統計数理（1997）
第 45 巻 第 2 号 265-285

動的 X11 モデルと非線形季節調整 I
——モデルと計算法——

統計数理研究所　尾　崎　　統

（1997 年 7 月　受付）

1. はじめに

X11 法と呼ばれるデータ処理コンピュータープログラムが全世界の政府統計局や中央銀行などで官庁統計や経済統計の処理に使われている．X11 法は 1967 年米国のセンサス局で Shiskin 氏とそのグループによって開発された季節調整の手法で，30 年近くたった今でも世界の季節調整法の標準となっている．その主な特徴は

i ）統計モデルに基づかず一連の計算手続きの流れとして与えられている，
ii ）静的なスムージング手法を用いている，

の 2 点である．このことから X11 法は非モデルベース的季節調整法の代表的なものとして知られる．X11 法はこの 2 点の特徴，特に i)の特徴の故に統計学者に受け入れられないまま，応用における有効さが評価され，世界の官庁統計の季節調整の主役の座にすわり続けることになる．統計学者の多くは統計モデルにもとづくデータの処理法の特性の解明に興味の中心があり，X11 法のようにモデルが陽に入って来ず，複雑な手続きの流れとして定義されたものを分析するのは得意でない．筆者が初めて X11 法に接したのは 1978 年の夏ケンブリッジ大学で開かれた時系列の国際シンポジウムである．この時の G. E. P. Box, J. Tukey, M. G. Kendall，赤池弘次，R. E. Kalman らそうそうたる顔ぶれの招待講演者の中にまじってセンサス局の Shiskin 氏の名前があったことを思い起こすとき今になってオーガナイザーの慧眼に気がつく．この当時病床にあった Shiskin 氏の替わりに代読で行われた X11 法の講演ではプログラムの手続きの説明が延々と続き，浅学の筆者には何の話をしているのか全然理解できなかったのを記憶している．また時系列解析の専門家にとっては，時間的に変動する時系列を解析するのにダイナミックスの入らない ii）の平滑化の手法を使う X11 法は，当然うさん臭くうつる．このような事情から多くの統計学者，時系列解析の専門家によって非 X11 的季節調整法，つまり陽にモデルで定義された季節調整法，モデルベース的季節調整法が導入される．非 X11 的季節調整法の例としては，たとえば Box and Jenkins (1970) のボックス-ジェンキンス法，ベル研の Cleaveland et al. (1990) の STL，統計数理研究所の Akaike and Ishiguro (1980), Akaike (1981) の BAYSEA と Kitagawa (1981), Kitagawa and Gersch (1984) の DECOMP の他，Harvey (1985), Ameen and Harrison (1985) など数多く知られている．

1970 年代以降，このような統計学者の努力によって統計的モデルに基づく季節調整法が整備されてきたが，それにもかかわらず季節調整法の主役は依然としてセンサス局の X11 法（とその流れを汲むもの）である状況は変わっていない．言い替えれば，それ程非 X11 法の出来が“まだまだ”であるということかもしれない．X11 法と非 X11 法との間で顕著な差が出るのは相乗的 (Multiplicative) な時系列の場合で，しかもその場面で X11 法のトレンド推定結果のほうが

非X11統計モデルによる推定結果より季節調整法のユーザーに好まれるということがある．筆者は10年程前から，この点が気になり，P. J. Thomson博士とX11法の解明に非線形時系列解析の立場から取り組んで来た．初期の我々の目的は理論的根拠の不明確なX11法の性格を明らかにしX11法に出来るだけ近い統計モデルを導入することによってX11法の結果を客観的に評価することを可能にすることであった．研究を進めていくうちにX11法を統計モデルとして実現する上で非線形力学系が有効な役割を果たすことがわかってきた．統計数理で季節調整の特集号が出されるこの機会にこれまでの未発表の研究の一部をここで紹介したい．

本論文ではまずX11法の最も特徴的な点の一つであるトレンドの部分に光を当てて，そこから出発して，その力学系モデルとの関連を指摘しX11法を統計モデルで実現するための非線形X11力学系モデルおよびその変形ヴァージョンなどを導入する．またモデルベース的季節調整で大きな役割を持つ季節成分のダイナミックモデルとして3つの代表的モデル，タンデム型モデル，パラレル型モデル，動的BAYSEAモデル（Ozaki and Thomson (1992)）を議論する．続いて動的X11力学系モデルをデータに基づいて推定するための尤度と尤度計算の際必要となる非線形フィルターについて概説し効率的な局所線形フィルターを導入する．

2. X11的分解

ダイナミックX11モデルを考える前にまずShiskin et al. (1967)によって導入されたX11法の特徴をみてみよう．X11法の基本は与えられた月毎のデータ Y_t を

$$Y_t = T_t S_t I_t \tag{2.1}$$

のようにトレンド成分 T_t，季節成分 S_t，不規則成分 I_t の積に分解することである．トレンド成分 T_t に関しては月々の変化が滑らかであることを仮定する一方，季節成分 S_t の変化は毎年の変化があまりない，つまり一年前の月成分と今年の月成分があまり離れてなく滑らかに変化する．同時に12カ月の月ごとの成分を足したものが近似的に12であることを仮定する．不規則成分 I_t はシステマティックでない誤差で平均が1であることを仮定する．X11法を導入した当時Shiskin et al. (1967) は次のように言っている，「政府の経済統計時系列においては季節成分，トレンド成分，曜日効果成分，不規則成分，などは和のかたちでなく積のかたちで影響を与え関連し合っていることが経験的に示されている」．この見方は現在でも当たっていて，それは経験的にも裏付けられるが，世界の経済金融活動が，例えば複利の利子率のような相乗的(Multiplicative) な構造の上に立って動いていることからも理解される．

さてこのX11型の分解を他の非X11型統計モデルと比較するためにもうすこし詳しく見てみよう．季節成分は12カ月分足して12であることと不規則成分の平均が1であることを考慮して，始めから(2.1)の季節成分 S_t を改めて $(1+S_t)$ と置きなおし，不規則成分 I_t を $(1+I_t)$ と置きなおすとデータ Y_t は

$$Y_t = T_t\{1+S_t\}(1+I_t) \tag{2.2}$$

と書きなおすことができる．ここに S_t は

$$\sum_{j=1}^{12} e^{S_{t-j}} \approx 12 \tag{2.3}$$

I_t は

$$E[I_t]=0 \tag{2.4}$$

をみたす．したがって解釈の上では S_t は季節成分の部分の変動の効果の大きさのトレンド成分

に対する割合いを示す．また I_t は非システマティックなノイズ項，つまりデータ Y_t からシステマティックな項，$T_t\{1+S_t\}$ を差し引いた部分の大きさのシステマティックな項に対する割合いを示す．この場合 Y_t は

$$Y_t = T_t + T_tS_t + T_t\{1+S_t\}I_t \tag{2.5}$$

となり，トレンドと発展的 (Evolutionary) 季節成分と非等質的 (Heteroscedastic) ノイズ項の和として表される．

時系列モデルにもとづく季節調整法では相乗的 (Multiplicative) な季節変動時系列を扱う場合，標準的な方法はまず対数変換を施し次に加法的なトレンド成分，季節成分，不規則成分への分割をおこなう．しかしここで気をつけなければならないことは，対数変換の使用によってバイアス（というより乖離と呼んだほうが適当かも知れない）が生じることで，このバイアスは主として相加平均と相乗平均の違いによってもたらされる．どちらが真実でどちらがバイアスかはこの段階では主観的であるといわざるを得ないであろうが，X11 のユーザーを含む多くの季節調整関係者の間では X11 のトレンドが本物で対数変換による推定トレンドがバイアスのかかったトレンドであるとの認識が一般的である．この議論を客観的な比較の議論のレベルに押し上げる一つの方法は X11 法と実質的に等価な統計モデルを導入することである．統計的モデルどうしであればボルツマン-赤池エントロピーなどによる客観的比較の議論に乗せることができる．両者の構造の比較のために対数変換を用いる統計モデルによるデータ Y_t の表現を考えてみると，

$$Y_t = \exp\{T_t + S_t + I_t\}$$

のようになる．ここに S_t, I_t は(2.3)，(2.4)を満たし $\exp\{T_t\}$ が X11 法の T_t に対応する．このモデルの相乗的 (Multiplicative) 成分である $\exp\{S_t\}$ と $\exp\{I_t\}$ は一般に X11 法の $\{1+S_t\}$, $\{1+I_t\}$ に一致しないで以下のような不等式を満たしている，

$$\sum_{j=1}^{12} e^{S_{t-j}} \geq 12$$
$$E[e^{I(t)}] \geq 1 .$$

X11 法では不等号の部分が等号になる．統計的手法によって得られる推定量のバイアス(乖離)を修正して X11 法の基準に合わせる方法が Young (1968), Thomson and Ozaki (1992) らによって導入されている．たとえば Thomson and Ozaki (1992) は現在米国センサス局の新しい季節調整法の一部に取り入れられ利用されている．

X11 法のように対数変換をせず直接(2.2)や(2.5)のような分解をデータから求める場合は勿論上述の統計モデルの場合のようなバイアスの補正は必要がない．統計モデルの立場から X11 法的ユニークなトレンドを直接推定することを試みたのは Durbin and Murphy (1975) が最初であろう．彼らは以下のようなモデルを提案している，

$$Y_t = T_t + S_{1,t} + T_tS_{2,t} + I_t . \tag{2.6}$$

ここに $S_{1,t}, S_{2,t}, I_t$ は(2.3)(2.4)を満たし，$S_{1,t}$ の項は加法的季節成分を表し，$S_{2,t}$ は相乗的 (Multiplicative) な季節成分を表す．これは一種のハイブリッドモデルで $S_{1,t}=0$ の場合は純粋に加法的季節変動時系列，$S_{2,t}=0$ の場合は純粋に Multiplicative な季節変動時系列となる．しかし不規則ノイズ項は X11 法が非等質なノイズであるのに対してこのハイブリッドモデルでは等質なガウス白色ノイズになっている．

以上の X11 法独特のユニークなトレンドの考察は自然に以下の疑問を提起する，

1) $\exp\{T_t+S_t+I_t\}$ でなく $T_t+T_tS_t+T_t(1+S_t)I_t$ を採用することは統計的に正当化できるか？

2) 等質ノイズでなく非等質ノイズを使うことは統計的に正当化できるか？

この疑問への答えを得るための鍵をにぎっているのが次節で述べる力学系の概念である．

3. 非等質なノイズと X11 力学系

X11 法の中には時系列問題固有のダイナミックスを特定するようなモデルや計算処理などは現れない．X11 法は静的な季節調整法でありその基本はデータ Y_t のシステマティックな部分を $T_t+T_tS_t$ のように想定する．ここで次のような自然な考えが出る．$T(t), S(t)$ をそれぞれガウス白色ノイズによって駆動される確率力学系の出力とみて，データ Y_t はその 2 変数の非線形変換した状態変数

$$Z(t)=T(t)+T(t)S(t)$$

を観測したものであるとみなす．観測誤差 ε_t の存在を考慮すると以下のような表現をとる．

$$\begin{aligned} Y_t &= Z(t)+\varepsilon_t \\ &= T(t)+T(t)S(t)+\varepsilon_t \end{aligned}$$

ここで状態 $Z(t)$ の時間的変動を見てみよう．時間が t から $t+dt$ まで進んだとき $Z(t+dt)$ がどうなるかを見るには $T(t)$ と $S(t)$ が時間 $t+dt$ でどうなるかを見ればよい．

$T(t)$ を定義するシステムの次元は一般に 1 次元とは限らず多次元であるが，ここでは非等質的ノイズの存在がいかに妥当なものであるかを見るのが主な関心事であるから簡単のために 1 次元として話をすすめる．$T(t)$ は相乗的(Multiplicative)であることから，一般に対数変換したもの，$\log T(t)$，が以下のような等質的ガウス白色ノイズで駆動される連続時間モデルで表現できる，

$$\frac{d\log(T(t))}{dt}=f(\log T(t))+u(t)\,.$$

これを書き直すと

$$\frac{dT(t)}{dt}=f(\log T(t))T(t)+T(t)u(t)+\frac{1}{2}\sigma_u^2T(t)$$

となる．ただしここでは Ito 型確率解析をつかっている．Stratonovich 型確率解析では

$$\frac{dT(t)}{dt}=f(\log T(t))T(t)+T(t)u(t)$$

となる．両確率解析は出発点となるモデルがどちらの微分積分則によって定義されるかをはっきりさせさえすれば本質的に同じで，両者間の変換ルールも確立しており，どちらを使うかは我々の解析において本質的な問題ではない．また我々はしばしば離散時間モデルとの対応を考えて dt による増分表現でなく便宜的に d/dt による微分表現を使う．したがって $u(t)$ は連続時間白色ノイズ（ブラウン運動 $U(t)$ の便宜的微分表現）である．

$S(t)$ を定義するシステムの場合は当然多次元であり，多次元ガウス白色ノイズ $\boldsymbol{v}(t)$（ブラウン運動 $\boldsymbol{V}(t)$ の便宜的微分表現）で駆動される以下のような状態空間モデルで表現できる（具体的には後節で詳述する）．

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{s}/dt &= F\boldsymbol{s} + G\boldsymbol{v}(t) \\ S(t) &= H\boldsymbol{s}(t) \\ H &= (1, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

状態 $Z(t)$ は時間 $t+dt$ に進んだとき以下のようになる．

$$\begin{aligned} dZ(t) &= Z(t+dt) - Z(t) \\ &= dT(t)\{1+S(t)\} + T(t)dS(t) \\ &= \left[f\{\log T(t)\}T(t)dt + T(t)u(t)dt + \frac{1}{2}\sigma_u^2 T(t)dt\right]\{1+S(t)\} \\ &\quad + T(t)H\{F\boldsymbol{s}(t)dt + G\boldsymbol{v}(t)dt\} \\ &= \left[f\{\log T(t)\}T(t)dt + \frac{1}{2}\sigma_u^2 T(t)dt\right]\{1+S(t)\} + T(t)HF\boldsymbol{s}(t)dt \\ &\quad + T(t)\{1+S(t)\}u(t)dt + T(t)HG\boldsymbol{v}(t)dt \end{aligned}$$

ここでわかるように $Z(t+dt)$ の中に非等質的ノイズ項

$$T(t)\{1+S(t)\}u(t)dt$$

と

$$T(t)HG\boldsymbol{v}(t)dt$$

が現れる．離散時間で考えると固定したサンプリング間隔 Δt に対してこれは

$$\begin{aligned} Z(t+\Delta t) = (\text{regular part}) &+ \sqrt{\Delta t}\,T(t)\{1+S(t)\}\delta U(t+\Delta t) \\ &+ \sqrt{\Delta t}\,T(t)HG\delta \boldsymbol{V}(t+\Delta t) \end{aligned}$$

となる．ここで $\delta U(t+\Delta t)$ はブラウン運動 $U(t)$ の増分，$U(t+\Delta t)-U(t)$, $\delta\boldsymbol{V}(t+\Delta t)$ はブラウン運動 $\boldsymbol{V}(t)$ の増分，$\boldsymbol{V}(t+\Delta t)-\boldsymbol{V}(t)$，である．データ $Y_{t+\Delta t}$ は $Z(t+\Delta t)$ と観測誤差 $\varepsilon_{t+\Delta t}$ の和であるから，たとえ観測誤差が等質的ノイズであっても，そしてトレンドと季節変動の部分のノイズ $\delta U(t+\Delta t)$ と $\delta\boldsymbol{V}(t+\Delta t)$ が本来等質的ガウス白色ノイズであっても，その非線形なダイナミックスの構造の故に非等質的ノイズとして観測データ $Y_{t+\Delta t}$ の中に現れることが理解される．

以上の考察からわかることは，X11 法のようなトレンドと季節成分の組み合わせ $T+TS$ を考えるなら Durbin and Murphy (1975) のモデルは中途半端でノイズ部分は非等質的ノイズでなければならないことがわかる．我々の本論文における目的の一つはこの X11 法の考えを取り入れた Durbin and Murphy (1975) の均衡的静的モデリングのアプローチを力学系を取り入れたダイナミックなアプローチへさらに発展させることである．

4. X11 力学系の状態空間表現

X11 の考えを推し進めていくと Durbin and Murphy (1975) のような静的なモデルでなく動的モデルが必要であることがわかった．X11 法の動的モデルとして以下のような二つの表現，対数変換した $y_t=\log Y_t$ でのモデル表現とオリジナルのデータ Y_t に対する表現，が可能であることも前節までの考察から明らかになった．

i) 対数空間表現

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\log(T(t))}{dt}=f(\log T(t))+u(t) \\ \dfrac{d\boldsymbol{s}(t)}{dt}=F\boldsymbol{s}(t)+Gv(t) \\ y_t=\log T_t+\log\{1+H\boldsymbol{s}_t\}+\varepsilon_t \end{cases}
$$

ii) オリジナル空間表現

$$
\begin{aligned}
&\frac{dT(t)}{dt}=f(\log T(t))T(t)-(1/2)\sigma_u^2T(t)+T(t)u(t)\\
&\frac{d\boldsymbol{s}(t)}{dt}=F\boldsymbol{s}(t)+G\boldsymbol{v}(t)\\
&Y_t=T_t(1+H\boldsymbol{s}_t)+\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

相乗的季節時系列のモデル化に際して DECOMP などのすべての動的統計モデルは対数変換した空間で動的モデルをたてて議論しているので，比較のために以後 i) の対数変換空間での動的 X11 モデルとその実用化を考えていくことにする．

(4.1)のモデルの ε_t は状態変量 $T(t)$ や $\boldsymbol{s}(t)$ と独立な白色観測ノイズ．このモデルの構造 ($f(\cdot)$, F や G のかたちを規定するパラメター，3つのノイズ項，$u(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, ε_t を規定するパラメター) が与えられればこの状態空間モデルは完全に定義されるため，これらをデータから求めることが統計的季節調整の本質的に重要な課題となる．(4.1)の特徴的なところは非線形な観測方程式の部分で，この非線形性のゆえにトレンドや季節部分の動的モデルが線形でも通常の線形カルマンフィルターが使えず有効な非線形フィルターが必要となる．この点については後で節を改めて再び議論する．

5. 離散時間状態空間モデル

前記モデル(4.1)のような多次元連続時間状態空間モデルがある場合，基本的には連続時間モデルを離散化してその近似離散時間状態空間モデルを利用することによって離散時間非線形状態空間モデルの問題に持ち込み，非線形フィルターを使うことによってモデルの同定，同定したモデルを使った状態の予測，フィルター，平滑化が可能である．具体的には以下のような連続時間状態空間モデル

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{z}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})+G\boldsymbol{w}(t)\\
&y_t=h\{\boldsymbol{z}(t)\}+\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

がある場合，離散化によって離散時間状態空間モデル

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{z}_{t+\Delta t}=F_d(\boldsymbol{z}_t)\boldsymbol{z}_t+G_d(\boldsymbol{z}_t)\boldsymbol{w}_{t+\Delta t}\\
&y_t=H_d(\boldsymbol{z}_t)\boldsymbol{z}_t+\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

を導く．したがって問題は連続時間空間でのトレンドのダイナミックスのモデリングと季節成分のダイナミックスのモデリングの部分と離散化したモデルの非線形フィルターの問題に帰着される．

一般には離散的な時系列データから連続時間モデルを推定することは，状態変数 $\boldsymbol{z}(t)$ と観測される変数 y_t が一致する場合でも，困難な問題であることが認識されていて，多くの統計学者はこの問題を避けて通るが尤度法と離散近似モデルを組み合わせることによって実際には可能

で，尤度計算に必要とする数値計算も比較的単純である．Shoji and Ozaki (1996) はスカラー変数で観測誤差がない場合，したがって状態変数と観測される変数が同一の場合に，連続時間状態空間モデルを離散時間状態空間モデルでおきかえてもパラメター推定が実際効率よくできることを数値例で示した．しかし観測される変数の次元が状態変数の次元より小さい場合つまりモデルの中の一部の変数が観測されていない場合はこの方法はそのままでは使えない．特に状態のダイナミックスが非線形の場合は離散化の方法によってはフィルターの計算が発散するためにこのアプローチによる多次元非線形フィルターは困難を極めることが知られている．Ozaki (1992b), Ozaki et al. (1996) は局所線形化フィルターの性質を利用してこの計算不安定性の問題をクリアーし離散時間化したモデルを状態空間モデルと組み合わせて使ってパラメター推定が最尤法によって効率よくできることを示した．したがって季節調整の問題でも最初からパラメトリック連続時間モデルを立ててそれを離散化の手法を使って離散時間モデルにし，パラメターを推定し，その推定モデルを用いて状態変数のトレンドや季節成分のフィルター値，平滑値を求めることは可能で (Ozaki and Thomson (1992) 参照)，データのサンプリングの有り様によっては今後有効な場合が出て来るであろう．しかしここではより漸進的なアプローチをとって，上記 X11 モデルのシステム方程式の部分，つまりトレンドのモデルと季節成分のモデルを季節調整の分野でよく知られた典型的な離散時間モデルで置き換えたものを考え，そしてそれを力学的概念を使ってさらに動的 X11 モデルの構造の中に埋め込むことを考えてみる．

力学的概念の有効さは動的 X11 の導出にとどまらない．トレンド成分もそれ自身がある力学系によって生成されると考えて種々のダイナミックモデルを考えることができる．季節成分も結局は周期的変動が生成するものであるから周期的変動を生成する色々の異なる力学系によってさまざまな表現が可能であり既存の季節モデルに固執しなければならない理由などない．動的 X11 の構造の中に多様な季節成分のモデルを埋め込むことによってより洗練された季節調整の可能性がひろがる．これを見るために以下に 3 つの代表的離散時間季節モデル，タンデム型，パラレル型，動的 BAYSEA 型を導入し動的 X11 モデル構造の中に組み込む．

5.1 タンデム型

季節成分の離散時間モデルの代表的なものは

$$S_t = -S_{t-1} - \cdots - S_{t-11} + v_t \tag{5.1}$$

である．v_t は分散 σ_v^2 のガウス白色ノイズ．B-オペレーターを使ってこれを書きなおすと

$$(1+B+B^2+\cdots+B^{11})S_t = v_t$$

となる．ここに $B^iS_t = S_{t-i}$. このタイプの季節モデルは Box et al. (1978) で議論されたのがおそらく初めてであろう．その後 Akaike and Ishiguro (1980) や Kitagawa and Gersch (1984) でベイズモデルとして頻繁に用いられるようになった．(5.1)式を書きなおすと

$$(1-\sqrt{3}B+B^2)(1-B+B^2)(1+B^2)(1+B+B^2)(1+\sqrt{3}B+B^2)(1+B)S_t = v_t$$

となる．つまりこれは力学的立場から見ると，周期 12 カ月とその調和周期成分を生成する全部で 6 つのシステムを直列的にならべたタンデム型システムに，入力としてガウス白色ノイズ $v(t)$ を入れたときの出力 $S(t)$ を周期成分とみなしていることに相当する．一般に周期 $T_1, T_2, \ldots, T_k$ を含む季節時系列の場合 $\omega=\pi$ で $\cos\omega=-1$ となるので $(1+2B+B^2)=(1+B)^2$ と重根になるためこの場合のみこれを $(1+B)$ で置き換える．

連続時間で書くと微分オペレータ D を使って以下のような $2k$ 階微分方程式で定義される力

学系がノイズによって駆動される形になる，

$$(D^2+\omega_1)(D^2+\omega_2)\cdots(D^2+\omega_k)S(t)=v(t).$$

言うまでもなく上のオペレータの各成分，$(D^2+\omega_i)$ は周期 $T_i=2\pi/\omega_i$ の調和振動系を生成する微分オペレーターに相当し $(D^2+\omega_i)S(t)=0$ は

$$d^2S(t)/dt^2=-\omega_i S(t)$$

を意味している．

このタンデム型季節成分モデルを最も代表的で単純なトレンドのダイナミックモデルである定数項付きランダムウオークモデルと組み合わせて(5.1)の動的 X11 モデル構造に組み込むと状態空間表現，

$$\text{(5.2)}\qquad \begin{cases} \log T_t=\log T_{t-1}+u_0+u_t \\ \boldsymbol{s}_t=F_s\boldsymbol{s}_{t-1}+G_s\boldsymbol{v}_t \\ y_t=\log T_t+\log(1+H\boldsymbol{s}_t)+\varepsilon_t \end{cases}$$

を得る．ここに $\boldsymbol{s}_t$ は $\boldsymbol{s}_t=(S_t, S_{t-1}, S_{t-2},\ldots, S_{t-10})'$, $\boldsymbol{v}_t$ は $\boldsymbol{v}_t=(v_t, 0, 0,\ldots, 0)'$, F_s, G_s, H は

$$F_s=\begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_s=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0]'$$

$$H=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0].$$

観測式を線形な

$$y_t=\log T_t+H\boldsymbol{s}_t+\varepsilon_t$$

に置き換えるとこれは DECOMP で使われている典型的な形と同等になる．

5.2　パラレル型

12カ月周期変動を表す場合，各部分周期成分を生成する振動系をタンデムに並べるのでなくパラレルに並べてその各システムの出力 $S_{i,t}$ $(i=1,\ldots,6)$ を合わせたものを周期成分と考えることもできる．この場合，6個の各季節成分のシステムはそれぞれ別の入力ノイズ $v_{i,t}(i=1,\ldots,6)$ を持ち，したがって離散モデルで書くと

$$\begin{aligned} S_{1,t}&=2\cos\omega_1 S_{1,t-1}-S_{1,t-2}+v_{1,t} \\ S_{2,t}&=2\cos\omega_2 S_{2,t-1}-S_{2,t-2}+v_{2,t} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{5,t}&=2\cos\omega_5 S_{5,t-1}-S_{5,t-2}+v_{5,t} \\ S_{6,t}&=-S_{6,t-2}+v_{6,t} \end{aligned}$$

$$\text{(5.3)}\qquad S_t=S_{1,t}+\cdots+S_{6,t}.$$

ただし周期が2のシステムは2次の AR のかわりに固有根がマイナス1の1次の AR モデル

で置き換えてある．これに似たパラレル型の季節モデルは Ameen and Harrison (1985) でも Harvey (1985) の線形季節調整モデルでもすでに取り入れられている．

パラレル型の季節モデルを動的 X11 構造に組み込む時は機械的にタンデム型の形を踏襲するのでなくその意味を原点に戻って再考する必要がある．季節成分がパラレルに独立に変動する場合はそれらの成分が独立にトレンドに相乗的に組み合わさると考えることは自然である．具体的には

$$T_t\{1+S_{1,t}+S_{2,t}+\cdots+S_{6,t}\}\{1+I_t\}$$

のようにではなく

$$T_t\{1+S_{1,t}\}\{1+S_{2,t}\}\cdots\{1+S_{6,t}\}\{1+I_t\}$$

のような形をとる．これを対数変換空間での観測式で書き直してみると

$$\log T_t+\sum_{i=1}^{6}\log(1+S_{i,t})+\varepsilon_t$$

となる．これを定数付きランダムウオークトレンドモデルと組み合わせると以下のような動的 X11 状態空間モデルを持つ．

$$(5.4)\qquad \begin{cases}\log T_t=\log T_{t-1}+u_0+u_t\\ \boldsymbol{s}_t=F_s\boldsymbol{s}_{t-1}+G_s\boldsymbol{v}_t\\ Y_t=\log T_t+\sum_{i=1}^{6}\log(1+S_{i,t})+\varepsilon_t\end{cases}$$

ここに $\boldsymbol{s}_t$ は

$$\boldsymbol{s}_t=(S_{1,t},\ S_{1,t-1},\ S_{2,t},\ S_{2,t-1},\ldots,\ S_{5,t},\ S_{5,t-1},\ S_{6,t})$$

で $\log T_t$ とあわせて 12 次元の状態変数を構成し，$\boldsymbol{v}_t$ は

$$\boldsymbol{v}_t=(v_{1,t},\ v_{2,t},\ldots,\ v_{5,t},\ v_{6,t})$$

の 6 次元ガウス白色ノイズである．F_s, G_s, H は

$$F_s=\begin{bmatrix}F_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & F_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & F_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_6\end{bmatrix},$$

$$G_s=[1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1\ \ 0\ \ 1]',$$

$$H=[1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1\ \ 0\ \ 1],$$

$F_j\,(j=1,2,\ldots,5)$ は

$$F_j=\begin{bmatrix}2\cos\omega_j & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

F_6 は $F_6=-1$.

5.3 動的 BAYSEA 型

上記二つの代表的季節モデルはどれも白色ノイズを入力として持つが，これを白色でなく色

付き，特にピンクノイズを入力として持つ振動系に拡張することができる．タンデム型の場合とくにその効果が顕著な相違をもたらす．ピンクノイズとして1次のARモデルの出力を使うことにして，このモデルを明示的に書くと

$$(1+B+B^2+B^3+\cdots+B^{11})S_t=r_t$$
$$r_t=\phi r_{t-1}+v_t\,,\qquad 0\le\phi\le 1$$

これを書き直すと

$$(1-\phi B)(1+B+B^2+B^3+\cdots+B^{11})S_t=v_t \tag{5.5}$$

となる．面白いのはこれがAkaike (1981), Akaike and Ishiguro (1980) のベイズ季節調整法BAYSEAのダイナミック版になっている点である．BAYSEAではベイズ的立場から2つの制約，

$$S_t+S_{t-1}+\cdots+S_{t-11}=\delta_{1,t}\ \text{が小さい},\tag{5.6}$$

と

$$S_t-S_{t-12}=\delta_{2,t}\ \text{が小さい},\tag{5.7}$$

に関する事前分布モデルを考えている．これにたいしモデル(5.5)では次の関係があるため，

$$\begin{aligned}&(1-\phi B)(1+B+B^2+B^3+\cdots+B^{11})S_t\\&\quad=(1-\phi)(1+B+B^2+B^3+\cdots+B^{11})S_t+\phi(1-B^{12})S_t\\&\quad=v_t\end{aligned}$$

ここで $\phi=0$ の時は(5.6)のみが強調され $\phi=1$ の時は(5.7)のみが強調されることになる．つまりこのモデルでは ϕ が二つの制約の間のバランスを制御するパラメターになっていてBAYSEAのオリジナルのアイデアを動的モデルの中に実現している．このことから以後我々はこれを動的BAYSEAモデルと呼ぶことにする．

一般にDECOMPはこのBAYSEAのベイズ的滑らかさの事前分布のアイデアを状態空間モデルで実現したものでBAYSEAのダイナミック版と受けとめられているが，そこではBAYSEAの2番目の制約が抜け落ちている．DECOMP型統計モデルから得られる季節成分はBAYSEAと比べて動きが固いと言う人達がいる．官庁統計の処理でセンサス局のX11法を使いなれている人達の間にとくにこのような考えを持っている人達が多くみられる．この原因はこの2番目の制約をDECOMPで落としていることにある．DECOMPの白色ノイズの替わりにピンクノイズを使えばこのような季節成分の動きの固さは緩められる場合が多い．この点は尾崎 (1997) の中で数値例によって明瞭に示される．この動的BAYSEA季節モデルとX11タンデム型モデル(5.2)で使われた代表的なトレンドモデルを動的X11状態空間モデルの枠組みで組み合わせると以下の表現を持つ．

$$\log T_t=\log T_{t-1}+u_0+u_t$$
$$\boldsymbol{s}_t=F_s\boldsymbol{s}_{t-1}+G_s\boldsymbol{v}_t$$
$$y_t=\log T_t+\log(1+H\boldsymbol{s}_t)+\varepsilon_t$$

ここに F_s, G_s, H は各々 12×12, 12×1, 1×12 の行列で

$$F_s=\begin{bmatrix} \phi-1 & \phi-1 & \cdots & \phi-1 & \phi \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_s=[1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]'$$

$$H=[1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0].$$

6. 状態空間表現の変換

前節までに見てきたように X11 型のトレンド，季節成分の表現はデータを対数変換した空間では線形の状態方程式と非線形の観測方程式によって実現される．線形なモデリングから非線形なモデリングの世界に我々の活動範囲をひろげる時，必然的に変数変換が状態変数のダイナミックなモデリングと同程度に重要な位置を占め始めることは 10 年以上前から Ozaki (1985) によって示されている．非線形季節調整の可能性とその将来の発展の方向をしめすことは本論文の主目的の一つでもあり，本節では動的 X11 モデルの実現が上記の線形状態式，非線形観測式だけでなく，別の表現によっても実現可能であることを具体的に見てみたい．

いま状態変数のダイナミックスが線形で観測式が状態の非線形関数である場合で

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{z}_t=F\boldsymbol{z}_{t-1}+G\boldsymbol{w}_t \\ y_t=h(\boldsymbol{z}_t)+\varepsilon_t \end{cases}$$

のようなかたちをしている時，これを新しい変数 $\boldsymbol{\xi}_t=(h(\boldsymbol{z}_t), \xi_{2,t},\ldots, \xi_{k,t})'$ を使って

$$(6.2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\xi}_t=\Phi(\boldsymbol{\xi}_{t-1})\boldsymbol{\xi}_{t-1}+\Gamma(\boldsymbol{\xi}_{t-1})\boldsymbol{w}_t \\ y_t=H\boldsymbol{\xi}_t+\varepsilon_t \end{cases}$$

のような表現に帰着させることが考えられる．ここに H は定数の $1\times k$ 観測行列．つまりここでは(6.1)の状態線形，観測非線形な表現にたいし(6.2)では観測線形，状態非線形になっている．このような第二の表現によって動的 X11 モデルによる季節調整にどのような影響，違いが出るかは実用的見地から興味ある問題である．これを以下に考えてみる．

連続時間の状態空間モデルの場合を考えると話は簡単である．いまモデルが

$$d\boldsymbol{z}(t)/dt=f(\boldsymbol{z}(t))+G(\boldsymbol{z}(t))\boldsymbol{w}(t)$$
$$y_t=h(\boldsymbol{z}_t)+\varepsilon_t$$

であったとすると新しい状態変数 $\xi(t)=h(\boldsymbol{z}(t))$ のダイナミックスは伊藤の確率解析の公式により

$$(6.3)\qquad \frac{d\xi(t)}{dt}=\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{z}}f(\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial z_j}[G(\boldsymbol{z})G(\boldsymbol{z})']_{ij}+\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{z}}G(\boldsymbol{z})\boldsymbol{w}(t)$$

であるから(6.3)の右辺の z を $\xi_1(t)=h(z(t))$ を使って例えば $\boldsymbol{\xi}(t)=(\xi_1(t), z_2(t), z_3(t),\ldots, z_k(t))'$ で書き直すと適当な非線形関数のベクトル $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi})$，非線形関数の行列 $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ を使って

$$(6.4)\qquad \frac{d\boldsymbol{\xi}(t)}{dt}=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi})+\Gamma(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{w}(t)$$

の形になる．ここでは離散モデルとの対応を考えて dt による増分表現でなく便宜的な d/dt による微分表現を使う．したがって $\boldsymbol{w}(t)$ は連続時間白色ノイズ（ブラウン運動の便宜的微分表現）である．(6.4)を局所線形化法やルンゲクッタ法などの適当な離散化手法を使って離散時間モデルを導きそれを観測式

$$y_t = \xi_t + \varepsilon_t$$

と組み合わせることによって基本的には求める離散時間状態空間表現が得られる．

しかしここでは一気にこのような一般的アプローチをとることをせず，前節と同じような漸進的アプローチをとって，代表的離散時間モデルの観測式の $\log(1+S)$ を変数 η で置き換えた場合，離散時間状態モデルをどう修正するのが妥当かを具体的に 3 つの動的 X11 モデルについて考えてみることにする．

まずタンデム型を考える．連続時間季節モデルでは季節成分 S は $S=H\boldsymbol{s}=(1,0,\ldots,0)\boldsymbol{s}$, $d\boldsymbol{s}=F\boldsymbol{s}+G\boldsymbol{v}(t)$, F は 11×11 の遷移行列，G は 11×1 行列，v は分散 σ^2 の 1 次元ガウス白色ノイズである．したがって $\eta=\log(1+S)=\log(1+H\boldsymbol{s})$，のダイナミックスは

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= \frac{\partial \log(1+S)}{\partial S} dS + \frac{\sigma_n^2}{2}\frac{\partial^2 \log(1+S)}{\partial S^2} dt \\ &= \frac{\partial \log(1+S)}{\partial S} H d\boldsymbol{s} + \frac{\sigma_n^2}{2}\frac{\partial^2 \log(1+S)}{\partial S^2} dt \end{aligned}$$

となる．ここでは η の増加分 $d\eta$ が S の増加分 $dS=Hd\boldsymbol{s}$ で表されており，その離散時間でのワンステップでの増加分 $\Delta\eta$ は次のように考えるのが自然であろう．

$$\Delta\eta \approx \frac{1}{(1+S)}\Delta S - \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{(1+S)^2}$$

ここに σ^2 は白色ノイズ $v(t)$ の分散．次にこれから離散時間モデルの導出を考えるわけであるが，我々は一般的離散化法を適用する替わりに前述の漸進的アプローチをとる．DECOMP で使われているタンデム型離散時間季節モデルでは増加分 ΔS_t は

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= S_t - S_{t-1} \\ &= (-S_{t-1} - S_{t-2} - \cdots - S_{t-11}) + v_t - S_t \end{aligned}$$

したがって $\eta(t)$ の増加分 $\Delta\eta_t$ は

$$\Delta\eta_t = \frac{1}{(1+S_t)}(-2S_{t-1} - S_{t-2} - \cdots - S_{t-11}) - \frac{\sigma^2}{2(1+S_{t-1})^2} + \frac{1}{(1+S_{t-1})} v_t .$$

これから以下のような η_t の非線形離散ダイナミックス表現を得る．

$$\begin{aligned} \eta_t = \eta_{t-1} &+ \frac{1}{1+f(\eta_{t-1})}\{-2f(\eta_{t-1}) - f(\eta_{t-2}) - \cdots - f(\eta_{t-11})\} \\ &- \frac{\sigma^2}{2\{1+f(\eta_{t-1})\}^2} + \frac{1}{1+f(\eta_{t-1})} v_t \end{aligned}$$

ここに v_t は分散 σ^2 のガウス白色ノイズ．また $f(\eta_{t-i})=\exp(\eta_{t-i})-1$ でこれはいうまでもなく $\eta_{t-i}=\log(1+S_{t-i})$ から導かれる．これから η_t にたいして状態変数 ζ_t を用いた以下のような変形非線形状態空間表現を得る．

$$(6.5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{\zeta}_t = F_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})\boldsymbol{\zeta}_{t-1} + G_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})\boldsymbol{v}_t \\ &\eta_t = (1,0,\ldots,0)\boldsymbol{\zeta}_t \end{aligned} \right.$$

ここに $\boldsymbol{\zeta}_t$ は $\boldsymbol{\zeta}_t=(\eta_t, \eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \ldots, \eta_{t-10})'$, $\boldsymbol{v}_t$ は $\boldsymbol{v}_t=(v_t, 0, 0,\ldots, 0)'$, $F_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})$, $G_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})$ はそれぞれ 11×11, 11×1 行列で,

$$
(6.6)\quad \begin{cases}
F_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=\begin{bmatrix} a_{1,1}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) & a_{1,2}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) & \cdots & a_{1,10}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) & a_{1,11}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
G_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=[\exp(-\eta_{t-1}), 0,\ldots, 0]' \\
a_{1,1}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=1-2\exp(-\eta_{t-1})\{\exp(\eta_{t-1})-1\}/\eta_{t-1}-\dfrac{\sigma^2}{2}\exp(-2\eta_{t-1})/\eta_{t-1} \\
a_{1,i}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=-\exp(-\eta_{t-1})\{\exp(\eta_{t-i})-1\}/\eta_{t-i} \qquad (i=2, 3,\ldots, 11).
\end{cases}
$$

この変形 X11 タンデム型季節成分モデル(6.5)をトレンドの最も代表的で単純なモデルである定数付きランダムウオークモデルと組み合わせて(4.1)の動的 X11 モデル構造に組み込むと状態空間表現,

$$
\begin{aligned}
&\log T_t=\log T_{t-1}+u_0+u_t \\
&\boldsymbol{\zeta}_t=F_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})\boldsymbol{\zeta}_{t-1}+G_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})\boldsymbol{v}_t \\
&y_t=\log T_t+H\boldsymbol{\zeta}_t+\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

を得る. $\boldsymbol{\zeta}_t$ の状態式の F_d, G_d を線形なタンデム型の定数行列で置き換えるとこれは DECOMP で使われている典型的な表現と同等になる.

同様な考えで動的 BAYSEA の変形 X11 型の非線形状態空間表現を以下のように得る.

$$
\begin{aligned}
&\log T_t=\log T_{t-1}+u_0+u_t \\
&\boldsymbol{\zeta}_t=F_d(\boldsymbol{\zeta}_t)\boldsymbol{\zeta}_t+G_d(\boldsymbol{\zeta}_t)\boldsymbol{v}_t \\
&y_t=\log T_t+H\boldsymbol{\zeta}_t+\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

ここに $\boldsymbol{\zeta}_t$ は $\boldsymbol{\zeta}_t=(\eta_t, \eta_{t-1}, \eta_{t-2},\ldots, \eta_{t-11})'$, $\boldsymbol{v}_t$ は $\boldsymbol{v}_t=(v_t, 0, 0,\ldots, 0)'$ で v_t は分散 σ^2 のガウス白色ノイズ. F_d, G_d, H はそれぞれ 12×12, 12×1, 1×12 行列で以下によって与えられる.

$$
F_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=\begin{bmatrix} a_{1,1}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) & a_{1,2}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) & \cdots & a_{1,11}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) & a_{1,12}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=[\exp(-\eta_{t-1}), 0,\ldots, 0]' \\
&\quad a_{1,1}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=1-\exp(-\eta_{t-1})(2-\phi)\{\exp(\eta_{t-1})-1\}/\eta_{t-1}-\frac{\sigma^2}{2}\exp(-2\eta_{t-1})/\eta_{t-1} \\
&\quad a_{1,i}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=-\exp(-\eta_{t-1})(1-\phi)\{\exp(\eta_{t-i})-1\}/\eta_{t-i} \qquad (i=2, 3,\ldots, 11) \\
&\quad a_{1,12}(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})=-\exp(-\eta_{t-1})\phi\{\exp(\eta_{t-12})-1\}/\eta_{t-12}
\end{aligned}
$$

$$
H=(1, 0,\ldots, 0).
$$

パラレル型の場合も基本的に同じ考え方で以下のような変形 X11 パラレル状態空間表現を得る.

$$
\begin{aligned}
&\log T_t=\log T_{t-1}+u_0+u_t\\
&\boldsymbol{\zeta}_t=F_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})\boldsymbol{\zeta}_{t-1}+G_d(\boldsymbol{\zeta}_{t-1})\boldsymbol{v}_t\\
&y_t=\log T_t+H\boldsymbol{\zeta}_{t-1}+\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

ここに $\boldsymbol{\zeta}_t$ は $\boldsymbol{\zeta}_t=(\eta_{1,t}, \eta_{1,t-1}, \eta_{2,t}, \eta_{2,t-1},\dots, \eta_{5,t}, \eta_{5,t-1}, \eta_{6,t})'$, $\boldsymbol{v}_t=(v_{1,t}, 0, v_{2,t}, 0,\dots, v_{5,t}, 0, v_{6,t})'$ で $v_{i,t}\,(i=1,2,\dots,6)$ は分散 σ_i^2 のガウス白色ノイズ．F_d, G_d, H は以下で与えられる．

$$
F_d=\begin{bmatrix}
F_1 & 0_{2\times2} & \cdots & 0_{2\times2} & 0_{2\times1}\\
0_{2\times2} & F_2 & \cdots & 0_{2\times2} & 0_{2\times1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0_{2\times2} & 0_{2\times2} & \cdots & F_5 & 0_{2\times1}\\
0_{1\times2} & 0_{1\times2} & \cdots & 0_{1\times2} & F_6
\end{bmatrix}
$$

$$
G_d=\begin{bmatrix}
\exp(-\eta_{1,t-1}) & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & \exp(-\eta_{2,t-1}) & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & \exp(-\eta_{5,t-1}) & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \exp(-\eta_{6,t-1})
\end{bmatrix}
$$

$$
H=[1\quad 0\quad 1\quad 0\quad \cdots\quad 1\quad 0\quad 1]
$$

$$
F_i=\begin{bmatrix} a_{1,1}^{(i)} & a_{1,2}^{(i)}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad (i=1,2,\dots,5)
$$

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}^{(i)}=&1+(2\cos\omega_i-1)\exp(-\eta_{i,t-1})\{\exp(\eta_{i,t-1})-1\}/\eta_{i,t-1}\\
&-\frac{\sigma_i^2}{2}\exp(-2\eta_{i,t-1})/\eta_{i,t-1}\qquad (i=1,2,\dots,5)\\
a_{1,2}^{(i)}=&-\exp(-\eta_{i,t-1})\{\exp(\eta_{i,t-2})-1\}/\eta_{i,t-2}
\end{aligned}
$$

$$
F_6=1-2\exp(-\eta_{6,t-1})\{\exp(\eta_{6,t-1})-1\}/\eta_{6,t-1}-\frac{\sigma_6^2}{2}\exp(-2\eta_{6,t-1})/\eta_{6,t-1}
$$

7. 計算手続き

ひとたびトレンドのダイナミックスと季節成分のダイナミックスの候補が特定できたら後は季節調整の計算手続きは大きく言って 2 つの問題に帰着される．一つは状態空間モデルの推定問題，もう一つは推定されたモデルを使った状態変数のフィルタリング，平滑化，予測である．したがって我々の動的 X11 型季節調整法は既存の統計モデルアプローチと何ら本質的に変わるところはない．その一般的計算手続き，アルゴリズム，を各段階に分けると次のようになる．

アルゴリズム

1. 力学的概念を利用してトレンドと季節成分の動的モデルの候補をいくつか導入する．
2. 各トレンドと季節成分の離散時間モデルを動的 X11 状態空間モデルに組み込む．
3. すべての候補モデルに関してそのパラメターをフィルター技法を使って（詳細は後の節

で述べる）最尤法によって推定する．
4. ボルツマンエントロピーの意味で最適なものを全ての候補モデルの中から選ぶ．
5. 選ばれたモデルを使って各時点のトレンド，季節成分のフィルター値を計算する．
6. 選ばれたモデルによるトレンド，季節成分のフィルター値を使って平滑値を計算する．
7. 必要なら選ばれたモデルによるフィルター値を初期値に使って予測値を計算する．

状態空間の当てはめが対数変換空間で行われている場合（いまの我々の場合がそうであるが）X11 法のトレンド推定結果と比較する為にはオリジナルデータ空間に変換して比較することが必要となる．我々のトレンドのフィルター推定値が $\log T_{t|t}$ の場合 $\exp(\log T_{t|t})$ が我々のオリジナル空間トレンド推定値となる．ここに $\log T_{t|t}$ は $E[\log T_t|\log Y_1, \log Y_2, \ldots, \log Y_t]$ のフィルター計算による推定値．平滑値の場合は $\exp(\log T_{t|N})$ である．ここに $\log T_{t|N}$ は $E[\log T_t|\log Y_1, \log Y_2, \ldots, \log Y_N]$ のフィルター計算による推定値．

季節調整法を行った結果をトレンド成分，季節成分，イレギュラー成分と三つの成分に分解して表示することが行われているが何をもって各成分の推定値とするかは明確ではない．とくにイレギュラーについてはそうである．データからトレンドと季節成分の推定値を差し引いた残りをイレギュラーと言うにしても，推定値として予測値をとるかフィルター値をとるか平滑値をとるかによって 3 通りのイレギュラーが定義できる．イレギュラーが白色か否かを季節調整法の妥当性の判定の基準の一つにする場合などはなおさら注意が必要である．一般に予測値に対応したイレギュラーは白色であるがそれをフィルターや平滑化で“いじった”後のイレギュラーが白色である保証などない．したがって平滑化に伴うイレギュラーのスペクトルが白色ノイズでないから季節調整モデルとして劣るというような議論には注意が必要である．

8. 尤度関数と条件付き分布

データ $y_1, y_2, \ldots, y_N$，にたいして（-2）倍の対数尤度は

$$(-2)\log p(y_1, y_2, \ldots, y_N, |\theta) = \sum(-2)\log p(y_k|y_{k-1}, \ldots, y_1, \theta)$$

で与えられ，モデルのマルコフ性を利用した条件付き密度関数 $p(y_k|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)$ の計算が尤度計算の主な仕事になる．これは観測機構に関する条件付き密度関数 $p(y_k|\boldsymbol{z}_k, \theta)$ と状態変数の予測に関する条件付き密度関数 $p(\boldsymbol{z}_k|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)$ を使って次のような表現をもつ，

$$p(y_k|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta) = \int p(y_k|\boldsymbol{z}_k, \theta)p(\boldsymbol{z}_k|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)d\boldsymbol{z}_k\,.$$

観測式が非線形の時は状態変数がガウスであってもガウスとは限らず $p(y_k|\boldsymbol{z}_k, \theta)$ は一般に非ガウスである．状態予測密度関数 $p(\boldsymbol{z}_k|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)$ はデータ予測密度関数 $p(y_k|y_{k-1}, \theta)$ と状態のフィルター密度関数 $p(\boldsymbol{z}_{k-1}|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)$ を用いて書き直すと

$$p(\boldsymbol{z}_k|y_{k-1}, \ldots, y_1, \theta) = \int p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{z}_{k-1}, \theta)p(\boldsymbol{z}_{k-1}|y_{k-1}, \ldots, y_1, \theta)d\boldsymbol{z}_{k-1}$$

となる．フィルター密度関数 $p(\boldsymbol{z}_{k-1}|y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)$ はベイズの定理から一ステップ前の観測密度関数 $p(y_{k-1}|\boldsymbol{z}_{k-1}, \theta)$ と状態予測密度関数 $p(\boldsymbol{z}_{k-1}|y_{k-2}, y_{k-3}, \ldots, y_1, \theta)$ を使って次のような表現を持つ．

$$p(\boldsymbol{z}_{k-1}|y_{k-1}, \ldots, y_1, \theta) = \frac{p(y_{k-1}|\boldsymbol{z}_{k-1}, \theta)p(\boldsymbol{z}_{k-1}|y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)}{\int p(y_{k-1}|\boldsymbol{\zeta}_{k-1}, \theta)p(\boldsymbol{\zeta}_{k-1}|y_{k-2}, \ldots, y_1, \theta)d\boldsymbol{\zeta}_{k-1}}$$

この関連する予測分布，観測分布，フィルター分布の間の帰納的関係は線形ガウスの場合のカ

ルマンフィルターの関係式に対応する非ガウスな場合へ一般化したものになっていることが知られている．この非ガウス密度関数の帰納的関係式は条件付き密度関数の間の確率的関係を明確にする上で役に立つが実際の条件分布の計算に関しては有効な方法などは何も示されない．カルマンフィルターの場合のような効率のよい計算法は一般には存在しない．初めて非ガウスフィルターを論じたものとしてはKushner (1962) を忘れてはならない．彼は連続時間の非ガウスマルコフ過程のフィルター式を導いたが基本的には離散時間で考えたものを極限操作で連続時間に持っていったものである．離散時間のフィルターの上記のようなベイズ的表現はHo and Lee (1964) がカルマンフィルターの解釈に使って以来Meditch (1967), Jazwinski (1970) などによりひろく知られていたが実際に数値積分近似を駆使して計算してみせたのはKitagawa (1987) が初めてであろう．

ここで上記の帰納的関係式で基本的役割を担っているのは二つの密度関数，すなわち状態予測密度関数，$p(z_k|z_{k-1},\theta)$，と観測密度関数，$p(x_k|z_k,\theta)$，であることに注目したい．非ガウスフィルターの議論の多くはガウスでなければ一般非ガウスという単純な二者択一の議論が多く見られる．ここで基本となる二つの密度関数をガウスからいきなり一般非ガウスにすると結局腕力勝負の膨大な数値積分をするしか方法は残されない状況におちいる．しかしここで強調しておきたいのはこの数値的積分アプローチは非ガウスフィルターの計算のために不可避であるということは何処からも出ては来ない．もっと簡単で効果的な方法が有り得ることは何処にも否定されていない．実は非ガウスフィルターの計算に付随する困難の回避の鍵はこの二つの基本分布の中に隠されていて，この二つの基本分布によりグローバルな非ガウス性の保存を図りながらいかにして同時にカルマンフィルターの効率的計算機構を温存するかを考えることが涙（数値積分）なしの解決につながる．筆者はこの考えにしたがって1980年代から，より“簡便 (Simple)”でより“速く (Speedy)”より“要領のいい (Smart)”第三の道が可能であることを種々の機会に非線形モデルの例を使って示してきたが一般にあまり理解されていないようである．本論文ではX11型非線形季節調整で（ガウスか一般非ガウスかの二者択一でなく）第3の道の“3S”の威力の一端を示すことにしたい．

9. 局所線形フィルター

我々が観測されない状態変数 ($\log T_t$ や S_t など) の推定を考えるとき推定の良さあるいは悪さの基準を何にするかは統計的にデリケートな問題に絡んでくる．この点の議論は他へ譲って（たとえばOzaki et al. (1997)）ここでは最もナイーヴな基準，つまり二乗誤差を小さくするという基準を採る．また一般的な非線形フィルターの問題の議論も他に譲ってここでは前節で見た三つのX11型非線形状態空間モデル，タンデム型，パラレル型，動的BAYSEA型のもの，つまり状態変数のダイナミックスは線形で観測式が非線形な以下のような状態空間モデルの非線形フィルターに話を限定する．

$$z_t = Fz_{t-1} + Gw_t$$
$$x_t = h(z_t) + \varepsilon_t$$

線形カルマンフィルターの場合にならってまず我々は状態の予測値 $z_{t|t-1}$ からフィルター値 $z_{t|t}$ をいかに導くかを考える．自然な考えは予測値 $z_{t|t-1}$ と予測誤差 ν_k から

$$z_{t|t} = z_{t|t-1} + K_k \nu_k$$

によってフィルター値 $z_{t|t}$ を出すという考えであろう．その際問題となるのはゲイン K_k をどうとればどういう意味で最適かという点である．我々はここでも線形のカルマンフィルターに

ならって trace $E[(z_t-z_{t|t})(z_t-z_{t|t})']$ を最小にするゲイン K_k を与えることにして先に進む．まず状態のフィルター推定誤差の分散共分散は以下のような近似表現を持つ．

$$
\begin{aligned}
&E[(z_k-z_{k|k})(z_k-z_{k|k})'] \\
&\quad =E[\{z_k-(z_{k|k-1}+K_k\nu_k)\}\{z_k-(z_{k|k-1}+K_k\nu_k)\}'] \\
&\quad =E[(z_k-z_{k|k-1}-K_k\nu_k)(z_k-z_{k|k-1}-K_k\nu_k)'] \\
&\quad =E[K_k\nu_k\nu_k'K_k'-2(z_k-z_{k|k-1})\nu_k'K_k'+(z_k-z_{k|k-1})(z_k-z_{k|k-1})'] \\
&\quad \approx E[K_k\nu_k\nu_k'K_k'-2(z_k-z_{k|k-1})\{(z_k-z_{k|k-1})'H_k'+\varepsilon_k\}K_k'+(z_k-z_{k|k-1})(z_k-z_{k|k-1})'] \\
&\quad =K_k\sigma^2_{k|k-1}K_k'-2P_kH_k'K_k'+P_k \\
&\quad \approx K_k\sigma^2_{k|k-1}K_k'-2P_kH(z_{k|k-1})'K_k'+P_k
\end{aligned}
$$

以上の $E[(z_t-z_{t|t})(z_t-z_{t|t})']$ の K_k による 2 次表現の導出に際し我々は次のような二つの近似を行っている，

1) $h(z_k)$ を区間 $-k$ で線形とみなし，ある定数 H_k で $h(z_k)=H_kz_k$ と表せるとする．したがってイノヴェーション ν_k は以下のような近似的表現を持つ，

$$\nu_k=y_k-H_kz_{k|k-1}=H_k(z_k-z_{k|k-1})+\varepsilon_k\,.$$

2) 区間 $-k$ で定数をとる行列 H_k を後で定義するある関数 $H(\cdot)$ を使って $H_k=H(z_{k|k-1})$ で近似する．

この近似では時点 $k-1$ から k に進む段階で定数 H_k が $H(z_{k|k-1})$ で与えられることからこれらの仮定は局所線形の仮定と呼ぶことが出来，したがってこの近似フィルターを局所線形フィルターと呼ぶことが適当であろう．

同じ名前が観測式が線形，状態のダイナミックスが非線形な場合の連続時間状態空間モデルのフィルターに Ozaki (1992a) で使われているが，両フィルターの背後にある考え方が同じ（“局所的に線形近似しながらイノヴェーションを小さくする”）であるということを考慮すると，両者を合わせた観測非線形，状態非線形な場合のフィルターを意味するものとして局所線形フィルターの名前を使うことが適当であろう（Ozaki et al. (1997) 参照）．したがってここで導入するフィルターはこの広い意味での局所線形フィルターの状態ダイナミックスが線形に制限された特別な場合に相当すると解釈できる．さらに前節末の“鍵をにぎる 2 つの基本分布”を思い起こせば，この広い意味の局所線形フィルターにおいては 2 つの基本分布を単純な線形モデルの時とは違う形のガウス分布によって近似しながら状態変数と観測される変数のグローバルな非ガウス性を実現し同時に線形カルマンフィルターの計算効率性を温存しようとしていることが理解されよう．さらに進んで状態予測に関する基本分布に“究極の白色ノイズ”といわれる Levy プロセスの増分を組み込むことによって局所的にも非ガウスで同時に計算効率的な局所線形フィルターに拡張できるが，これについての議論は長くなるので別の機会に譲る．

さて本題に戻って以上二つの局所線形の近似を採用する動機であるが，これはもちろんイノヴェーション（予測誤差）$\nu_k=y_k-H_kz_{k|k-1}$ の分散を出来るだけ小さくしようとの考えである．よく知られた拡張カルマンフィルターで使われるスキームでは

$$H_k=\left\{\frac{\partial h(z)}{\partial z}\right\}_{z=z_{k|k-1}}$$

が用いられるため $H_kz_{k|k-1}\neq h(z_{k|k-1})$ であるが後述の我々の方法では等号が成り立ち予測誤差にも改良がみられる．なぜイノヴェーションを小さくすることを目指すかの議論には尤度やエントロピーなどの確率論的説明が可能だがそれだけに留まらない認識論的議論を含む大きな問題にも関係するのでここでは深入りしない．

状態推定誤差のトレース trace $E[(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})']$ を最小にする状態推定値は最小分散推定値とよばれる．最小分散推定値 $\boldsymbol{z}_{k|k}$ は状態の条件付き密度分布 $p(\boldsymbol{z}_k|y_{k-1},\dots,y_1)$ がガウス，非ガウスにかかわらず常に条件付き平均 $E[\boldsymbol{z}_k|y_{k-1},\dots,y_1]$ に一致し，したがって不偏な推定値であることが知られている(例えば Jazwinski (1970), p. 149)．トレース trace $E[(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})']$ の近似量を最小にするゲイン行列 K_k には簡単な操作の後以下のようなかたちが得られる，

$$K_k=P_kH_k'\{H_kP_kH_k'+\sigma_\varepsilon^2\}^{-1}.$$

ここに

$$P_k=E[(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k-1})(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k-1})'].$$

この K_k を使って状態の推定誤差分散共分散行列 V_k は

$$\begin{aligned} V_k&=E[(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})'] \\ &\approx P_k-K_kH_kP_k \\ &=P_k-P_kH_k'(H_kP_kH_k'+\sigma_\varepsilon^2)^{-1}H_kP_k \\ &=P_k-P_kH_k(\boldsymbol{z}_{k|k-1})'\{H_kP_kH_k'+\sigma_\varepsilon^2\}^{-1}H_kP_k. \end{aligned}$$

P_k の時間発展は以下のような関係式によって支配される，

$$\begin{aligned} P_{k+1}&=E[(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k-1})(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k-1})'] \\ &=E[\{F(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})+G\boldsymbol{w}_{k+1}\}\{F(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})+G\boldsymbol{w}_{k+1}\}'] \\ &=FV_kF'+G\Sigma_wG'. \end{aligned}$$

時系列の予測誤差分散 $\sigma_{k|k-1}^2$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{k|k-1}^2&=E[\{y_k-H_k\boldsymbol{z}_{k|k-1}\}\{y_k-H_k\boldsymbol{z}_{k|k-1}\}'] \\ &\approx H_kE[\{F(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})+G\boldsymbol{w}_{k+1}\}\{F(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}_{k|k})+G\boldsymbol{w}_{k+1}\}']H_k'+\sigma_\varepsilon^2 \\ &=H_kP_kH_k'+\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

これから我々は以下のようなフィルターの帰納的スキームを得る，

$$(9.1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{z}_{k+1|k}=F\boldsymbol{z}_{k|k} \\ \boldsymbol{z}_{k|k}=\boldsymbol{z}_{k|k-1}+K_k\nu_k \\ \nu_k=y_k-H_k\boldsymbol{z}_{k|k-1} \\ K_k=P_kH_k'\{H_kP_kH_k'+\sigma_\varepsilon^2\}^{-1} \\ P_k=FV_kF'+G\Sigma_wG' \\ V_k=P_k-K_kH_kP_k \\ \sigma_{k|k-1}^2=H_kP_kH_k'+\sigma_\varepsilon^2. \end{cases}$$

残された問題は H_k を如何に与えるかである．まず簡単のために状態変数がスカラーの場合を考える．ここで我々は拡張カルマンフィルターの

$$H_k=\left\{\frac{\partial h(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}\right\}_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_{k|k-1}}$$

の替わりに $H_k=H(\boldsymbol{z}_{k|k-1})$,

$$H(\boldsymbol{z})=h'(0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}h^{(i+1)}(0)\boldsymbol{z}^i$$

を用いることにする．ここに $h'(0)$ は

$$h'(0)=\left\{\frac{\partial h(z)}{\partial z}\right\}_{z=0}$$

$h^{(i+1)}(0)$ は

$$h^{(i+1)}(0)=\left\{\frac{\partial^{(i+1)}h(z)}{\partial z^{i+1}}\right\}_{z=0}$$

非線形関数 $h(z)$ が解析的であるとすると

$$\begin{aligned} h(z)&=h(0)+h'(0)z+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}h^{(i+1)}(0)z^{i+1} \\ &=H(z)z+h(0). \end{aligned}$$

したがって $h(0)=0$ であるような解析的関数にたいしては H_k を関数 $H(\cdot)$ によって

$$H_k=H(z_{k|k-1})$$

と定義すると常に

$$H_k z_{k|k-1}=h(z_{k|k-1})$$

が満たされている．X11 力学系の場合は $h(0)=0$ であるがそれ以外の一般の $h(0)\neq 0$ であるような解析的関数 $h(\cdot)$ にたいしては時系列予測に関連する部分の式で $H_k z_{k|k-1}$ を $H_k z_{k|k-1}+h(0)$ で置き換える．したがって予測誤差 ν_k は

$$\nu_k=y_k-H_k z_{k|k-1}-h(0) \tag{9.2}$$

を用いる．つまりここでは H_k に限らず我々のフィルターのスキーム導入全体において予測誤差（イノヴェーション）を出来るだけ小さくするという立場が一貫してとられている．この点が拡張カルマンフィルターと我々の方法の違う点であり，実際にこの違いが状態推定の大きな違いとして現れることが後の数値例の節で示される．z が多次元の場合 $h(z)$ にたいして $H(z)z=h(z)$ となるような行列 $H(z)$ は一意に決まらないが，我々はここでも予測誤差を小さくするという原則の上に立って最終的に最も都合のよい行列 $H(z)$ の表現に到達することが出来る（たとえば X11 パラレル型のモデル(5.4)に対する我々の局所線形フィルターがこのような場合に相当する)．結局推定モデルの（-2）対数尤度は(9.2)から

$$\begin{aligned} &(-2)\log p(y_1, y_1,\dots, y_1|\theta) \\ &\quad=\sum(-2)\log p(y_k|y_{k-1},\dots, y_1, \theta) \\ &\quad=\sum(-2)\log p(\nu_k|y_{k-1},\dots, y_1, \theta) \\ &\quad=\sum\left[\log \sigma^2_{k|k-1}+\frac{\{y_k-h(z_{k|k-1})\}^2}{\sigma^2_{k|k-1}}\right]+N\log 2\pi \end{aligned}$$

ここに

$$\sigma^2_{k|k-1}=E[\nu_k]^2.$$

参 考 文 献

Akaike, H. (1981). Seasonal adjustment by Bayesian modeling, *J. Time Ser. Anal.*, **1**, 1-13.

Akaike, H. and Ishiguro, M. (1980). BAYSEA, A Bayesian seasonal adjustment program, *Comput. Sci. Monographs*, No. 13, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Ameen, J. R. M. and Harrison, P. J. (1985). Normal discount Bayesian models, *Bayesian Statistics 2* (eds.

J. M. Bernard, M. H. De Groot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith), 271-298, North-Holland, Amsterdam.

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Fransisco.

Box, G. E. P., Hillmer, S. C. and Tiao, G. C. (1978). Analysis and modeling of seasonal time series, *Seasonal Analysis of Economic Time Series* (ed. A. Zellner), 309-334, U.S. Dept. of Commerce, Bureau of the Census, Washington, D.C.

Cleaveland, R. B., Cleaveland, W. S., McRae, J. E. and Terpenning, I. (1990). STL: A seasonal-trend decomposition procedure based on Loess, *Journal of Official Statistics*, **6**(1), 3-73.

Durbin, J. and Murphy, M. J. (1975). Seasonal adjustment based on a mixed additive-multiplicative model, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, **138**, Part 3, 385-410.

Harvey, A. C. (1985). Trend and cycles in macroeconomic time series, *Journal of Business and Economics Statistics*, **3**(3), 216-227.

Ho, Y. C. and Lee, C. K. (1964). A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control, *IEEE Trans. Automat. Control*, **9**, 333-339.

Jazwinski, A. H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Kitagawa, G. (1981). A nonstationary time series model and its fitting by a recursive filter, *J. Time Ser. Anal.*, **2**, 103-116.

Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 1032-1064.

Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984). A smoothness priors state space approach to the modeling of time series with trend and seasonality, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 378-389.

Kushner, H. J. (1962). On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications, *J. SIAM Control, Ser. A*, **2**, 106-119.

Meditch, J. S. (1967). Orthogonal projection and discrete optimal linear smoothing, *J. SIAM Control*, **5**, 74-89.

Ozaki, T. (1985). Nonlinear time series models and dynamical systems, *Handbook of Statistics*, Vol. 5 (eds. E. J. Hannan, P. R. Krishnaiah and M. M. Rao), 25-83, North Holland, Amsterdam.

Ozaki, T. (1992a). A local linearization approach to nonlinear filtering, *Internat. J. Control*, **57**(1), 75-96.

Ozaki, T. (1992b). Identification of nonlinearities and non-Gaussianities in time series, *New Directions in Time Series Analysis, Part I*, IMA Volume 45, 227-264, Springer, New York.

尾崎 統(1997). 動的 X11 モデルと非線形季節調整II—解析例と考察—, 統計数理, **45**(2), 287-300.

Ozaki, T. and Thomson, P. J. (1992). A dynamical system approach to X-11 type seasonal adjustment, Research Memo., No. 498, the Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Ozaki, T., Jimenez, J. C. and Ozaki-Haggan, V. (1996). The role of likelihood function in the estimation of chaos models, Tech. Report 1996/11, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Statistical Science.

Ozaki, T., Valdes-Sosa, P. and Ozaki-Haggan, V. (1997). Reconstructing nonlinear Dynamics from time series: with application to epilepsy data analysis, Tech. Report 1997/02, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Statistical Science.

Shiskin, J., Young, A. H. and Musgrave, J. C. (1967). The X-11 variant of the Census method II seasonal adjustment Program, Tech. Report 15, U.S. Dept. of Commerce, Bureau of the Census, Washington, D.C.

Shoji, I. and Ozaki, T. (1996). Comparative study of estimation methods for a continuous time stochastic process, Research Memo., No. 561, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (to appear in *J. Time Ser. Anal.*).

Thomson, P. J. and Ozaki, T. (1992). Transformation and Seasonal Adjustment, Research Memo., No. 491, the Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Young, A. H. (1968). Linear approximation to the Census and BLS seasonal adjustment methods, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **63**, 445-471.

Dynamic X11 Model and Nonlinear Seasonal Adjustment I: Models and Computational Methods

Tohru Ozaki

(The Institute of Statistical Mathematics)

A new statistical method for seasonal adjustment of multiplicative seasonal series is presented. In the method we introduce a special nonlinear state space representation model which yields the X11 method type trend estimate. Also introduced are two different types of seasonal dynamic models, i.e. dynamic BAYSEA seasonal model and parallel seasonal model. A maximum likelihood method is presented for the identification of these new nonlinear state space models. The local linearization filter, which is a computationally efficient recursive nonlinear filtering scheme, is presented for the computation of the innovations which play major role in the likelihood of our models.

Key words: Seasonal adjustment, X11 method, dynamical system, multiplicative series, BAYSEA, dynamic BAYSEA model, parallel model, tandem model, DECOMP, ARMA model, stochastic differential equation, nonlinear filter, local linearization filter, maximum likelihood.