

ベイズ型コウホートモデルによる 家計貯蓄率の分析

—— 経済理論の援用 ——

経済企画庁 福田 公正*
統計数理研究所 中村 隆

(1995年4月 受付)

1. はじめに

年齢×時代別のデータから年齢・時代・コウホート効果を分離しようとするコウホート分析には識別問題が存在し、3効果を分離することは原理的に不可能であると指摘されてきた(Mason et al. (1973), Glenn (1977)). これに対して、中村(1982), Nakamura(1986), 中村(1989)は、3効果のパラメータの漸進的変化の条件という緩やかな付加条件を取り込み、ABIC(赤池のベイズ型情報量規準)に基づいてモデル選択を行う方法によってコウホート分析における識別問題を克服し、様々な分野の継続調査データに適用を広げている。

ところで、従来ベイズ型コウホートモデルが適用されてきた事例をみると、どのように3効果に分離されるかが焦点であり、特定の理論を検証するということはあまり考慮されてこなかった。この点で家計貯蓄率や労働力率などの経済データを分析する際には、背景に特定の理論を想定することが常であり、分離された各効果の望ましさは理論との関係からも検討されることになる。本稿で分析の対象としたのは家計貯蓄率であるが、時代効果についてはマクロ貯蓄関数理論、年齢効果についてはライフサイクル理論がそれぞれ関係している。

背後に特定の理論がある場合、その理論から導かれるモデルを具体的に定式化し、予め従来のコウホートモデルに組み込み、ABICが改善したかどうか、また各効果の解釈がより説得的なものとなったかどうかを検討する手順が必要となる。福田(1994)は、実質GDPの変動要因を分析するためのモデルについて、最初に経済理論を予め援用しない純粋な統計モデルから出発させて、各モデルによる分析結果の解釈がより説得的なものとなるように、段階的に経済理論から導出された定式化部分をモデルに加えていくという、経済モデルと統計モデルの融和の問題を1つの試論として示している。

一方、最近、米国において、「世代会計」という新たな概念が提起され、実証経済分析が盛んになされてきている(詳しくはKotlikoff(1992)を参照のこと)。今後、さらなる高齢化が必然の日本において、従来以上に年金問題をはじめとする世代間の経済問題が重大なものとなる。そうした問題に対して、ベイズ型コウホートモデルは重要な貢献が期待される。具体的には、従来の経済分析では全くといってよいほど取り組まれてこなかった、マクロ経済データの背後にある世代効果の抽出と、さらにはそうした世代効果そのものの決定要因の検討、ひいては複数のデータから抽出された世代効果相互の関係の分析である。

* 〒189 東京都東村山市萩山町3-29-1-402.

本稿においては、以上の問題意識のもとに、家計貯蓄率の分析を行う。最初に、コウホートモデルの必要性を確認する意味から、家計貯蓄率に関する年齢、時代、コウホートの3効果の記述統計的検討を行うとともに、後に援用する経済理論の概説を行う。次に第3節では、家計貯蓄率のコウホート分析について4つのモデルを設け、ABICを基準とした最適モデルを選択する。また第4節では、最適モデルに基づいて分離された世代効果の変動要因を明らかにするためのモデル分析を行う。さらに第5節では、家計貯蓄率に関係した他の経済データや意識データに対してもベイズ型コウホートモデルを適用し、それぞれについて分離された世代効果を相互に検討することで家計貯蓄率を総合的に分析する。最後に本稿のまとめを行う。

2. 記述統計的検討と経済理論の援用

2.1 コウホート表と記述統計的検討

表1は、総務庁「家計調査」全国勤労者世帯の家計貯蓄率(= (1-消費支出/可処分所得)×100)を、5年かつ5歳刻みの年齢×時代形式にした標準コウホート表である。なお、以下の分析において、年齢は各年齢階級の中央値を用いる。たとえば、25~29歳の場合は27歳とする。

ここで、ベイズ型コウホートモデル分析に入る前に、年齢、時代、コウホート(以下では世代とする)の3効果のそれぞれについて記述統計的見地から検討する。各セルの世帯数の全世帯数に対する割合を重みとして、各年齢階級別に時代について加重平均したものを、記述統計的見地から得られた年齢的变化と呼ぶことにしよう。同様に各時代別に年齢階級について加重平均したものを時代的变化、また、各世代別に年齢階級・時代について加重平均したものを世代的変化と呼ぶことにする。図1(a)~(c)をみる限りでは、各変化のレンジ(最大値-最小値)は、時代的变化と世代的変化が同程度に大きく、両者に比べ年齢的变化は小さい。特に、経済学ではあまり注目されてこなかった世代的変化が大きいことが特徴的である。

しかしながら、こうした記述統計的見地から得られた知見には問題がある。なぜなら、こう

表1. 時系列・世帯主年齢階級別の家計貯蓄率(%)の動き。

	1953年	1958年	1963年	1968年	1973年	1978年	1983年	1988年	1993年
-24歳	-2.2	2.1	8.6	12.0	16.8	16.6	10.9	16.7	25.1
25-29歳	1.8	7.7	14.7	15.5	20.2	19.0	20.0	21.4	25.2
30-34歳	2.2	8.6	17.8	18.2	22.2	21.9	21.2	25.0	29.0
35-39歳	2.3	9.1	17.8	19.0	23.3	23.8	22.4	26.4	28.9
40-44歳	2.1	8.5	16.1	19.1	23.9	24.3	23.4	24.9	26.4
45-49歳	2.6	8.0	14.6	19.2	21.7	21.5	19.5	22.5	23.5
50-54歳	3.9	7.7	17.2	18.2	24.4	27.5	22.3	24.4	24.4
55-59歳	4.6	8.8	14.3	20.6	22.3	25.7	19.2	25.0	25.4
60-64歳	4.8	11.5	15.4	17.1	16.6	12.9	9.6	19.8	19.0
65歳-	5.2	14.4	17.5	20.2	22.7	17.8	7.6	24.0	29.5

備考) 1. 総務庁「家計調査」(全国・勤労者世帯)により作成。

2. 実際の分析では、24歳以下層と65歳以上層のデータは使用しない。

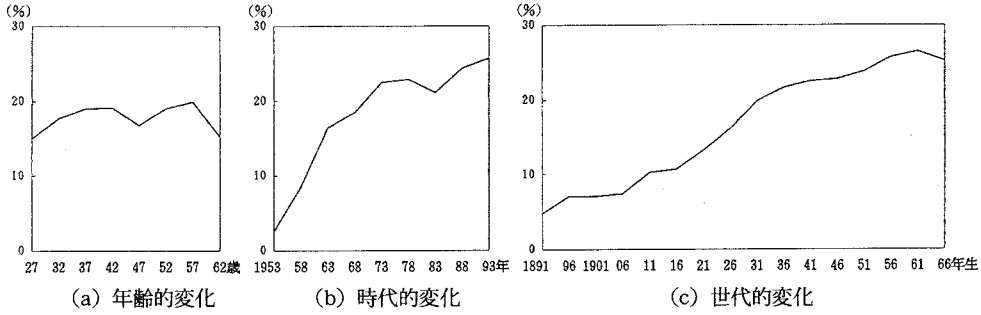


図1. 家計貯蓄率の記述統計的検討結果.

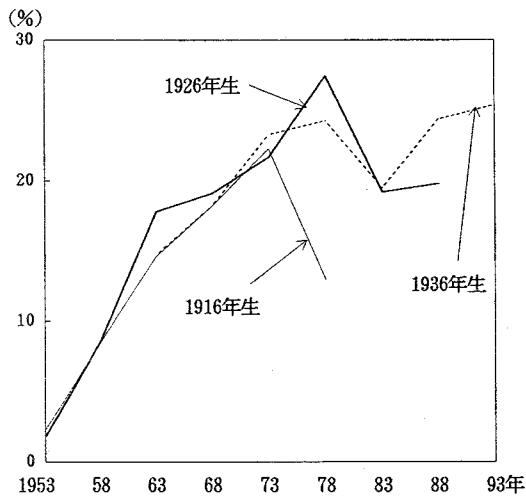


図2. 世代的变化と時代的变化の関係.

した手法では、求められた各変化の背後にある他の2つの変化の影響を排除できないからである。例えば、世代的变化の変動が大きいのは、ほとんどが背後にある時代的变化の影響によるものである可能性がある。こうした問題点に対応するためには、さらに工夫が必要である。例えば、世代的变化について、背後にある時代的变化の影響をみることはある程度可能である。時代を横軸に取り、各世代毎の家計貯蓄率の推移を示したのが図2である。各世代毎の家計貯蓄率のグラフの乖離の程度と、各世代の家計貯蓄率が時代によって変化する程度を比較することにより、図1(c)の世代的变化の背後には、時代的变化の影響が極めて大きく、世代的变化独自の影響が小さいことがわかる。しかしながら、この手法でも不十分である。なぜなら、図2において影響力は弱いと予想されるとはいえ、年齢的变化が背後に隠されている可能性があるからである。

やはり、コホートモデルを用いて3効果を分離する必要がある。

2.2 経済理論の援用

家計貯蓄率の変動を説明する理論は、経済学の中に豊富に見いだすことができる。特に、年齢効果についてはライフサイクル理論、また、時代効果に関係した理論としてマクロ貯蓄関数

理論がある。各効果と各理論との整合性を結果的に検討するというような消極的な立場だけではなく、ベイズ型コウホートモデルの中に、積極的に理論から演繹されたモデルを直接取り入れることで、全体としてモデルが改善されたのかどうかを、ABICを用いて検討する必要がある。

本稿においては、最も大きな影響力をもつと予想される時代効果から、マクロ貯蓄関数理論から演繹された可処分所得の影響を分離することにする。

具体的には、以下の定式化となる。

i 年齢 j 時代の家計貯蓄率を X_{ij} 、年齢、時代、世代効果をそれぞれ A_i 、 P_j 、 C_k とすると、通常の3効果モデルは以下のようなになる。

$$(2.1) \quad X_{ij} \text{ or } \ln X_{ij} = \alpha + A_i + P_j + C_k + \varepsilon_{ij},$$

$$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k (= j - i + I) = 1, \dots, K.$$

ここで、 α は総平均効果であり、3効果のパラメータは次のようなゼロ和制約を満たすものとする。

$$(2.2) \quad \sum_i A_i = \sum_j P_j = \sum_k C_k = 0.$$

また、 ε_{ij} は平均が0、分散が $W_{ij} \sigma^2$ の正規分布に従う誤差項である (W_{ij} は既知とする)。上の(2.1)に可処分所得 Y_j をモデルに加えると、 β を係数として、

$$(2.3) \quad X_{ij} = \alpha + \beta(1/Y_j) + A_i + P_j + C_k + \varepsilon_{ij},$$

あるいは

$$(2.4) \quad \ln X_{ij} = \alpha + \beta \ln(1/Y_j) + A_i + P_j + C_k + \varepsilon_{ij},$$

が得られる。これらは、以下のマクロ貯蓄関数理論から導出されたものである。

貯蓄を S 、可処分所得を Y とすると、最も基本的な貯蓄関数は、

$$S = a + bY \quad (a < 0, 0 < b < 1),$$

あるいは

$$\ln S = c + d \ln Y$$

である(図1(b)より傾向的に家計貯蓄率 S/Y が上昇していることから、 $d > 1$ が予想される)。

ゆえに貯蓄率関数 $X (= S/Y)$ は、

$$X = b + a(1/Y),$$

あるいは、

$$\ln X = c + (1-d) \ln(1/Y)$$

で与えられる。したがって、(2.3) および (2.4) のいずれの場合でも、経済理論等により $\beta < 0$ が予想される。

可処分所得を取り入れたモデルのABICの導出は付録Aにまとめてある。

3. 家計貯蓄率のコホート分析

3.1 原数値に対するモデル分析

家計貯蓄率(原数値)に対し通常のコホートモデルを適用し、3つの効果に分離した結果が図3である。

年齢効果の変動をみると、ライフサイクル理論を支える観察事実の1つと整合的である。ライフサイクル理論は、個人の消費行動は今期の所得によって決められるというより、その個人が一生の間に獲得することが可能な所得の総額(生涯所得)の大きさによって決められるというものである(中谷(1981)など)。具体的には、世帯主の年齢と貯蓄率(=1-消費性向)に関して次のような観察事実が一般に得られる。低年齢層では、生涯所得を生年間で除した額に比べて実際の所得が低いため貯蓄率が低くなり、逆に中年層では高くなる。一方、退職後においては、所得の低下に伴い貯蓄率も低下する。コホートモデルによって分離された年齢

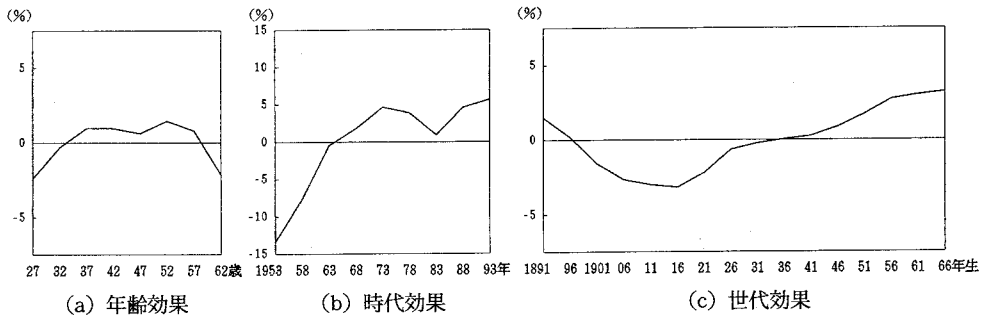


図3. 家計貯蓄率(原数値)の年齢・時代・世代効果への分解(モデル1).
(備考) 各効果の動向を見やすくするため、時代効果の1目盛りの値を他の効果の1目盛りの値の2倍にしてある。

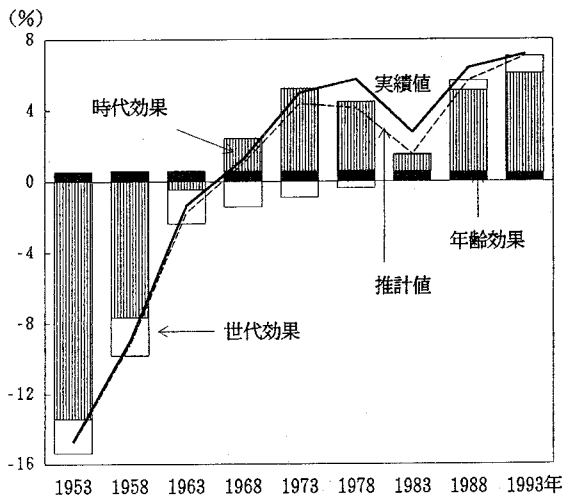


図4. 家計貯蓄率(現数値・時系列)の3効果への分解。(備考) 家計貯蓄率(現数値・時系列)から、中村(1982)等における総平均効果(概ね期間平均値に等しい)を除いたもの。

効果をみると、概ねこうした事実と整合的であるといえる。

時代効果については趨勢的に上昇している(図3(b))。世代効果についてみると、大正世代まで低下した後、昭和・桁世代から団塊世代、さらに新人類世代にかけて緩やかに上昇している(図3(c))。

さらに、家計貯蓄率の時系列変動を3つの効果に分解すると、時代効果の影響が圧倒的に大きいこと、年齢効果は小さくほぼ一定であること、世代効果はそれほど大きくないものの、趨勢的に貯蓄率を引き上げる方向に寄与していることがわかる(図4)。3効果への分解の具体的な定式化のプロセスは付録Bにまとめてある。

3.2 最適モデル選択

本稿では以下の通り、全部で4つのモデルを設定した。

- モデル1: 原数値のデータを年齢・時代・世代の3効果に分離する通常のコウホートモデル
- モデル2: 自然対数変換したデータを年齢・時代・世代の3効果に分離する通常のコウホートモデル
- モデル3: 原数値のデータを年齢・時代・世代効果と可処分所得効果に分離するモデル((2.3)式参照)
- モデル4: 自然対数変換したデータを年齢・時代・世代効果と可処分所得効果に分離するモデル((2.4)式参照)

以上の4つのモデルの中から ABIC が最小となるモデルを求めると、モデル4が最適なモデルとなった(表2)。

モデル3やモデル4の時代効果は、可処分所得で説明される部分((2.3)式の場合は

表2. 家計貯蓄率のコウホート分析の結果。

	データ変換	定式化変更	ABIC	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	α	β
ケース1	原数値	なし	152.5	0.810	4.599	0.442	17.937	-
ケース2	自然対数値	なし	68.7	1.036	16.059	0.764	2.780	-
ケース3	原数値	可処分所得	141.6	0.795	0.892	0.425	28.564	-2.561
ケース4	自然対数値	可処分所得	<u>56.2</u>	<u>0.602</u>	<u>2.140</u>	<u>0.404</u>	<u>4.938</u>	<u>-1.669</u>

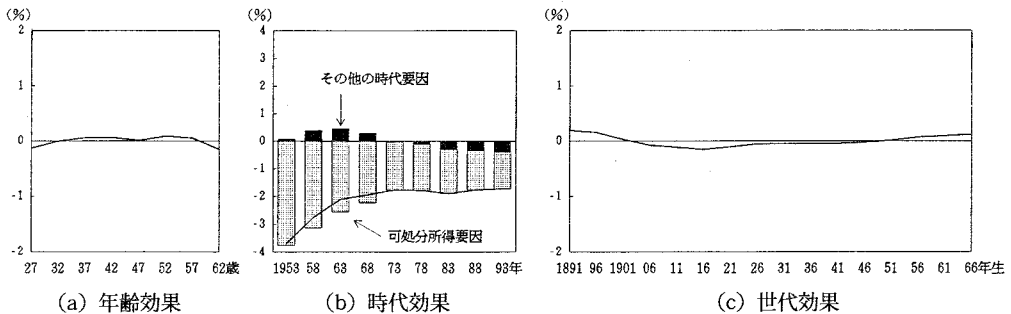


図5. 家計貯蓄率の年齢・時代・世代効果への分解(モデル4)。(備考)各効果の動向を見やすくするため、時代効果の1目盛りの値を他の効果の1目盛りの値の2倍にしてある。

$\beta(1/Y_j)$ と従来の時代効果に該当するその他の部分 (同式の P_j) の 2 つの部分から成り立っている (図 5(b)). モデル 1 と最適なモデル 4 を比較してみると, モデル 4 はモデル 1 に比べ, 年齢効果と世代効果についてはほとんど相違がみられないが, 時代効果については, 可処分所得が取り入れられたことにより滑らかになっていることがわかる (図 3(b), 図 5(b)).

モデル 4 は単に ABIC が最適であるという意味だけではなく, 時代効果の解釈がより説得的なものとなるという意味でも, モデルが改善されていると言える. すなわち, 時代効果の増加のテンポが 1978 年以降鈍化してきたのは, 日本経済が高度経済成長期を終焉させ, 安定成長期に移行したことを受けてのものであり, 具体的には可処分所得の増加テンポが大幅に鈍化したからである.

4. 家計貯蓄率の世代効果の決定モデル

これから進展し続ける人口高齢化のもとでは, 従来以上に世代間格差の問題が重要になる. 例えば, 年金の最大の問題は世代間収支バランスの問題である. こうした中, 近年米国において「世代会計」と呼ばれる新しい財政分析の枠組みが提起されている.

こうした状況変化は, 統計にも大きな影響を与える可能性がある. 具体的には, 従来の実証分析の対象は, マクロの時系列データかクロスセクション・データが中心であり, 世代に着目した実証分析は極めて少ない. 今後は, ベイズ型コホートモデルによって分離された世代効果が, 実証分析に新たな道を切り開く可能性がある. 具体的には, 従来の時系列変数相互の関係を分析する手法と同様に, 例えば, 種々の変数の世代効果相互の関係を分析する手法が開発されると, 世代の問題をより実証的に解明することができる.

本稿では, まだ試論の域を出ないが, 具体的な作業例を示すこととする. 既に求めた家計貯蓄率の世代効果は, 世代によって全体の貯蓄率に与える影響が異なることを明らかにしたが, 問題はその解釈である. 世代の貯蓄率へ与える影響が異なることを説明する理論は, 残念ながら今のところほとんどないと言ってよい. わずかに, 生活行動に関する社会学的知見として, 例えば, 「昭和一桁世代の人々は, 憧れの欧米先進国の生活水準に追いつくために『滅私奉公』を心掛けた」(松井 (1995)), といったような定性的なものがある程度である. ここに簡単な仮説を立てて, その仮説が実際の現象をどの程度説明できるのかを検討することにする.

仮説は以下の 2 つから成り立つ.

- (1) 世代によって家計貯蓄率が異なるのは, 世代の人口規模が異なるからである. ある世代の同世代人口が他の世代に比べて小さいと, 老後生活等将来の生活に対して不安を持ち貯蓄意欲が高まる.
- (2) 家計の貯蓄の主な決定要因は夫の収入であるが, 近年女性の社会進出とともに, 妻の収入が大きな影響を及ぼすようになっている. したがって, 女性の労働力率が高い世代では家計のゆとりが生まれ, 結果として貯蓄率は高まる.

実証分析をする際には, 被説明変数をモデル 4 で推定された世代効果とし, 2 つの説明変数のうち (1) に対しては各世代の出生数/総人口を, また, (2) に対しては各世代の 27 歳時の時代における女子労働力率を用い, 回帰分析を行った. これによると, 「団塊世代」以降の世代の家計貯蓄率上昇は, 同世代人口の低下と女子労働力率の上昇によってもたらされていることが明らかにされた (図 6).

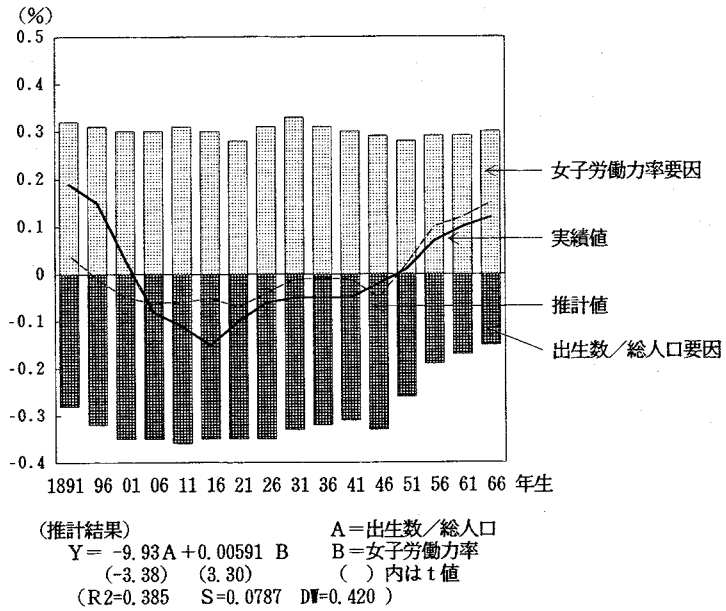


図6. 家計貯蓄率世代効果の変動要因分解.

5. 家計貯蓄率の全体的な検討

5.1 家計貯蓄率に深く関係した他の変数のコウホート分析

家計貯蓄率に深く関係した他の変数として、世帯人員、家計内有業人員、各消費項目の支出割合及び貯蓄目的について、ベイズ型コウホートモデルを適用し、3つの効果に分離してみた。

まず、世帯人員についてみる。世帯人員が減少すると、家計1人当たりの可処分所得が増加することから、家計貯蓄率は上昇することが予想される。各効果についてみてみると、年齢効果は子供が自立するまでの期間の30歳代から40歳代で高く(図7(a))、一方、世代効果は核家族化の進展から低下傾向にあり、特に1956年生まれ以降の世代の低下幅が大きい(図7(c))。また、時代効果については無視しうる程度のものである(図7(b))。

次に、家計内有業人員についてみる。家計内有業人員が増加すると、家計1人当たりの可処

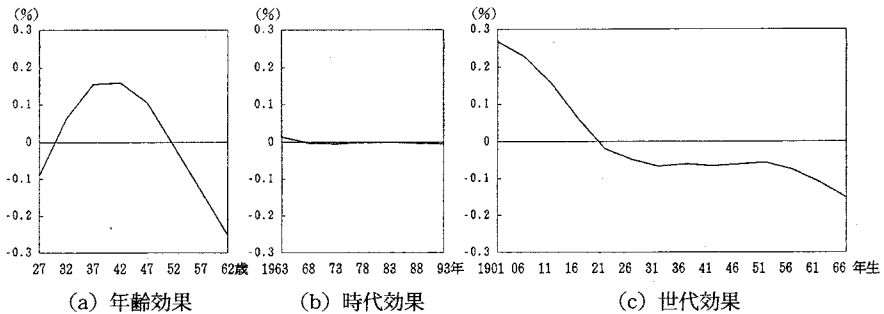


図7. 世帯人員数の年齢・時代・世代の各効果への分解.

(備考) 自然対数値に変換.

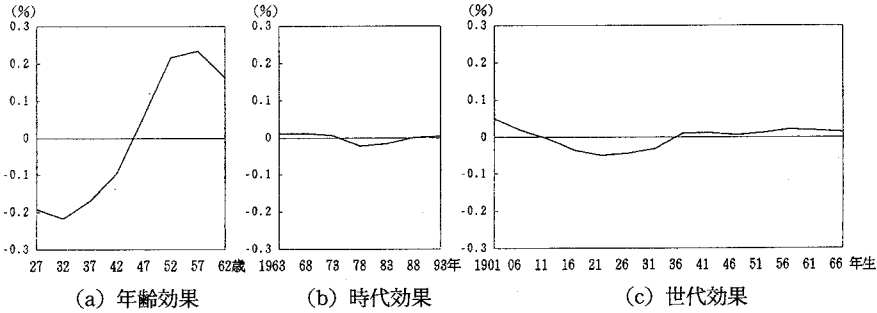


図8. 有業人員数の年齢・時代・世代各効果への分解.

(備考) 自然対数値に変換.

分所得が増加することから、家計貯蓄率は上昇することが予想される。各効果についてみると、変動の大部分を説明する年齢効果は50歳代までに上昇傾向にあり(図8(a))、時代効果は1980年代以降女性の社会進出の影響を受けて上昇傾向に転じている(図8(b))。また、世代効果は昭和一桁世代以降上昇傾向にあるものの、戦中世代以降は横ばいに推移している(図8(c))。

一方、貯蓄の裏側とも言える各項目別消費支出割合(対可処分所得比)についてみると、年齢効果が大きいものは、「住宅」「保健・医療」「教育」であり、時代効果については「食料」「光熱・水道」「家具・家事用品」「被服・履物」「交通・通信」「教養・娯楽」である。最後に、世代効果が比較的大きいものとして、「住居」「保健・医療」「教養・娯楽」「家具・家事用品」がある(表3)。

さらに、日本銀行「貯蓄に対する世論調査」で各貯蓄目的についてみると、年齢効果の影響が大きいものは「教育」「老後」「安心」「病気」であり、時代効果は「土地」、世代効果は「耐久消費財」が大きい(表4)。

表3. 各項目別消費支出割合のコウホート分析の結果.

	データ変換	ABIC	R_A	R_P	R_C
食料	原数値	3.6	4.549	<u>13.679</u>	1.919
住居	自然対数値	-111.6	<u>0.792</u>	0.114	0.430
光熱・水道	自然対数値	-158.7	0.150	<u>0.406</u>	0.005
家具・家事用品	自然対数値	-73.4	0.183	<u>0.601</u>	0.143
被服・履物	自然対数値	-91.7	0.151	<u>0.562</u>	0.085
保健・医療	自然対数値	-168.5	<u>0.501</u>	0.269	0.134
交通・通信	自然対数値	-317.7	0.363	<u>1.516</u>	0.001
教育	自然対数値	-54.1	<u>2.273</u>	0.271	0.777
教養・娯楽	自然対数値	-19.3	0.310	<u>0.348</u>	0.184
その他の支出	自然対数値	36.3	<u>0.362</u>	0.257	0.182

(備考) R_A , R_P , R_C はそれぞれ、年齢、時代、世代の各効果の変動幅(最大値-最小値)。

表4. 各貯蓄目的のコホート分析の結果.

	ABIC	R_A	R_P	R_C
教育	-67.3	<u>1.209</u>	0.393	0.648
老後	-115.8	<u>2.211</u>	0.785	1.039
病気	-178.9	<u>0.892</u>	0.324	0.205
土地	-144.4	0.846	<u>0.971</u>	0.476
耐久消費財	-272.9	0.243	0.882	<u>1.305</u>
安心	-173.7	<u>0.539</u>	0.341	0.053

備考) ロジット変換. R_A , R_P , R_C は表3と同じ.

5.2 家計貯蓄率の総合的な検討

家計貯蓄率は時系列で見ると、1983年にやや低下したものの、趨勢としては上昇傾向にある(図4)。従来、こうした現象を説明するために、計量経済モデルではマクロ時系列変数が用いられた。

本稿では、マクロ時系列よりも多くの情報をもつコホート表に基づき、家計貯蓄率の変動を年齢、時代、世代の3つの効果に分離し、さらに時代効果の他に可処分所得を加えた。分析結果としては、可処分所得で大部分説明される時代効果が支配的であるものの、世代効果も確認された。

さらに、詳細を世代効果を中心にまとめると、家計貯蓄率の世代効果は、同世代人口規模の相対的な低下と女子労働力率の上昇を受けて、1916年生まれの世代を底に上昇傾向にあり、特に、団塊世代以降上昇傾向を強めている。また、人口構成の上からも家計貯蓄率の低い大正世代や昭和一桁世代の人口割合が低下し、団塊世代及びそれ以降の世代の人口割合が高まることにより家計貯蓄率が上昇する方向に作用している。

このことを世代効果を中心に別な側面からみると、以下のことが言える。

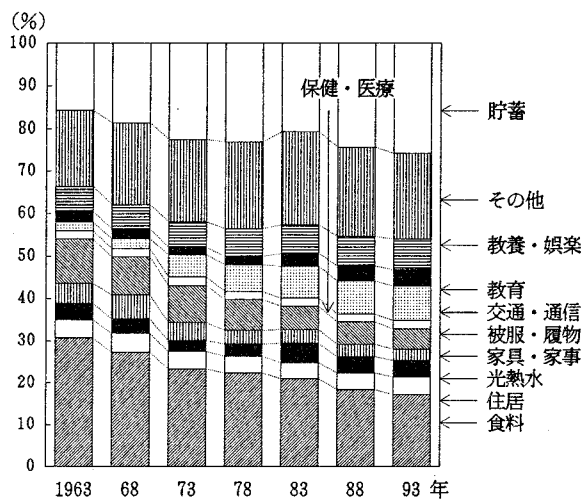


図9. 各項目別消費支出割合及び貯蓄率の推移.

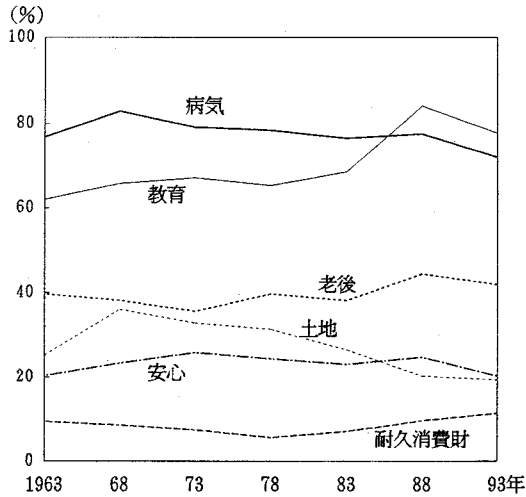


図 10. 貯蓄目的の各項目別推移.

(備考) 1. 日本銀行「貯蓄に関する世論調査」,
2. 3つまで選択可.

- (1) 家計貯蓄率を上昇させる世帯人員の減少に対し、世代効果の影響が大きくなっている。特に、1956年生まれ以降について影響が強くなっている。
- (2) 家計貯蓄率を上昇させる家計内有業人員の増加に対し、世代効果の影響はわずかに認められる。それは、家計内有業人員に対し世代効果の影響が低下する、1926年生まれまでの世代の割合が減少することにより生じる。
- (3) 消費項目の中では、家具・家事用品の支出割合が低下し、貯蓄率上昇に寄与しているが、同項目の世代効果が大きな影響を与えている(図9)。
- (4) 貯蓄目的の中では、世代効果の影響が大きい耐久消費財の、貯蓄目的に占める割合が上昇している(図10)。

6. おわりに

家計貯蓄率を素材にしながら、理論と計測の融和を目標に、ベイズ型コウホートモデルの拡張を試みた。同モデルで分離された各効果の解釈に当たっては、当該効果に関係した理論が既にある場合はそれが考慮される必要があるが、本稿ではより積極的に、時代効果に加えて可処分所得をモデルに組み込み、ABICの上からも、また、解釈の上からもより説得的なモデルを構築した。さらに、各種データの世代効果相互の関係についても検討することで家計貯蓄率の変動を総合的に分析した。

本稿では、家計貯蓄率のベイズ型コウホートモデルの拡張を通して、原データの持っている有用な情報を、できるだけ恣意性の少ない統計モデルに基づいて集約することからはじめながら、原データの変動を説明するに資する理論を適宜援用することにより、さらに有用な情報を生み出す過程を具体的に明らかにした。こうしたアプローチは、統計モデルによる分析結果の解釈をより説明的なものとするだけでなく、統計モデル(例えば時系列モデル)に対してしばしばなされる「理論なき計測」という批判にも一定の答えを用意するものであるといえよう。

謝 辞

本稿は、「計量経済学コンファレンス」(1995年1月6日一橋大学経済研究所)で報告した草稿を改めたものである。有益なコメントを頂いたコンファレンス参加者の方々および2人のレフェリーに感謝いたします。

付録 A: 経済変数を取り込んだコウホートモデルと ABIC

行列とベクトルを用いて, モデル (2.3) あるいは (2.4) をゼロ和制約 (2.2) を考慮して書き直せば,

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

となる。ここで, $g(\cdot)$ を既知の単調関数として $Z_{ij} = g(X_{ij})$ であり,

$$\mathbf{z} = (Z_{11}, Z_{21}, \dots, Z_{IJ})', \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{IJ})'$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\alpha, \beta, \boldsymbol{\mu}'_*)', \quad \boldsymbol{\mu}_* = (A_1, \dots, A_{I-1}, P_1, \dots, P_{J-1}, C_1, \dots, C_{K-1})'$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{E} \mathbf{D}_*), \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ E_1 & \dots & E_1 & E_2 & \dots & E_2 & \dots & E_j & \dots & E_j \end{pmatrix}'$$

である。また, \mathbf{D}_* はコウホートモデルを表現する適当なデザイン行列である (具体例は中村 (1982) にある)。

モデルの尤度 f は, \mathbf{x} を変数変換した \mathbf{z} が平均 $\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$, 分散 $\sigma^2 \mathbf{W}$ の正規分布に従うと仮定すると, 次のように書ける。

$$f(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{IJ}{2}} |\mathbf{G}| \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu})' \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

ここで, $\mathbf{x} = (X_{11}, X_{21}, \dots, X_{IJ})'$, $\mathbf{G} = \text{diag} \left\{ \frac{d}{dx} g(X_{11}), \frac{d}{dx} g(X_{21}), \dots, \frac{d}{dx} g(X_{IJ}) \right\}$, 対角行列

\mathbf{W} は既知とし $|\mathbf{W}| = 1$ である。

コウホート分析における識別問題を克服するために, パラメータの漸進的変化の条件をモデルに取り込む。具体的には, 次のような3効果の隣り合うパラメータの1次階差の2乗和を小さくする。

$$\frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (A_i - A_{i+1})^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (P_j - P_{j+1})^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (C_k - C_{k+1})^2 \rightarrow \text{小}.$$

ここで, $1/\sigma_A^2$, $1/\sigma_P^2$, $1/\sigma_C^2$ は未知の適当な重みである。これを正規分布の密度関数として書き直せば,

$$\begin{aligned} & \pi(\boldsymbol{\mu}_* | \sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \sigma^2) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-(I+J-2)} |\mathbf{D}'_S \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_S|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\mu}'_* \mathbf{D}'_S \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_S \boldsymbol{\mu}_* \right\} \end{aligned}$$

となり, 事前分布として使える。ここで, $\mathbf{S} = \text{diag} \{ \sigma_A^2, \dots, \sigma_A^2, \sigma_P^2, \dots, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \dots, \sigma_C^2 \}$ であり,

D_S は 1 次階差を表現する適当な行列である (具体例は中村 (1982) をみよ).

パラメータ μ の推定値は事後密度の最大化

$$f(x|\mu, \sigma^2) \cdot \pi(\mu_*|\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \sigma^2) \rightarrow \max$$

により求める. 超パラメータにあたる $\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$ が決まれば, 重み付き最小 2 乗法により簡単に求めることができる.

未知である超パラメータ σ_A^2 等は, 次式で定義される赤池のベイズ型情報量規準 ABIC 最小化法により決定する.

$$ABIC = -2 \ln \int f(x|\mu, \sigma^2) \cdot \pi(\mu_*|\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \sigma^2) d\mu_* + 2h.$$

ここで, h は α, β, σ^2 も含めた超パラメータの数である.

実際には, σ_A^2 等を与えて $\hat{\mu}$ を求め, $\ln \int f \cdot \pi d\mu_*$ を $\hat{\mu}$ のまわりでテイラー展開して近似的に評価すれば, 定数項を除くことにより,

$$ABIC = (IJ) \ln \hat{\sigma}^2 - 2 \ln |G| - \ln |D'_S S^{-1} D_S| \\ + \ln |D'_* W^{-1} D_* + D'_S S^{-1} D_S| + 2h,$$

が得られる. ここで,

$$\hat{\sigma}^2 = \{(z - D\hat{\mu})' W^{-1} (z - D\hat{\mu}) + \hat{\mu}'_* D'_S S^{-1} D_S \hat{\mu}_*\} / IJ.$$

上の ABIC を, 超パラメータ $\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$ の関数と考えれば, 適当な数値的最適化により ABIC 最小化法が実現できる.

付録 B: 家計貯蓄率の時系列変動の 3 効果への分解

i 年齢 j 時代の家計貯蓄率を X_{ij} , 貯蓄を S_{ij} , 可処分所得を Y_{ij} とすると $X_{ij} = S_{ij}/Y_{ij}$ であり, 世帯数を n_{ij} とすれば j 時代の家計貯蓄率 X_j は

$$(B.1) \quad X_j = \frac{\sum_i n_{ij} S_{ij}}{\sum_i n_{ij} Y_{ij}} = \sum_i \left\{ \frac{n_{ij} Y_{ij}}{\sum_i n_{ij} Y_{ij}} \cdot \frac{S_{ij}}{Y_{ij}} \right\} = \sum_i \lambda_{ij} X_{ij}$$

のように得られる. ここで, $\lambda_{ij} = n_{ij} Y_{ij} / \sum_i n_{ij} Y_{ij}$ とおいた. $\sum_i \lambda_{ij} = 1$ である.

原数値に対する 3 効果モデルによる期待値 \hat{X}_{ij} は,

$$\hat{X}_{ij} = \hat{\alpha} + \hat{A}_i + \hat{P}_j + \hat{C}_k$$

であるから, これを (B.1) の X_{ij} の代わりに用いれば,

$$\hat{X}_j = \sum_i \lambda_{ij} \hat{X}_{ij} = \hat{\alpha} + \sum_i \lambda_{ij} \hat{A}_i + \hat{P}_j + \sum_i \lambda_{ij} \hat{C}_k$$

のような分解が得られる. これより, $\sum \lambda_{ij} \hat{A}_i, \hat{P}_j, \sum \lambda_{ij} \hat{C}_k$ はそれぞれ家計貯蓄率の時系列変動の年齢による成分, 時代による成分, 世代による成分とみることができる.

参 考 文 献

- 福田公正 (1994). 経済時系列の変動要因分解——経済モデルと統計モデルの融和, 『時系列解析の実際I』 (赤池弘次, 北川源四郎 編), 39-61, 朝倉書店, 東京.
- Glenn, N. D. (1977). *Cohort Analysis*, Sage Publications, Beverly Hills (藤田英典 訳 (1984). 『コウホート分析法』, 朝倉書店, 東京).
- Kotlikoff, L. J. (1992). *Generational Accounting—Knowing Who Pays, and When, for What We Spend*, Macmillan, New York (香西泰 監訳 (1993). 『世代の経済学』, 日本経済新聞社, 東京).
- Mason, K. O., Winsborough, H. H., Mason, W. K. and Poole, W. K. (1973). Some methodological issues in cohort analysis of archival data, *American Sociological Review*, **38**, 242-248.
- 松井陽通 (1995). 世代と消費, *ESP* (経済企画協会), No. 277, 46-51.
- 中村 隆 (1982). ベイズ型コウホート・モデル——標準コウホート表への適用——, *統数研彙報*, **29**, 77-97.
- Nakamura, T. (1986). Bayesian cohort models for general cohort table analyses, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **32**, 353-370.
- 中村 隆 (1989). 継続調査によって社会の変化を捉えるコウホート分析の方法, *理論と方法*, **4**, 5-23.
- 中谷 巖 (1981). 『入門マクロ経済学』, 日本評論社, 東京.

An Analysis of the Household Saving Rate
by Bayesian Cohort Model
—Application of the Economic Theory to Bayesian Model—

Kosei Fukuda

(Economic Planning Agency)

Takashi Nakamura

(The Institute of Statistical Mathematics)

Japanese household saving rates, classified by period and by age of heads of households, are analysed by Bayesian cohort models. In this paper we add an exogenous variable, disposable income, which is introduced by the economic theory, into the standard three-effect-model. Values of ABIC show that our newly specified model is superior to the standard one, and moreover we find that the period effects estimated in the standard model can be practically explained by disposable income instead. As for the estimated cohort effects, possible factors behind them are discussed. Finally, after estimating cohort effects of other related data, we synthetically examine the variation of household saving rate from the viewpoint of cohort variation.