

雲のシミュレーション

東京工業大学 理学部 柳 田 達 雄*

(1995 年 5 月 受付)

1. はじめに

自然現象を理解するために我々はモデルを用いる。多くの場合、複雑な現象は幾つかの独立な要素に分割され、この理想化された現象に対してモデル化が行われる。ここでは既に二つのレベルでモデル化が行われている。一つは複雑な現象をそのままとらず理想化するモデル化。もう一つは理想化された清い世界に対して行うモデル化である。そして、モデルは“理想化された自然”，実験，との対応によって正当化され、我々は現象を理解しようとする。

この分割統治的方法は複数の物理的要因の絡み合いで起きる現象に対してはあまり有効ではない。個々の理想モデルが非線形に結合するため、現象を記述することは原理的には可能であっても解析することは難しい。

ここで取り扱う雲の生成・消滅の動力学は大気運動と相転移との絡み合いによって生じており、流体運動を記述する Navier-Stokes 方程式や熱力学の方程式を精確に計算すれば現象を再現できるはずである。このような系を数値解析する時、要素現象の時間空間スケールが異なっているため、一方のスケールに合わせた解析を行うと他方のスケールの現象を見ることができない。実際、現在のコンピュータでは基礎方程式をもとにしてこのような複雑系を全ての時間・空間スケールにわたって精確にシミュレーションすることはできていない。このようなことから、雲のマクロなパターンを調べる場合、ミクロな相転移現象をモデル化する必要がある。ところが、十分にミクロな状態の情報をモデルに取り入れることができないため相転移のモデル化には任意性が残る。しかしながら、ミクロなダイナミクスによらない普遍的なマクロ現象が存在する可能性があり、ミクロなダイナミクスによらない普遍的構造を明らかにする事が必要である。言い換えると、ミクロなダイナミクスがマクロなパターンにどのような影響を及ぼすかを調べる事が重要となる。このように、複雑系を理解するためには基礎方程式を解いて現象を解析するだけでなく、モデルを構築し、如何なる時に現象を再現し、どうなると再現しなくなるかというモデルの変化に対する定性的性質の構造安定性を調べる必要があるであろう。

この小論ではモデルを“作る”ことによって雲の動力学の解明をこころみる。

2. 構成論的モデル化

はじめに述べたように複雑な現象を解明するためにはその普遍的構造を調べなくてはならない。そのためには、モデルができるだけ構成論的に作れた方がよい。ここでは以下のような手続きにしたがってモデルを構成する (図 1)。

* 現 北海道大学 電子科学研究所: 〒060 札幌市北区北 12 条西 6.

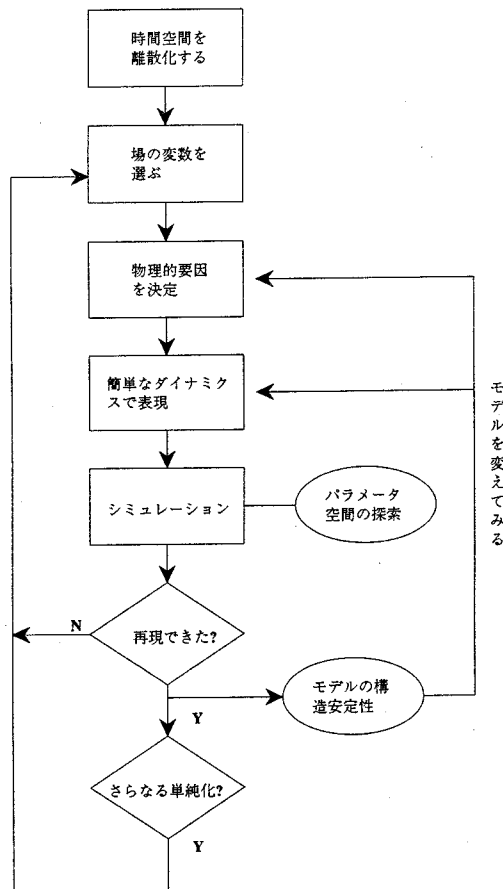


図1. 構成論的モデル化. 現象から物理的要因を取り出して簡単なダイナミクスで表す. 物理的要因を変更・追加・削除することによって, モデルの細部によらない普遍的構造, 本質的要因を明らかにできる.

1. 時間空間を離散化.
2. 離散化された空間の各点に現象を記述する場の変数を選ぶ (例えば, 速度場 v^i).
3. 現象を支配している物理的要因を選ぶ (例えば, 粘性, 外力).
4. その物理的要因を簡単なダイナミクス (写像) で表現する ($f_{粘性}$, $f_{外力}$).
5. 場の変数に写像を逐次作用させることにより時間発展させる.

$$v^i \xrightarrow{\text{粘性}} v^{i'} \xrightarrow{\text{外力}} v^{i''} \dots \xrightarrow{\text{その他}} v^{i+1}$$

このように構成したモデルは物理的要因の削除・変更・追加が容易にできるため現象の普遍的構造を調べるのに都合が良い. 上の例で粘性の効果を考えない時は写像 $f_{粘性}$ を取り除けば良い.

現象の理解にはパラメータ変化に対する動的挙動を観察することも重要である. そのために

は、時間発展に必要な演算量が少ないことが要求される。ここで紹介するモデルはワークステーション程度の演算能力で十分に時間発展できるため、広いパラメータ空間を探索するために適している。これにより、実験や観測で明らかにされていない新しい現象をコンピュータの中で発見することも可能である。このような利点があるため、最近では多くの現象に対して構成的モデルによる解析が行われている (Kaneko (1990), Oono and Puri (1987), Shinozaki and Oono (1989), Nishimori and Oouchi (1993), Yanagita (1992a, 1992b), Yanagita and Kaneko (1993, 1995)).

次章では雲の動力学モデルを構築しその多様なパターンの解析を行おう。

3. 雲のモデル

ここでは雲の多様なパターンがどのようなダイナミクスにより維持され、パラメータ空間でいかなるパターンが生成されるか調べるためのモデルを構築する (2次元空間でのモデル化を示すが、3次元でも同様にして行うことが可能である)。まず、2次元の正方形格子 (x, y) ($x = 1, 2, \dots, N_x; y = 1, 2, \dots, N_y$)、(x は水平方向、 y は鉛直方向とする) を考え、雲のパターンの生成・消滅のダイナミクスを表現する場の変数として速度 $v(x, y)$ ・温度 $T(x, y)$ ・蒸気量 $w_v(x, y)$ ・液滴量 $w_l(x, y)$ を選ぶ。雲が生成・消滅する過程として以下のシナリオを考える (図2) (木村 他 (1981))。

雲の生成消滅のシナリオ

暖められた空気 (温暖気塊) は浮力によって上昇する。この上昇により気塊は断熱膨張し温度が低下する。もし、水蒸気を多く含まなければこの上昇は止まるが、気塊に十分な水蒸気が含まれている場合 (潤湿空気) はこの温度低下により水蒸気が凝結する (液滴の形成)。この凝結により潜熱が放出されるため上昇気流が維持され雲が形成される。十分に液滴が生成され水蒸気量が減少すると潜熱放出による上昇気流が維持

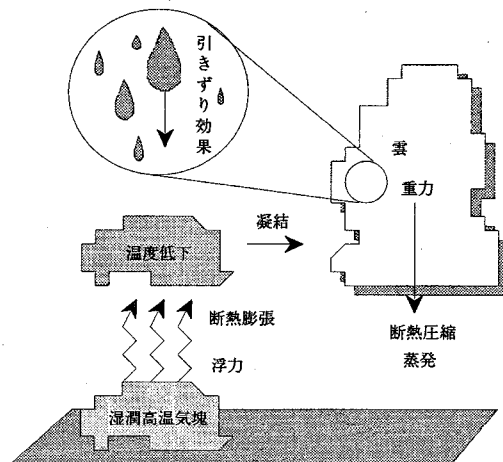


図2. 雲の生成・消滅のシナリオ。温暖気塊の浮力による上昇により断熱膨張が生じ温度が低下する。このため水蒸気が凝結し雲が生成される。この凝結に伴う潜熱の放出が浮力によるさらなる上昇を生み雲は発達する。凝固する水蒸気が減少すると成長は弱まり重力による液滴の落下によって衰退が始まる。

できなくなり雲の発達には弱まる。さらに、重力による液滴の落下に伴い回りの空気が引きずられるため下降気流が生じる。そのため断熱圧縮による温度上昇が起こり液滴が蒸発して雲は衰える。

以上のシナリオを支配する物理的要因として、(1) 浮力、(2) 粘性、(3) 拡散、(4) 非圧縮性効果、(5) 移流、(6) 断熱膨張、(7) 相転移、(8) 潜熱、(9) 引きずり、(10) 液滴の落下を考え、簡単なダイナミクスに置き換える。浮力は温度の関数としてダイナミクス $f_{浮力}$: $v_y^{t+1/3}(x, y) = v_y^t(x, y) + \frac{c}{2} \{T^t(x+1, y) + T^t(x-1, y) - 2T^t(x, y)\}$ で表し、粘性、拡散は $f_{粘性}$: $v^{t+2/3}(x, y) = v^{t+1/3}(x, y) + \eta \Delta v^{t+1/3}(x, y)$, $f_{熱拡散}$: $T^{t+1/3}(x, y) = T^t(x, y) + \lambda \Delta T^t(x, y)$, $f_{拡散}$: $w_v^{t+1/3}(x, y) = w_v^t(x, y) + \lambda \Delta w_v^t(x, y)$ で表す。ここで Δ は離散化した Laplace 演算子 $\Delta A(x, y) \equiv \{A(x+1, y) + A(x, y+1) + A(x-1, y) + A(x, y-1) - 4A(x, y)\}/4$ である。また、ここでは非圧縮性流体の条件 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を完全に要求する代わりに $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ を離散化したダイナミクスを実行してベクトル場の発散を抑えている (非圧縮性効果)。通常この条件は各時刻で毎回 Poisson 方程式を解くことにより満たさなくてはならない。しかし、これには膨大な計算時間を必要とするため、ここでは精確に非圧縮条件を要求せずに局所的なダイナミクスによって非圧縮性効果を表現している。さらに、移流 ($\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \nabla T$, $\mathbf{v} \cdot \nabla w_h$, $\mathbf{v} \cdot \nabla w_v$) を表すために Lagrange 写像を導入する。各格子点 (x, y) に準粒子を配置し各準粒子はそこでの速度 $\mathbf{v}(x, y)$ にしたがって位置 $(x+v_x, y+v_y)$ に移動して場の量を運搬する。一般に移動した先 $(x+v_x, y+v_y)$ は格子点ではないため最近接格子にテコの法則 (粒子の位置と格子との距離に反比例させる) に従って場の量を分配して移流を表す。すなわち、格子点 (x, y) の準粒子は移動した先の最近接の格子点 $([x+v_x], [y+v_y])$, $([x+v_x+1], [y+v_y])$, $([x+v_x], [y+v_y+1])$, $([x+v_x+1], [y+v_y+1])$ に場の量を以下のように分配する。

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad X([x+v_x], [y+v_y]) &= (1-v_x)(1-v_y) X(x, y) \\
 X([x+v_x+1], [y+v_y]) &= v_x(1-v_y) X(x, y) \\
 X([x+v_x], [y+v_y+1]) &= (1-v_x)v_y X(x, y) \\
 X([x+v_x+1], [y+v_y+1]) &= v_x v_y X(x, y)
 \end{aligned}$$

ここで $X(x, y)$ は全ての場の変数 (T, v_x, v_y, w_h, w_v) について行い、 $[z]$ はガウス記号で z よりも小さい最大の整数である。

変数として温度場、速度場のみを考え以下のように (1) から (5) までの物理要因を逐次作用させると熱対流系のモデルとなる。

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^t(x, y) \\ T^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{浮力}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{t+1/3}(x, y) \\ T^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{非圧縮} f_{粘性}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^{t+1/2}(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{移流}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{t+1}(x, y) \\ T^{t+1}(x, y) \end{array} \right\}$$

このモデルは、底面と上面の温度差 (Rayleigh 数)、熱伝導率 λ と粘性率 η の比 (Prandtl 数)、容器の縦横比 N_x/N_y (アスペクト数) の 3 つパラメータを変化させることによって熱伝導から対流への遷移、ロールの周期的振動、カオスの振動、乱流など多種多様な現象を再現することが著者と金子により示されている (Yanagita and Kaneko (1993, 1995))。

次に、雲の生成・消滅の動力学的に重要な断熱膨張、相転移、引きずり等の効果を考える。まず、温度は断熱膨張によりそこでの鉛直速度 $v_y(x, y)$ に比例して低下すると考え $f_{断熱膨張}$: $T^{t+1/3}(x, y) = T^t(x, y) - \beta v_y^t(x, y)$ とした。また、引きずりの効果は水滴が一樣な大きさをもち

一定の終端速度 V で落下しているとすると、空気との相対速度 $v_y(x, y) - V$ と液滴量 $w_l(x, y)$ の積に比例する。つまり、 $f_{\text{引きずり}} : v_y^{t+1/3}(x, y) = v_y^t(x, y) - \gamma w_l^t(x, y) (v_y^t(x, y) - V)$ である。相転移は平衡点 w^* からのずれに比例するダイナミクスと転移に伴う潜熱放出を表す以下の方程式

$$(3.3) \quad \frac{dw_v(x, y)}{dt} = +\alpha(w_v(x, y) - w^*)$$

$$(3.4) \quad \frac{dw_l(x, y)}{dt} = -\alpha(w_v(x, y) - w^*)$$

$$(3.5) \quad \frac{dT(x, y)}{dt} = -Q \left(\frac{dw_v(x, y)}{dt} - \frac{dw_l(x, y)}{dt} \right)$$

を差分化したものを用いた。ここで w^* は飽和蒸気圧 $w^* \sim \exp(-q/T)$ に比例した量である。さらに、液滴は終端速度 V で落下していると仮定したので鉛直速度成分を $v_y(x, y) - V$ として移流を実行する。以上のプロセスを逐次場の量に作用させ時間発展する以下のモデル

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^t(x, y) \\ T^t(x, y) \\ w^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{浮力+引きずり}}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^{t+1/3}(x, y) \\ T^t(x, y) \\ w^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{粘性+非圧縮}}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^t(x, y) \\ w^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{拡散+熱拡散+膨張}}} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^{t+1/3}(x, y) \\ w^{t+1/3}(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{相転移}}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^{t+2/3}(x, y) \\ w^{t+2/3}(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{移流+重力}}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^{t+1}(x, y) \\ T^{t+1}(x, y) \\ w^{t+1}(x, y) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

を用いて雲の多様なパターンの生成機構を調べる。このモデルのパラメータは拡散係数 λ 、粘性係数 η 、非圧縮効果 ν 、断熱膨張 β 、液滴落下速度 V 、引きずり抵抗 γ 、転移速度 α 、潜熱 Q であり、それぞれ $\lambda = 0.4, \eta = \nu = 0.2, \beta = 0.2, V = 0.02, \gamma = 0.1, \alpha = 0.2, Q = 0.2$ とした。ここでは主に底面の温度 T_b と全空間での総水分量 $W = \sum_{x,y} (w_v(x, y) + w_l(x, y))$ が変化した時の雲のパターンを報告する。また、水平方向は周期的境界条件を課し、速度に関しては上底面 ($y = 0, N_y$) とともに固定条件、温度に関しては底面に固定条件、上面に Neumann 条件 ($dT(x, N_y)/dy = 0$) を課した。

4. シミュレーション

ここではモデルを時間発展させ液滴量 $w_l(x, y)$ の時間空間変化を調べた結果を報告する。雲とは微水滴が空中に浮遊している状態であるが、モデルには水滴サイズを記述する変数が含まれていないため、ここでは雲を単に液滴量 $w_l(x, y)$ がある閾値 w_c よりも大きな値を持つサイトによって作られるクラスターとして定義する。(もちろん水滴の成長ダイナミクスを考慮したモデルを構築することも可能であるが、ここでは簡略化したモデルでどの程度の現象が再現され、雲のパターンの多様さが生じるかに興味がある。)

液滴の成長過程を考慮しなくとも底面温度 T_b と全体の総水分量 W を変化させると定性的に異なった幾つかの雲パターンが現れる。代表的な空間パターンの時間発展を図3、図4に示す。図3は層状型を、図4は積雲型をしていることが分かる。

空間パターンがカオティックに運動している場合でも、雲の生成・消滅に周期が存在していることが図3、図4を見ると予想される。そこで、雲量 $L(t) = \sum_{x,y} w_l^t(x, y)$ を定義してその振る舞いを調べると長時間の周期が存在することが確かめられる(図5)。さらに、この周期は生



図3. 雲パターンの時間変化1. 液滴量 $w_i(x, y)$ のグレースケール表示. 初期5000ステップの過渡状態後のパターン変化を100ステップ毎に示した. 左上から右下に時間発展する. 層状の雲が周期的に生成消滅を繰り返していることが分かる. パラメータは $T_b = 3.0$, $W = 0.0025$ である.

成された雲型によって定常的・周期的・カオス的と異なることが分かる.

パラメータが変化した時の空間パターンを観察していると数種類の雲型に分類できそうなことが分かる. そこで, パラメータ T_b , W の変化に対する空間パターンの変化を定量的に調べるために雲型を雲面積 (雲であるサイトの数) C_s と雲の周辺の長さ C_l によって特徴づけた.

$$(4.1) \quad C_s(t) = \sum_{x=1, y=1}^{N_x, N_y} \Theta(w_i^t(x, y) - w_c)$$

$$(4.2) \quad C_l(t) = \sum_{x=1, y=1}^{N_x, N_y} \sum_{dx=\pm 1} \sum_{dy=\pm 1} \Theta(w_i^t(x, y) - w_c) \Theta(w_c - w_i^t(x+dx, y+dy))$$



図4. 雲パターンの時間変化2. 図3と同じく $w_l(x, y)$ のグレースケール表示. 総水分量を $W = 0.015$ とすると積雲型パターンが生じる.

ここで $\theta(x)$ はヘビサイド関数である. これらの量は時間的に変動するが, その平均値と分散によって特徴づけることによりパラメータ空間での大域的な相図が得られる (図6). これにより少なくとも4種の異なったパターン (層雲型, 乱層雲型, 積雲型, 乱積雲型) が存在していることが分かる. これらのパターンの傾向として総水分量が少ない時には層雲状のパターンを示し, 多い時には積雲状のパターンが得られることが分かる. また, これらの定常的なパターンが得られる中間のパラメータ領域ではパターン間の遍歴運動が観察される.

このモデルの3次元への拡張は容易で空間次元の増加にともなう雲の多様性の増大が期待されるが, ここでは3次元モデルによって生成された雲のパターンを示すだけにとどめよう.

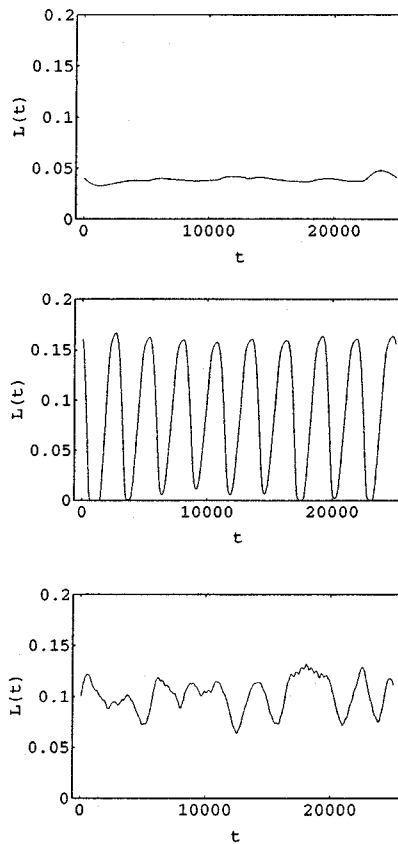


図5. 雲量の時間変化. 雲量 $L(t) = \sum_{x,y} w_l^t(x,y)$ の時間変化. パラメータの変化にともなう異なった振動をする. 上: 定常 ($T_b = 3.0, W = 0.005$), 中: 周期的 ($T_b = 3.0, W = 0.01$), 下: カオス的 ($T_b = 4.0, W = 0.005$).

図7は液滴量 $w_l(x,y)$ の等高面である. 2次元モデルと同様に生成消滅を繰り返すパラメータ領域や一定の高度に定常的に雲が存在する場合などがある. 3次元モデルにおいてさえもワークステーションを用いて空間パターンの時間変化を追うことが可能なことも我々のアプローチの一つの利点である.

5. ま と め

自然界には現象を個々の物理的要因に分解し, おおのこの清い世界だけを調べていただければ理解できない複雑な系が多い. このような現象はえてして, 時間・空間スケールの異なる系が結合しているため, そのマクロな現象をとらえるためにはミクロ・スケールの物理的要因にモデルを導入する必要がある. ここで取り扱った雲の動力学はマクロな流体運動とミクロな相転移の結合系であり個々の物理的要因は詳しく調べられている. しかしながら, これらの要因が複合した雲のパターン・ダイナミクスはほとんど知られていない. それは, 相転移と大気運動の時空間スケールが絡み合っており, 一方のスケールに的を絞れば全体のダイナミクスが追

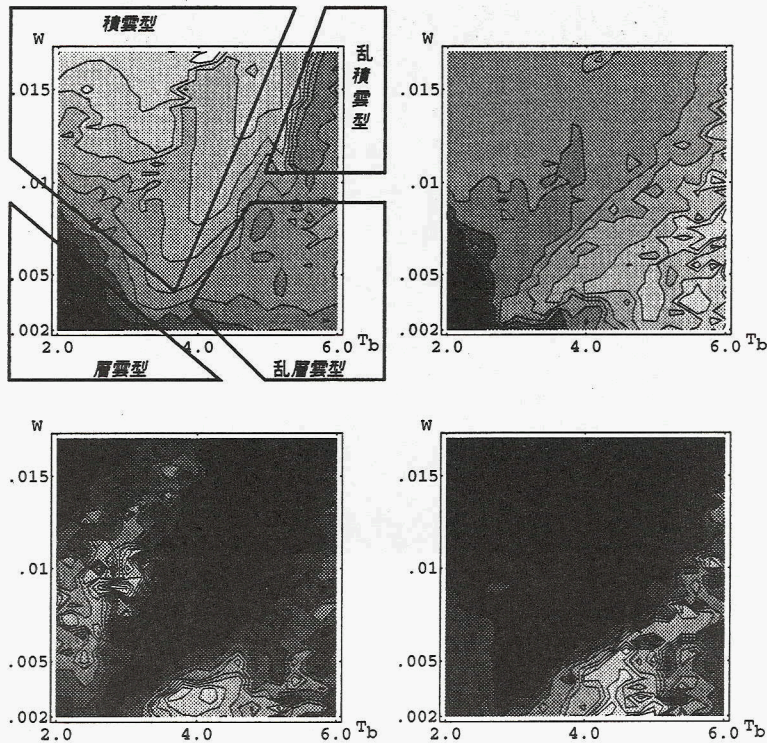


図6. 相図. パラメータ W , T_b が変化した時に現れる雲のパターンの定量化. 雲型を左上: $\langle C_s \rangle$, 右上: $\langle C_l \rangle$, 左下: $\langle (C_s - \langle C_s \rangle)^2 \rangle$, 右下: $\langle (C_l - \langle C_l \rangle)^2 \rangle$ によって特徴づけた.

えないからである. このような系は基礎方程式をもとにしては計算量が膨大になるため, 方程式は立てられるが(数値)解析ができないのが現状である. この状態から抜け出る一つの方法は現象論的なモデルを作り解析することであろう.

ここで用いたモデル化は動力学の大まかなシナリオを作り上げ, 個々の物理的要因を簡単なダイナミクス(プロセス)で置き換えるという構成論的方法である. この方法は個々のプロセスの削除・変更・追加が容易に可能であるためモデルの変化に対する安定性を調べることができる. これにより, モデルの細部によらないマクロな普遍的性質を明らかにすることができる. また, 遠心力やコリオリ力などの効果の導入が新しいプロセスの追加という形で実現されるため容易に実行可能である. さらに, 演算量が非常に少なくて済むため手元にあるワークステーションで計算と同時に速度場・温度場などの情報を描画・表示することができる. このため, パラメータ変化に対する運動の動的挙動を直接ディスプレイで観察できる. 我々の視覚はこのような複雑な振る舞いのダイナミックな性質を捉えるのに適しており, 新現象の発見的研究に威力を発揮すると思われる.

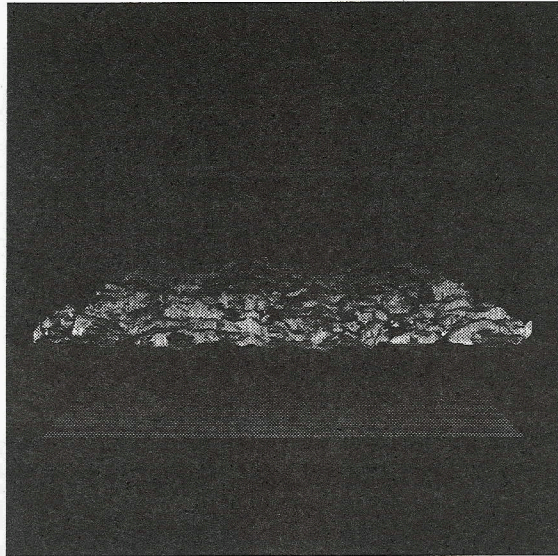


図7. 三次元モデルの雲型. 三次元モデルをランダムな初期状態から時間発展させ, $t = 2000$ での液滴量 $w_i(x, y) = 0.01$ の等高面により雲型パターンを示した. $T_b = 0.3$, $W = 0.015$, $N_x = N_y = 80$, $N_z = 40$.

参 考 文 献

- Kaneko, K. (1990). *Simulating Physics with Coupled Map Lattice*, Formation, Dynamics and Statistics of Patterns, Vol. 1, World Scientific, Singapore.
- 木村竜治, 浅井富雄, 武田喬男 (1981). 雲や降水を伴う大気, 大気科学講座, Vol. 2, 東京大学出版会.
- Nishimori, H. and Oouchi, Y. (1993). Formation of ripple patterns and dunes by wind-blown sand, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, p. 197.
- Oono, Y. and Puri, S. (1987). Computationally efficient modeling of ordering of quenched phases, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(8), 836-839.
- Shinozaki, A. and Oono, Y. (1989). Cell dynamical systems, *Forma*, **4**, 75-102.
- Yanagita, T. (1992a). Coupled map lattice model for boiling, *Phys. Lett. A*, **165**, 405-408.
- Yanagita, T. (1992b). Phenomenology for boiling: a coupled map lattice model, *Chaos*, **3**(2), p. 343.
- Yanagita, T. and Kaneko, K. (1993). Coupled map lattice model for convection, *Phys. Lett. A*, **175**, 415-420.
- Yanagita, T. and Kaneko, K. (1995). Rayleigh-Bénard convection; patterns, chaos, spatiotemporal chaos and turbulent, *Physica D*, **82**, 288-313.

A Simulation of Cloud Formation

Tatsuo Yanagita

(Tokyo Institute of Technology)

A model for cloud formation is proposed, which consists of the following physical processes; advection of gas, vapor, and liquid, buoyancy force, diffusion of heat and vapor, viscosity in the fluid motion, phase transition between vapor and liquid, adiabatic expansion, fall of droplets by gravity, and descend flow dragged by the fall of droplets. Representing these processes by a map on a lattice, we have made extensive simulations of the model, which reproduce diversity of cloud patterns with the changes of the parameters of the model. Two patterns, corresponding to “SEKIUN” and “SOUUN” are distinguished by the ratio of cloud area to its perimeter. A phase diagram for these pattern changes is obtained with regards to the changes of the amount of vapor and the temperature gradient. Patterns of the three dimensional model are also shown.