであるので、今後は (2.2) 式を「ポロノイ・セル相互作用モデル」と呼ぶ。このモデルは Gissb 点過程モデルとは異なる新しいクラスの Gibbs-Voronoi 統計モデルを与える。

## 3 疑似尤度によるパラメータ推定例

われわれは、前節のポロノイ・セル相互作用モデルの有用性を確認するため、Markov Chain Monte Carlo (MCMC) 法によるシミュレーション実験をパラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  のいくつかの組み合

わせに対して行った ( $N = 100, A = 10 \times 10$ )。その結果、ボロノイ・セル相互作用モデルは比較的簡単な構造であるにもかかわらず、多角形分割データに対してランダム型・集中型・規則型の広範なタイプを実現できることが分かった。

そこで、与えられた多角形分割データにボロノイ・セル相互作用モデルを当てはめることを目的として、MCMC シミュレーションで得られたデータに対して疑似尤度によるパラメータ推定を試みた。疑似尤度法としては Diggle et.al (1994) の点配置に適用された方法を援用する。次の表は 2 組のパラメータ値  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 40, 0)$  および  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 10)$  に対して得られたそれぞれ 5 個のシミュレーション・データに関する疑似尤度推定の例である。

$(0, 40, 0)$	$\hat{\beta}$	41.566	45.676	49.679	45.747	40.947
$(0, 0, 10)$	$\hat{\gamma}$	12.039	17.814	14.302	14.602	14.673

ここで、真値が 0 のパラメータは 0 に固定して推定を行っている。推定結果は疑似尤度を用いているゆえの偏りが見られるものの、一定程度満足な値が得られることが分かった。

本研究の一部は平成 20 年度科学研究費補助金（基盤研究 (C)）課題番号 20500264 による。

## 参考文献

- Diggle, P.J., Fiksel, T., Grabarnik, P., Ogata, Y., Stoyan, D. and Tanemura, M.(1994). On parameter estimation for pairwise interaction point processes. *Int. Statist. Rev.*, **62**, 99-117.
- 種村正美 (2009). 多角形分割データの MCMC による統計モデル. 統計数理研究所年度研究報告会, 2009 年 3 月 18 日.
- 種村正美 (2009a). 多角形分割データに対する MCMC による統計モデル. 2009 年度統計関連学会 連合大会. 2009 年 9 月 8 日, 同志社大学, 京田辺市.