統計数理（1997）
第45巻 第1号 107-123

［原著論文］

真の分布の存在を仮定しないパラメトリックな統計基礎モデルの構築

統計数理研究所　松　縄　　規

（1996年8月　受付）

要　旨

一変量パラメトリックな統計基礎モデルの構築を，真の分布の存在を仮定すること無しに行う．このために，パラメトリックモデルの性能比強度と，n個の独立なデータの一般化算術平均またはメディアンからなる，モデルの分布型に関する特定化方程式を与える．この方程式から，一般的な関数型を持つ修正指数分布族が与えられ，各種の基礎モデル分布を理論の一側面から構築することが可能になる．良く知られた多くの統計基礎モデルがこの分布族に入っていることが示される．例えば，データの冪算術平均により，ガウス分布，ガンマ分布や逆ガウス分布などが構築され得る．逆対数冪算術平均の導入によって対数正規分布や対数ガンマ分布が導ける．また，連続型モデルの場合と同様な手続きで，いくつかの重要な離散型分布が，修正冪級数分布の誘導を通じてなされ得ることも例示される．

1. はじめに

本論文の目的は，真の分布の存在を仮定すること無しに，多数の重要で標準的な分布を含む，パラメトリックな統計基礎モデルの構築に有用な基本的な統計理論を提案し，その応用事例を示すことである．このことにより，従来あいまいであった，統計理論及び統計的方法論の初期段階に於けるモデル構築の意義を考察する．

本稿の執筆の動機は，筆者が大学生の時に選択した統計学の最初の講義で，「統計学とは何か？」と言った類の話しがあり，その中でR. A. Fisher (1922) のいわゆる「特定化の問題 (problems of specification)」の簡単な紹介を聴いたことに端を発している．

Fisherはこの特定化の問題を推定論に於けるデータ縮約に関して最重要な問題の一つとして挙げた．彼の特定化の問題への見解は，筆者の考えと違って，母集団分布の存在を仮定した上でその仮説母集団分布の関数型を数学的に決定することを意味している．とにかく，その時受けた講義は当時の筆者に，統計学は相当期待できそうな学問のようだと思わせるのに十分であった．R. A. Fisherの名前も統計学の分野では神様的な存在らしいということで記憶に残った．その時，もう一つ印象に残った事は，講義をした先生が，「特定化の問題は統計を将来使おうとする君達が，各専門分野の総合的知識をもって取り組まなければならない問題である」と言われた言葉である．その時この言葉は筆者に新鮮な印象を与えた．確かにFisher (1922) も，特定化の問題は応用家の考えるべきものであると述べている．このFisherの考えはその後の統計家に決定的な影響を与え続け，それ以降，特定化の問題への取り組みは統計の理論家から放棄されてしまったかのように見える (cf. Matsunawa (1994))．

ところで，時が経つにつれて，筆者にはFisherの上記の問題とそれへの彼の見解に必ずしも

賛同しきれなくなってきた．通常応用家達は，具体的な現象や実験等を通じて得たデータを基にその現象を記述する一般法則が成り立つかどうか，その法則の型はどう与え得るかに最も重大な関心を抱くであろう．ここで注意すべき点は，現象やそれに関わるデータが在って，それに基づいてモデルを構築しようとする**順方向性**である．統計的手法の内で，いわゆる記述統計やデータ解析は主としてこの方向に沿ったものと言えよう．だが，現代の数理統計やそれを理論的根拠としている多くの方法論は，まずモデルが想定されて，そこからデータが生まれたとする，逆方向の思考に基づいている．シミュレーションにおける乱数の発生はその典型的例である．変分法や逆問題に於ける考え方も後者に近いものとも見做せる．この順方向か逆方向かという問題は，少なくとも Plato 以来続いている哲学上の問題とも言えるし，時によってはお互いをうまく利用する場合もあり得る．

本稿では，統計学に第一義的に要求されているのは，順方向の思考過程であるとする立場である．この選択の背景には，応用分野の何人かの研究者とのディスカッションで彼らから寄せられた数理統計学を主とする現代統計学への不信感がある．彼らがこれまで経験したことのない興味ある事象についてのデータを得る時，真の分布の存在を仮定して出発する既存の統計的解析手法は，その内容を知っている人ほど信用しない傾向が強い．その最大の理由は，彼らの関心事は，入手したデータが従う確率法則は存在するのか，そして，もし従うとしたらそれはどういう型であるのかという，順方向の試行過程であって，それを積極的に支援してくれる理論を必要としているからである．従って，応用分野の多数の人達は，真の分布の存在を初めから仮定した多数の統計理論とそれらの手法の自分達の問題への適用にかなりの抵抗感を持っているように見える．たとえそれらの手法によって何らかのモデルを選び出すことが出来ても，それで自分達が何か新しい法則を見出したと主張することには躊躇することも多いようである．特に彼らを悩ませるのは，真の分布の存在をどうやって認識し，検証できるのか？ また，仮にその存在と統計的手法を認めたとしても，統計的仮説あるいは統計モデルの候補達をどうやって提案したらよいのか？ といったことである．Fisher が応用家達に押しつけた特定化の問題は，形を変えたとはいえ，応用家達にとっても依然として難問として残っていると言えよう．個別の具体的な問題に対する専門的な知識や情報が不十分な時，応用面からの接近だけでは基礎モデルの構築はやはり難しいことは想像できる．彼らの上記の疑問を，統計家によっては，意味がないものと切り捨てるかも知れない．しかし，筆者には，現代統計学を根底から揺り動かすような疑問に思える．統計科学が現実世界と深く関わる研究を重要視したものであり，他分野との共同研究が頻繁に行われるようになってきた今日，科学全般の中で統計科学だけが独自に棲み分けるということは在り得ないであろう．従って，統計家は，応用分野の意識の高い研究者達からの疑問に真剣に取り組まなければならないであろう．その際，これまでの統計理論や方法論の基盤にある主観性と心理的要素に傾きがちな点をなるべく避けて行くことも必要であろう．

さて，統計の理論家の方はといえば，眼前の現象や現実のデータを越えたところでも，かなり合理的な考えによって，基礎モデルを与え得る能力と道具を身に付けつつある．従って，Fisher の見解と違い，統計基礎モデルの構築は，理論家も応用家と同様に，挑戦すべき問題であると言える．一つの試みとして，Matsunawa (1994) は多変量ノンパラメトリックな立場から，統計的不確定性関係を考察し，統計的基礎方程式とその統計基礎モデル構築への応用を提案した．この手法はパラメトリックの場合にも適用可能である．これらによって，統計的モデル選択のための候補の分布 (candidate distributions) やベイズ理論の事前分布などが直感や個人的な経験ではなく，より共通の理解を得られ易い原理に基づいて与えられる可能性もある．

本稿では上記の筆者の試みと異なった観点と手法によって標題のテーマに取り組む．次章以下での議論で明らかにされるが，真の分布あるいは母集団分布の存在を仮定せずに，パラメト

リックモデルの性能比強度（＝第2章で詳述）及び観測誤差のそれぞれに関する方程式を考察することにより，統計基礎方程式の誘導を可能にする．従来の統計理論の観点から言えば，修正最尤法による統計基礎モデルの構築と言うことも出来る．即ち，この方法によって，基礎モデルの分布の型の推定（＝構築）が可能である．

ところで，測定誤差のモデル分布型推定のための最尤法は，本質的に，Gauss (1809) によって成功裏に用いられた．これによって彼は誤差法則，即ち，正規分布の密度関数を「我々が測定する量の最も尤もらしい値が測定値の算術平均に等しくなるとしたら，算術平均はどんな分布を与えるか？」と言う問題の解答として与えた．彼は，良く知られているように，誤差に関するいくつかの付加条件のもとでその法則を与えた．なお，Gauss は正規分布誘導を定数事前分布を前提として Bayesian の立場で行った．このことの根拠不足と，証明の一部分に若干不自然さがあるためか，彼のこの仕事は，歴史的事実が強調される割には，その内容の重要性がそれほど評価されていないように思われる．同様な線で Poincaré (1912) や経済学者の J. M. Keynes (1911) が，測定値の算術平均，幾何平均，調和平均が与える，各種の誤差法則を論じた．これらの仕事も現代では殆ど忘れられている．Keynes (1911) の仕事は非常に興味深いが，彼の独自の確率論の上に展開されていることと，応用分野の人達によくある事であるが，各種分布の規格化定数を全く与えておらず，少々残念である．いずれにしても，分野の違うこの3人の偉大な学者達は，モデルの構築と言うことに共通して強い関心を持っていたと言えるが，仕事は，現代の統計基礎モデルの構築という観点からは不十分のまま終わった．ついでながら，上述の規格化定数を与えると言うことは，統計基礎モデルを構築する際に，決定的に重要となる．Gauss (1809) は Laplace の積分公式の結果を用いてこの点をきっちり押さえている．後の章で分かることであるが，規格化定数を定められない場合，我々はモデルを構築出来ないと言うことになる．本稿では扱わないが，多変量統計モデルの構築に於ては，しばしば Jacobian の計算の難解さを伴って，このことの重要性が一層実感される．

「各平均はどんな分布を与えるか？」という問は非常に興味深い．この問は真の分布の存在を仮定する場合，しない場合それぞれの分布の特定化の問題に密接に関連する．Keynes の扱った各種平均やメディアンはもっと一般的なものに拡張が可能であり，現代風に言えば，推定方程式の例と見做せる．我々は次章でパラメトリックな性能比強度の概念と，一般化算術平均等に関わる測定誤差からなる特定化方程式の誘導を行い，その解を求めることにより，パラメトリックな統計基礎モデルの構築を行う．第3章の定理 3.1 に我々の問題に対する確率分布の一般型を与える．特定化方程式，従って，解の分布の確率密度に，Gauss の精度定数に対応する精度関数 (precision function) を導入する．彼の時代にはまだいわゆる Cramér-Rao の不等式は知られていなかったこともあって，Gauss はこの量の重要さに注意しなかった．これに関連する基本的関係として，精度関数と Fisher 情報量の関係を補題 3.1 で示す．定理 3.2 で，より一般的な測定誤差に対する結果を述べる．第4章において，定理 3.1，3.2 の結果を基に，一変量パラメトリックな統計基礎モデルの事例を組織的に構築する．例えば，(i) 冪算術平均は正規分布，冪逆ガウス分布および冪ガンマ分布を与える．(ii) 逆対数冪算術平均は対数正規分布および対数ガンマ分布を与える．(iii) 冪メディアンはベキ両側指数分布を与える．更に，いくつかの離散確率モデルが修正冪級数分布の誘導を通じて構築される．

2. 定義と仮定

X を可測空間 $(R, \boldsymbol{B})$ 上で定義される実確率変数 (resp. 離散確率変数) とする．ここに R は実空間(resp. 全ての非負値整数点からなる集合)，$\boldsymbol{B}$ は R の部分集合の σ-集合体とする．$\mathbb{P}$ を $(R, \boldsymbol{B})$ 上で定義される統計基礎モデルの分布族とする．本稿では，$\mathbb{P}$ は我々が望む，データ X

を記述する観測装置からなる集合と解釈する．換言すると，基礎モデルはデータによって構築される知的構造物と見做される．従って，真の分布あるいは母集団分布がデータを生成するといった見解は取らない．一般に，真の分布の存在を認識し，検証することが困難と考えるからである．

さて，我々は分布族 $\mathbb{P}=\{P^X_{\theta,\boldsymbol{\tau}}\,;\,\theta\in\Theta,\,\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{T}\}$ のようにパラメーター化されるものを構築したいものとする．ここで，θ は我々が $\mathbb{P}$ の構築を目指す際にその導入と調整に最も興味を持つパラメーターで，空間 Θ に属するものとする．一方，もし存在するなら，$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_d)$ は我々が副次的興味を持つ，他の空間 $\mathcal{T}$ に属する $d(\geq 1)$-次元のパラメーターベクトルである．$\boldsymbol{\tau}$ はモデル構築の初期の段階では現われないこともある．θ を主パラメーター（the primary parameter），$\boldsymbol{\tau}$ を副次パラメーター（the secondary parameter）と呼ぶことにする．なお，上記の見解に合わせ，真のパラメーターの存在という考え方もしない．

$\mathbb{P}$ の各要素は $(R,\boldsymbol{B})$ 上で Lebesgue-(resp. 計数-)測度 μ に関し絶対連続とし，$P^X_{\theta,\boldsymbol{\tau}}$ の μ に関する密度関数を仮想的に $p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ とする．仮想的にと言ったのは，データあるいはそれに関する誤差解析を実施した結果として，$p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ に対応する適切な確率密度を，後で見る統計基礎方程式の解として，求めることが出来ないことも起こり得るからである．その時我々の作業はそこで終わり，モデルの構築は出来なかったということになる．適切な誤差の表現が見つからない時，あるいは最終的な規格化定数が与えられないなどはそうした不調に終わる場合である．例えて言うならば，$p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ は家を建設する時の足場のようなものと考えることも出来る．そこでこの概念的枠組みである $p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ を「$P^X_{\theta,\boldsymbol{\tau}}$ の μ に関する**足場密度関数**（scaffolding density function)」と呼ぶことにする．なお，足場を作っても，初期の願望に反して，建物が建たないこともあり得る．幸運にも，足場を利用して建物が建てられる時，即ち，$p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ が適切な確率密度関数として求まる時，我々はパラメトリックモデルを構築できたとし，それを足場関数と同じ記号 $p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ を使って表すことにする．

本稿を通じて以下の仮定を置く（cf. Zacks (1971)）：

(A.1) θ と $\boldsymbol{\tau}$ は関数関係を持たない．また両者は X の実現 x の座標と独立，

(A.2) Θ は実数直線かまたはその中の一区間とする，

(A.3) $\partial\ln p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta<\infty$ $\mathbb{P}$-a.e. for all $\theta\in\Theta$,

(A.4) $\mu(\{x\,;\partial p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta\neq 0\})>0$, for all $\theta\in\Theta$,

(A.5) $\int(\partial p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta)^2 p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})\mu(dx)<\infty$, for all $\theta\in\Theta$.

データ $\boldsymbol{x}$ が与えられた時のモデル構築の観点から，次の θ の関数

$$\ln p(x\,;\theta)[=\ln\{P^X_{\theta,\boldsymbol{\tau}}(dx)/\mu(dx)\}]$$

を μ に関する，パラメトリックモデルの**情報強度**（information intensity）と考える．これをモデルの分布で平均すると，パラメトリックな場合の Kullback-Leibler 情報量を得るからである．更に，次式で定義される θ の関数

$$\mathcal{P}(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau}):=\partial\ln p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta \tag{2.1}$$

をパラメトリックモデルの**性能比強度**（performance specific intensity）と呼ぶことにする．即ち，関数 $\mathcal{P}(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ をパラメトリックモデルの持つデータの記述能力と見做すことにする．勿論，通常はこの関数は対数尤度（log-likelihood）とか，あるいはスコアー関数と呼ばれるが，これらの用語は，周辺領域の科学者や研究者達にとって，かなりあいまいに見えるようである．実際，Fisher (1922) は尤度（likelihood）という用語を導入し，これを「合理的な信念の尺度

(a measure of rational belief)」を表すものとした．しかし，尤度に関するFisherの思想は明快さに欠けるものであり，本人も晩年に到るまでこの辺を気にしていたように思える(Lehmann (1990))．まして，後続の多くの統計家にとって，この用語の本質的意味を，共同研究をしている周辺分野の研究者達に対してすら，説明するのに困難を感じるのは至極当然かもしれない．副次パラメーターについても，その存在は基本的には重要であるが，本稿では，それらを時々陽に表現しないこともある．特に，Xの密度関数を誘導する初期の段階では，どんなそして何個の副次パラメーターが在るかを知らないので，表現$p(x;\theta)$をフルな表現$p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$の代わりに用いる．

さて，次に**一般化算術平均** (a generalized arithmetic mean) を導入しよう．これにより，良く知られた平均及び，いくつかの新しく提案する平均を統一的に扱うことができる．

定義 2.1.　$x_1,\ldots,x_n$をn個の要素からなる測定値，$\varphi(x)$を実数直線上で定義される，実で一価な微分可能な関数とする．$\psi(\theta)$は実数直線上の連結領域Dで定義される，連続で狭義単調なθの関数とする．この時，関数ψおよびφに関連する$x_1,\ldots,x_n$の一般化算術平均を次式で定義する：

$$M_n(\boldsymbol{x};\psi(\theta),\varphi(x)):=\psi_\theta^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right), \tag{2.2}$$

ここで，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, ψ_θ^{-1}は$\psi(\theta)$の逆関数を表す．

注 2.1.　(i) $\psi(\theta)$の定義により，ψ_θ^{-1}は一価で連続な関数である．従って，$\varphi(x)$の条件を考慮すると，一般化算術平均は一意的に決まる．(ii) ψとφが同じ関数型を持つなら，我々に馴染みの平均が得られる：$M_n(\boldsymbol{x};\theta,x)$, $M_n(\boldsymbol{x};\ln\theta,\ln x)$ $(\theta,x>0)$および$M_n(\boldsymbol{x};\theta^{-1},x^{-1})$, $(\theta,x\neq0)$はそれぞれ，算術平均，幾何平均および調和平均に対応する．

3.　パラメトリックな統計基礎モデルの構築

次の定理は，足場の密度関数に望まれる諸条件とそれらから誘導される統計基礎方程式に関する基本的な結果である：

定理 3.1.　$\mathbb{P}=\{P_{\theta,\tau}^X;\theta\in\Theta,\boldsymbol{\tau}\in\mho\}$をパラメトリックな基礎モデル分布の族とし，仮定(A.1)～(A.5)を満たすものとする．$P_{\theta,\tau}^X$のμに関する足場密度関数を$p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$とし，$x_1,\ldots,x_n$を$p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$からの独立な大きさ$n(\geq2)$の標本測定値とする．我々が興味を持つパラメーター$\theta$は次の関係式に従って調整出来るものとする：

$$\sum_{i=1}^{n}\partial\ln p(x_i;\theta)/\partial\theta=0\,. \tag{a.1}$$

また，上式により調整されたパラメーター値$\hat{\theta}_n$が，(2.2)式で定義された，$x_1,\ldots,x_n$の，関数ψおよびφに関連する一般化算術平均に等しいものとする．この時

(a)　パラメトリックモデルの特定化方程式 (a parametric model specification equation) が成り立つ：

$$\frac{\partial\ln p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}=\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\},\qquad[\text{a.e. }\mu], \tag{3.1}$$

(b)　足場密度関数$p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$は次の修正指数分布族$\mathscr{M}$に属する．この時，密度関数の一般型は形式的に次のように与えられる：$x\in R$と$(\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mho$に対して

$$p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})=C(x\,;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}d\theta\right], \tag{3.2}$$

但し，$\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$ は一種の観測精度を表す量であり，$C(x\,;\boldsymbol{\tau})>0$ は，存在するならば，次の条件を満たす規格化関数を表す：

$$\int_D p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})\mu(dx)=1, \tag{3.3}$$

但し，$D=\{x:p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})>0, x\in R, (\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mathcal{T}\}$ を意味する．

証明． 定理の設定から，与えられた $x_1,\ldots,x_n$ に対する足場密度関数 $p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})$ の結合記述能力は

$$L_n(\theta\,;x_1,\ldots,x_n):=p(x_1\,;\theta)p(x_2\,;\theta)\cdots p(x_n\,;\theta), \qquad [\text{a.e. } \mu] \tag{3.4}$$

と表される．定理の仮定(a.1)から，$\hat{\theta}_n$ は点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ に於ける，θ に関する次の調整方程式の解である．

$$\frac{\partial\ln L_n}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p(x_i\,;\theta)/\partial\theta}{p(x_i\,;\theta)}=0, \qquad [=(\text{a.1})]. \tag{3.5}$$

(上式で，$x_1,\ldots,x_n$，そしてもし存在するなら，$\boldsymbol{\tau}$ は，θ を調整している間は，一時的に不動なパラメーターの役割を演じる．θ と $x_1,\ldots,x_n$ や $\boldsymbol{\tau}$ とが関数関係を持つ場合は本稿では扱わない．)

前章の性能比強度の記号(2.1)を使えば，次の表現が従う：

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(x_i\,;\hat{\theta}_n)=0, \qquad [\text{a.e. } \mu]. \tag{3.6}$$

さて，一般化算術平均に関する仮定から，次の関係式が成り立つ：

$$M_n(\boldsymbol{x}\,;\psi,\varphi):=\psi_\theta^{-1}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right)\equiv\hat{\theta}_n. \tag{3.7}$$

よって，$\psi(\hat{\theta}_n)$ は次の制約方程式（or 推定方程式 an estimating equation)

$$\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i\,;\hat{\theta}_n)=0, \tag{3.8}$$

を満たす．ここで

$$\delta(x_i\,;\hat{\theta}_n):=\varphi(x_i)-\psi(\hat{\theta}_n). \tag{3.9}$$

と置いた．これを $\hat{\theta}_n$ における測定誤差（measurement error）または調整誤差（regulation error）と呼ぶことにする．以後でこの量は各 i について，ゼロではないものとする．

そこで，(3.6)と(3.8)を同時に満たす，p に関する適切な関数型を見出すための特定化方程式を構築しよう．このために，(3.6)を次のように変形する：

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(x_i\,;\hat{\theta}_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathcal{P}(x_i\,;\hat{\theta}_n)}{\delta(x_i\,;\hat{\theta}_n)}\cdot\delta(x_i\,;\hat{\theta}_n)=0, \qquad [\text{a.e. } \mu]. \tag{3.10}$$

上式が任意の整数 $n(\geq 2)$ に対して式(3.8)と同時に成立するためには $\mathcal{P}(x_i\,;\hat{\theta}_n)/\delta(x_i\,;\hat{\theta}_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ が，i とは独立な一定量となって，和の記号の外に出ればよい．即ち，$\hat{\theta}_n$ と $\boldsymbol{\tau}$ に従属してもよいが i と関係しない量 $\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$ が存在して

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{P}(x_1\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})}{\delta(x_1\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})}&=\frac{\mathcal{P}(x_2\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})}{\delta(x_2\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})}=\cdots=\frac{\mathcal{P}(x_n\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})}{\delta(x_n\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})}\\&=\xi(\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})\ \ (\neq 0), \qquad [\text{a.e. } \mu]\end{aligned} \tag{3.11}$$

とならねばならない．何故ならば，(3.11)を満たさない i_0 が存在したと仮定すると，$\mathcal{P}(x_{i_0}\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})/\delta(x_{i_0}\,;\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})\neq\xi(\hat{\theta}_n,\boldsymbol{\tau})$ となり，パラメトリックモデルの正則性の仮定(A.4)に $\theta=\hat{\theta}_n$ の時矛

盾する．これより，式(3.11)が従う．我々は i.i.d. の場合を考えているから，ここで，$x_1,\ldots,x_n$ の代表点を x とし，$\hat{\theta}_n$ を θ と書き改めれば，(3.11)は n を含まない表現

$$\frac{\mathcal{P}(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\delta(x\,;\theta)}=\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\ \ (\neq 0),\qquad [\text{a.e. } \mu] \tag{3.12}$$

を得る．Gauss (1809) からの類推で，$\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$ は観測精度の尺度または精度関数(precision function)と呼ぶ．即ち，精度関数は 1 単位の観測誤差当たりの性能比強度を意味する．(3.11)から，二つのベクトル $\mathcal{P}:=(\mathcal{P}(x_1\,;\theta),\ldots,\mathcal{P}(x_n\,;\theta))$ と $\delta:=(\delta(x_1\,;\theta),\ldots,\delta(x_n\,;\theta))$ が平行となる時の比例定数が $\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$ であると見做せる．結局，(3.12)から，足場密度関数は次の特定化方程式

$$\frac{\partial \ln p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}=\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\},\qquad [\text{a.e. } \mu] \tag{3.13}$$

を満たす．これで定理の(a)が証明された．

方程式(3.13)を解くために，両辺を θ で形式的に積分して

$$p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})+A(x\,;\boldsymbol{\tau})\propto\exp\left[\int\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}d\theta\right], \tag{3.14}$$

ここで $A(x\,;\boldsymbol{\tau})$ は θ に関係しない任意関数である．もし $\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$, φ 及び ψ を適切に選んで，足場密度関数が得られるならば，それは上式を整理して，形式的に次の型で与えられる：

$$p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})=C(x\,;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}d\theta\right], \tag{3.15}$$

但し，$C(x\,;\boldsymbol{\tau})>0$ は規格化関数で，次の関係を満たさねばならない：

$$\int_D p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})\mu(dx)=1\,, \tag{3.16}$$

ここで $D=\{x: p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})>0, x\in R, (\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mathcal{T}\}$ である．□

注 3.1. 条件(a.1)は n 個の独立なデータ値 $x_1,\ldots,x_n$ が与えられた時，θ を主要な調整量とする観測機構の可変部分を操作して，観測機構を最適な状態にするために果たされた条件である．条件(a.1)は，構築しようとしている基礎モデルは，個々のデータに対する $\mathcal{P}(x_i\,;\hat{\theta}_n)$ が正負様々に変動しても，データ全体としての性能比強度は理想的に一定値（ゼロ）に保たれることを要請している．この線に沿って，本稿では，最も原始的な，θ をデータと関数関係を持たせないで調整するという立場で，パラメトリックな統計基礎モデルを構築することを考えている．これは非常に単純な検知と制御機構のみしか持たない自動カメラに部分的に例えられる．しかし原始的なことが却って，頑健性を持つこともあり得る．後で見るように，本稿の設定でも，我々のよく見慣れた分布を多数構築できることが分かる．なお，θ が $x_1,\ldots,x_n$ と関数関係を持つより一般的な状況で考えるならば，条件(a.1)はそれに応じて修正する必要がある．結果として誘導される基礎方程式も複雑となるので，機会を改めて議論する．

注 3.2. 定理の証明の過程では各 i に対して $\delta(x_i\,;\hat{\theta}_n)\neq 0$ としたが，得られた統計基礎方程式(3.1)の右辺で形式的に $\delta(x\,;\theta)$ と置くとこれは測定誤差がゼロであり，また同時に左辺から $\mathcal{P}(x\,;\theta)=0$ となり θ を調節する必要がないことになる．このとき一様分布が構築されることが容易に分かる．

注 3.3. 特定化方程式(3.1)は観測対象の分布型を見出すためのパラメトリックな統計基礎方程式とも見做せる．方程式の右辺の $\varphi(x)-\psi(\theta)$ が観測データ（の調整された量）を表していることから，左辺の量 $\partial \ln p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta$ は，標語的に，パラメトリックモデル（＝観測機構）のデータの記述能力といってよかろう．少しおおまかな言い方をすると，データ（＝客体）は，

観測の精度 $\xi(\theta, \boldsymbol{\tau})$ を持つ物差しを用いて測定され，人間を含む観測機構(＝主体)が構成され，把握されると言える．統計基礎方程式は，従って，観測を通じての統計的な主客合一を表現しているものと解釈できる．

さて，我々が統計基礎モデル(3.2)の構築に成功したとする．すると，モデル構築には直接には役に立たないのであるが，母集団分布の存在を仮定した従来の推定論と数学的性質という点で興味ある性質が成り立つ．例えば，結果として，精度関数 $\xi(\theta, \boldsymbol{\tau})$ は，θ に関する Fisher の情報量 $I_X(\theta, \boldsymbol{\tau})$ と次のような関係にある：

補題 3.1. $p(x\,;\theta, \boldsymbol{\tau})$ を σ-有限測度 μ に関する確率密度関数とし，仮定(A.1)～(A.5)を満たすものとする．$\psi(\theta)$ を実数値を取る推定可能関数で Θ 上で $d\psi(\theta)/d\theta \neq 0$ とする．また，$\varphi(X)$ を $\psi(\theta)$ の不偏推定量で，有限な分散を持ち，次の条件を満たすものとする：

$$\text{(A.6)} \qquad \int\left|\varphi(x)\cdot\frac{\partial p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}\right|\mu(dx)<\infty, \qquad \text{for } x\in R \text{ and } (\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mho .$$

この時，$\varphi(X)$ は $\psi(\theta)$ に対する有効推定量で

$$\text{(3.17)} \qquad \xi(\theta,\boldsymbol{\tau})=\frac{I_X(\theta,\boldsymbol{\tau})}{d\psi(\theta)/d\theta}=\frac{d\psi(\theta)/d\theta}{\underset{\theta,\tau}{\mathrm{Var}}[\varphi(X)]}, \qquad \text{for } (\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mho$$

が成立する．但し，$I_X(\theta, \boldsymbol{\tau})$ は θ に対する $p(x\,;\theta, \boldsymbol{\tau})$ 内在精度 (intrinsic accuracy)，即ち，一標本当たりの θ に対するいわゆる Fisher 情報量を表し，次のように定義される：

$$\text{(3.18)} \qquad I_X(\theta,\boldsymbol{\tau})=E\left[\left(\frac{\partial \ln p(X\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

証明. (3.12)式から

$$\text{(3.19)} \qquad \frac{\partial p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta}{p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}=\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}, \qquad [\text{a.e. } \mu],$$

これはまた $\psi(\theta)$ の不偏推定量 $\varphi(X)$ が有効であるための必要・十分条件である．更に，定理 3.1 の仮定(a.1)の下で，いわゆる Cramér-Rao 不等式と(3.19)から次式が成り立つ：

$$\text{(3.20)} \qquad \underset{\theta,\tau}{\mathrm{Var}}[\varphi(X)]=\frac{d\psi(\theta)/d\theta}{\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})}.$$

一方，$\varphi(X)$ の不偏性から

$$\text{(3.21)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}\frac{\partial p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta}{p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})\mu(dx)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})\mu(dx)-\psi(\theta)\cdot 0=\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}.$$

よって，(3.18)と(3.21)から

$$\text{(3.22)} \qquad I_X(\theta,\boldsymbol{\tau})=E\left[\left(\frac{\partial \ln p(X\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}\right)^2\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}\cdot\frac{\partial \ln p(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}\mu(dx)=\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}.$$

故に，(3.22)と(3.20)から求める(3.17)を得る．□

定理 3.1 及び補題 3.1 から，次の結果を得る：

系 3.1. 補題 3.1 と同じ条件の下で，パラメトリック統計基礎モデルの密度関数は，次のように表現される：

$$(3.23)\qquad p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})=C(x;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\frac{I_X(\theta,\boldsymbol{\tau})}{d\psi(\theta)/d\theta}\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}d\theta\right]$$

$$(3.24)\qquad =C(x;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\frac{d\psi(\theta)/d\theta}{\underset{\theta,\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{Var}}[\varphi(X)]}\cdot\{\varphi(x)-\psi(\theta)\}d\theta\right],$$

$$\text{for } x\in R \text{ and } (\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mho\,. \qquad \square$$

本章の残りの部分で，定理 3.1 の一般化を考える．$\Phi(X;\theta,\boldsymbol{\tau})$ を観測対象関数とする．この関数に対して，その $\Psi(X;\theta,\boldsymbol{\tau})$ を近似関数とする．$X=x$ に対し，これらの関数は x に関する一価実数値関数とする．この時 X に関するランダムな観測誤差関数を

$$(3.25)\qquad \Delta(X;\theta,\boldsymbol{\tau}):=\Phi(X;\theta,\boldsymbol{\tau})-\Psi(X;\theta,\boldsymbol{\tau}),$$

によって定義する．これはある種の，分布の生成子 (distribution generator) と見做せる．そしてそのことは次章の事例の中で理解されるであろう．

上記の設定で，次の定理が成立する．証明は定理 3.1 に準じて行えるので省略する．

定理 3.2. $\mathbb{P}=\{P^X_{\theta,\boldsymbol{\tau}};\theta\in\Theta,\boldsymbol{\tau}\in\mho\}$ を仮定(A.1)～(A.4)を満たすパラメトリックな統計基礎モデルの族とする．$P^X_{\theta,\boldsymbol{\tau}}$ の μ に関する足場密度関数を $p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$ とし，$x_1,\dots,x_n$ を $p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$ からの独立な大きさ $n(\ge 2)$ の標本測定値とする．我々が興味を持つパラメーター θ は次の関係式に従って調整出来るものとする：

$$(3.26)\qquad \sum_{i=1}^{n}\partial\ln p(x_i;\theta,\boldsymbol{\tau})/\partial\theta=0\,.$$

更に，上式によって調整されたパラメーター値 $\hat{\theta}_n$ が次の方程式

$$(3.27)\qquad \sum_{i=1}^{n}\Delta(x;\theta,\boldsymbol{\tau})=0\,.$$

を満たすものとする．この時

(a) パラメトリックな統計基礎方程式が次のように与えられる：

$$(3.28)\qquad \frac{\partial\ln p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})}{\partial\theta}=\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\Delta(x;\theta,\boldsymbol{\tau})\,.$$

(b) 足場密度関数 $p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$ は次の修正指数分布族 $\mathscr{M}^*$ に属する．この時，密度関数の一般型は形式的に次のように与えられる：$x\in R$ と $(\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mho$ に対して

$$(3.29)\qquad p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})=C^*(x;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\Delta(x;\theta,\boldsymbol{\tau})d\theta\right],$$

但し，$C^*(x;\boldsymbol{\tau})>0$ は，存在するならば，次の条件を満たす規格化関数を表す：

$$(3.30)\qquad \int_D p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})dx=1\,,$$

ここに $D=\{x:p(x;\theta,\boldsymbol{\tau})>0,x\in R,(\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mho\}$.

注 3.4. 定理 3.1，定理 3.2 によって，我々はパラメトリックな統計基礎モデルを構築する可能性を持つ．例えば，後者は次の構築の段階を与える：各実験段階に於て，(1) 我々の実験対象に対し，測定誤差関数 $\Delta(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$ を選択・設定し，(2) 適切な精度関数 $\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$ を選択する，即ち，測定の物差しを決める．そして最後に，(3) 規格化関数 $C^*(x;\boldsymbol{\tau})>0$ が存在するか

チェックする．これらの段階を克服出来ないならば，我々は理論的なパラメトリックな統計基礎モデルを構築できなかったことになる．従って，新たに $\Delta(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$ と $\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$ を設定し直して再考する必要がある．

4. 例

定理 3.1 と定理 3.2 のそれぞれの修正指数分布族 $\mathscr{M}$ および $\mathscr{M}^*$ の確率密度関数はかなり一般的な形で与えられている．これらの中にどのような特定なパラメトリック分布族が属しているかは興味深い．

この章の前半ではデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の冪算術（or 冪調和）平均に基づく部分分布族 $\mathscr{M}_{\mathrm{PA}}$ および逆数対数冪算術平均に基づく部分分布族 $\mathscr{M}_{\mathrm{RLA}}$ について考える．

4.1 冪算術（or 冪調和）平均に基づく $\mathscr{M}_{\mathrm{PA}}$-分布

もし $\psi(\theta)=\theta^\alpha$ および $\varphi(x)=x^\alpha$ と設定すれば，定理 3.1 の一般化算術平均は

$$\hat{\theta}_n=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right)^{1/\alpha} \qquad (\alpha\neq 0), \qquad \left(\begin{array}{l}\text{power arithmetic mean if } \alpha>0,\\ \text{power harmonic mean if } \alpha<0\end{array}\right) \tag{4.1}$$

となる．この場合，部分分布族 $\mathscr{M}_{\mathrm{PA}}(\subset\mathscr{M})$ の pdf.'s は $x\in R, (\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mathcal{T}$ に対し

$$f(x;\theta,\boldsymbol{\tau})=C(x;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot(x^\alpha-\theta^\alpha)d\theta\right] \tag{4.2}$$

で与えられる．この部分分布族に入る代表的な分布を以下に考える：

例 4.1.1. 正規分布（normal distribution）

$$f(x;\theta,\boldsymbol{\tau})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \qquad (-\infty<x,\mu<\infty;\sigma>0).$$

構築． 式(4.2)に於て

$$\alpha=1, \quad \theta=:\mu, \quad \boldsymbol{\tau}=:\sigma^2\ (\sigma>0), \quad \xi(\theta,\boldsymbol{\tau})=:1/\sigma^2,$$

と設定すると

$$f(x;\mu,\sigma^2)\propto\exp\left[\int\frac{1}{\sigma^2}\cdot(x-\mu)d\mu\right]=\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2-2\mu x)\right].$$

規格化関数は(3.3)を満たすように決定されねばならない．この場合，Laplace-Gauss の誤差積分を援用して

$$C(x;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

と決められ，所要の分布型が求まる．

注 4.1. 上記の誘導は，Gauss (1809) が Bayesian の立場から行った若干あいまいな誘導に比べ，より簡明である．

例 4.1.2. 冪逆ガウス分布（power inverse Gaussian distribution）

$$f(x;\mu,\lambda,\alpha)=\sqrt{\frac{\lambda\alpha^2}{2\pi x^{\alpha+2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda(x^\alpha-\mu^\alpha)^2}{2\mu^{2\alpha}x^\alpha}\right\}, \qquad (x,\mu,\lambda>0,\alpha\neq 0).$$

構築. 式(4.2)に於て

$$\theta=:\mu, \qquad \boldsymbol{\tau}=:(\lambda, \alpha), \qquad \xi(\mu, \lambda, \alpha)=:\alpha\lambda/\mu^{2\alpha+1},$$

と設定すると

$$f(x\,;\mu, \lambda, \alpha)\propto\exp\left[\int(\alpha\lambda/\mu^{2\alpha+1})\cdot(x^\alpha-\mu^\alpha)d\mu\right]=\exp\left[-\frac{\lambda(x^\alpha-2\mu^\alpha)}{2\mu^{2\alpha}}\right].$$

規格化関数を決定するために次の第3種修正 Bessel 関数の定義から導かれる公式

$$\int_0^\infty\frac{\gamma}{x^{\gamma+1}}\exp\left[-k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2\right]dx=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{k}}, \qquad (a, b, k>0, \gamma\neq0)$$

を用いる. これから次の結果を得る：

$$C(x\,;\lambda, \alpha)=\sqrt{\frac{\lambda\alpha^2}{2\pi x^{\alpha+2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda}{2x^\alpha}\right\}.$$

注 4.2. $\alpha=1$ の時通常の逆ガウス分布を得る. $\alpha=-1$ で $\mu=1/\theta$ の時反逆ガウス分布(reciprocal inverse Gaussian distribution (=the random walk distribution)) を得る：

$$f(x\,;\theta, \lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda(x-1/\theta)^2}{2x}\right\}, \qquad (x, \theta, \lambda>0).$$

例 4.1.3. 冪ガンマ分布 (power gamma distribution)

$$f(x\,;\mu, \lambda, \kappa, \alpha)=\frac{1}{\Gamma(\kappa)}\cdot\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\alpha\kappa-1}\cdot\frac{|\lambda|}{\mu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\kappa-1}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{x}{\mu}\right)^\alpha\right\},$$

$(x>0\,;\mu>0, \kappa>0, \alpha\lambda>0)$.

構築. (4.2)式で次のように設定する.

$$\theta=:\mu, \qquad \boldsymbol{\tau}=:(\lambda, \kappa, \alpha), \qquad \xi(\mu, \lambda, \kappa, \alpha)=:\lambda/\mu^{\alpha+1}.$$

この時

$$f(x\,;\mu, \lambda, \kappa, \alpha)\propto\exp\left[\int\lambda/\mu^{\alpha+1}\cdot(x^\alpha-\mu^\alpha)d\mu\right]=\frac{1}{\mu^\lambda}\cdot\exp\left[-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{x}{\mu}\right)^\alpha\right].$$

規格化関数 $C(x:\lambda, \kappa, \alpha)$ を決定するために, 次のガンマ積分の表現に注意する：

$$\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{x}{\mu}\right)^\alpha\right\}\cdot\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\alpha\kappa-1}\cdot\frac{|\lambda|}{\mu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\kappa-1}dx=\Gamma(\kappa),$$

$(x>0\,;\mu>0, \kappa>0, \alpha\lambda>0)$, これから

$$C(x\,;\lambda, \kappa, \alpha)=\frac{1}{\Gamma(\kappa)}\cdot\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\alpha\kappa-1}\cdot|\lambda|\mu^{\lambda-1}\cdot\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\kappa-1}$$

と求まる.

注 4.3. 上記の分布は特別な場合次の諸分布に帰着する：(1) $\alpha=\kappa=1$ の場合は指数分布 (exponential distribution)；(2) $\alpha=1$ の場合は一般化ガンマ分布 (generalized gamma distribution)；(3) $\alpha=\lambda=1, \mu=2$ および $\kappa=n/2$ (n：正の整数) の時, 自由度 n のカイ二乗分布；(4) $\alpha=\lambda=2, \mu=\sqrt{2}$ および $\kappa=n/2$ (n：正の整数) の時, 自由度 n のカイ分布 (chi-distribution (Rayleigh distribution))；(5) $\alpha=\lambda>0, \kappa=1$ の時, ワイブル分布(Weibull distribution)；(6) $\alpha=\lambda=-1$ および $\kappa=1$ の時, 反指数分布(reciprocal exponential distribution)；(7) $\alpha<0$, $\lambda<0$：reciprocal power gamma distribution；(8) $\alpha=-1, \kappa=1/2$ および $\lambda=-1/2$ の時, 片側

安定分布（one-sided stable distribution）；(9) $\alpha=\lambda=-1, \mu=1/2$ および $\kappa=n/2$（n：正の整数）の時，自由度 n の反カイ二乗分布（reciprocal chi-squared distribution）；(10) $\alpha=\lambda=-2$ および $\kappa=n/2$（n：正の整数）の時，自由度 n の反カイ分布（reciprocal chi-distribution）；(11) $\alpha=\lambda<0, \kappa=1$ の時，反ワイブル分布（reciprocal Weibull distribution）.

4.2 逆対数冪算術平均に基づく $\mathcal{M}_{\mathrm{RLA}}$-分布

定理3.2において

$$\Phi(x\,;\kappa,\alpha,\gamma)=\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma} \quad \text{および} \quad \Psi(\theta,\beta)=\frac{1}{\theta^{\beta}}, \qquad (x\geq\kappa>0, 0<\alpha, \beta<1, \gamma\geq 1),$$

と設定する，ここに $(\kappa,\alpha,\beta,\gamma)$ は x および θ と関数的に独立なパラメーターベクトルとする．このとき，定理3.2の $\hat{\theta}_n$ は次のように与えられる：

$$(4.3) \qquad \hat{\theta}_n=\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{x_i}{\kappa}\right)^{\gamma}\right\}^{-1/\beta}, \qquad (x_i\geq\kappa>0, 0<\alpha, \beta<1, \gamma\geq 1),$$

これを逆対数冪算術平均（reciprocal log-power arithmetic mean）と呼ぶ．この時，次のpdf.'sからなる部分分布族 $\mathcal{M}_{\mathrm{RPA}}(\subset\mathcal{M})$ が考えられる：$x\geq\kappa>0, 0<\alpha, \beta<1, \gamma\geq 1$ に対して

$$(4.4) \qquad f(x\,;\theta,\boldsymbol{\tau})=C(x\,;\boldsymbol{\tau})\cdot\exp\left[\int\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma}-\frac{1}{\theta^{\beta}}\right)d\theta\right],$$

ここに $(\theta,\boldsymbol{\tau})\in\Theta\times\mathcal{T}$，但し $\boldsymbol{\tau}=(\kappa,\alpha,\beta,\gamma)$.

例 4.2.1. 対数正規分布（log-normal distribution）

$$f(x\,;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\ln\mu)^2\right]\cdot\frac{1}{x}, \qquad (x\,;\mu,\sigma>0).$$

構築. (4.4)式において

$$\alpha=1, \quad \beta=1, \quad \gamma=1, \quad \theta=\ln(1/\mu)\ (\mu>0), \quad \kappa=1, \quad \xi(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2},$$

と設定すると，

$$f(x\,;\mu,\sigma^2)\propto\exp\int\frac{1}{\sigma^2}(\ln x-\ln\mu)\frac{1}{\mu}d\mu=\exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}\{2(\ln x)(\ln\mu)-(\ln\mu)^2\}\right].$$

変換 $\ln x=:y$ を施せば，誤差積分の公式から，規格化関数は

$$C(x\,;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x)^2\right]\cdot\frac{1}{x},$$

と求まり，所要のpdf.を得る．

例 4.2.2. 対数ガンマ分布（log-gamma distribution）(cf. Taguchi et al. (1993))

$$f(x\,;\theta,\kappa,\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\theta^{\alpha\beta}}{\Gamma(\alpha)}\exp\left\{-\theta^{\beta}\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma}\right\}\cdot\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\alpha\gamma-1}\cdot\frac{\gamma}{x},$$
$$(x\geq\kappa>0, 0<\alpha, \beta<1, \gamma\geq 1).$$

構築. 式(4.4)において $\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})=-\alpha\beta\theta^{\beta-1}$ と置くと，

$$f(x\,;\theta,\kappa)\propto\exp\left[\int-\alpha\beta\theta^{\beta-1}\left(\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma}-\frac{1}{\theta^{\beta}}\right)d\theta\right]=\theta^{\alpha\beta}\cdot\exp\left[-\theta^{\beta}\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma}\right].$$

規格化関数を求めるため，次のガンマ積分の表現を利用する：

$$\begin{aligned}&\int_\kappa^\infty \theta^{\alpha\beta}\cdot\exp\left[-\theta^\beta\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^\gamma\right]\cdot\gamma\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\alpha\gamma-1}\frac{1}{x}dx\\&\quad=\int_\kappa^\infty \exp\left[-\theta^\beta\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^\gamma\right]\cdot\left[\theta^\beta\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^\gamma\right]^{\alpha-1}\theta^\beta\gamma\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma-1}\frac{1}{x}dx\\&\quad=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt=\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

上で次の変換を用いた：

$$\theta^\beta\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^\gamma=:t \qquad \text{and} \qquad \theta^\beta\gamma\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\gamma-1}\frac{1}{x}dx=dt.$$

従って，規格化関数として

$$C(x;\kappa,\alpha,\gamma)=\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{\kappa}\right)^{\alpha\gamma-1}\frac{1}{x},$$

と取ればよい．これにより，所要の pdf. を得る．

注 4.4. $\alpha=\beta=\gamma=1$ の時，上記分布はパレート分布（Pareto distribution）となる：

$$f(x;\theta,\kappa)=\theta\kappa^\theta x^{-(\theta+1)}, \qquad (x\geq\kappa>0,\ \theta>0).$$

さて，次にデータ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ のメディアンおよびその一般化に相当する量に関連する統計基礎モデルの構築を考える．

4.3 冪メディアンに基づく $\mathscr{M}_{\mathrm{RLA}}$-分布

次の量を考える：

$$\Delta(x;\theta,\lambda,\alpha):=\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}-\lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln\left\{\exp\left(\frac{x^\alpha}{\lambda}\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}\right)\cdot H(\theta;\lambda,\alpha)\right\}\right], \tag{4.5}$$

このとき定理 3.2 から

$$\begin{aligned}f(x;\theta,\lambda,\alpha)&=C(x;\lambda,\alpha)\cdot\exp\left[\int\xi(\theta,\lambda,\alpha)\Delta(x;\theta,\lambda,\alpha)d\theta\right]\\&=C(x;\lambda,\alpha)\cdot\exp\left[\int\left(\xi(\theta,\lambda,\alpha)\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left\{\exp\left(\frac{x^\alpha}{\lambda}\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}\right)\cdot H(\theta;\lambda,\alpha)\right\}\right)d\theta\right],\end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで $H(\theta;\lambda,\alpha)$ は $(\theta;\lambda,\alpha)$ に関係するある正の量．

例 4.3.1. 冪二重指数分布（power double exponential distribution）

$$f(x;\theta,\lambda,\alpha)=\frac{\alpha}{\lambda^{1/\alpha}}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x^\alpha-\theta|-\ln H(\theta;\lambda,\alpha)\right\}=\frac{\alpha}{\lambda^{1/\alpha}H(\theta;\lambda,\alpha)}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x^\alpha-\theta|\right\}$$

$$(-\infty<x<\infty;\ \theta^{1/\alpha}:\text{real},\ \lambda>0,\ \alpha:\text{a positive integer}),$$

ここで

$$H(\theta;\lambda,\alpha)=e^{-\theta/\lambda}\int_{-\theta/\lambda}^\infty e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy+e^{\theta/\lambda}\int_{\theta/\lambda}^\infty e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy, \qquad \text{if } \alpha=2m-1 \quad (m=1,2,\ldots),$$

および

$$H(\theta;\lambda,\alpha)=2\left(e^{-\theta/\lambda}\int_{-\theta/\lambda}^0 e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy+e^{\theta/\lambda}\int_{\theta/\lambda}^\infty e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy\right), \qquad \text{if } \alpha=2m \quad (m=1,2,\ldots)$$

を表す．

構築. (4.6)式で $\xi(\theta,\lambda,\alpha)=1/\lambda$ $(\lambda>0)$ とすると

$$\int\left[\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}-\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left\{\exp\left(\frac{x^\alpha}{\lambda}\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}\right)\cdot(H(\theta;\lambda,\alpha))\right\}\right]d\theta$$
$$=\frac{\theta}{\lambda}\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}-\frac{x^\alpha}{\lambda}\cdot\frac{x^\alpha-\theta}{|x^\alpha-\theta|}-\ln H(\theta;\lambda,\alpha)=-\frac{|x^\alpha-\theta|}{\lambda}-\ln H(\theta;\lambda,\alpha).$$

そこで

$$I(\theta;\lambda,\alpha):=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x^\alpha-\theta|\right\}dx$$

と置いて，以下の二つの場合を考える：

［I］ $\alpha=2m-1$ $(m=1,2,\ldots)$ の場合：

$$I(\theta;\lambda,\alpha)=(\lambda^{1/\alpha}/\alpha)\left\{e^{-\theta/\lambda}\int_{-\theta/\lambda}^{\infty}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy+e^{\theta/\lambda}\int_{\theta/\lambda}^{\infty}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy\right\}$$
$$=:(\lambda^{1/\alpha}/\alpha)\cdot H_1(\theta;\lambda,\alpha),$$

但し

$$H_1(\theta;\lambda,\alpha)=e^{-\theta/\lambda}\int_{-\theta/\lambda}^{\infty}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy+e^{\theta/\lambda}\int_{\theta/\lambda}^{\infty}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy.$$

従って，

$$f(x;\theta,\lambda,\alpha)=\alpha/\lambda^{1/\alpha}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x^\alpha-\theta|-\ln H_1(\theta;\lambda,\alpha)\right\}.$$

［II］ $\alpha=2m$ $(m=1,2,\ldots)$ の場合：

$$I(\theta;\lambda,\alpha)=2(\lambda^{1/\alpha}/\alpha)\left(e^{-\theta/\lambda}\int_{-\theta/\lambda}^{0}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy+e^{\theta/\lambda}\int_{\theta/\lambda}^{\infty}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy\right)=:(\lambda^{1/\alpha}/\alpha)\cdot H_2(\theta;\lambda,\alpha),$$

但し

$$H_2(\theta;\lambda,\alpha)=2\left(e^{-\theta/\lambda}\int_{-\theta/\lambda}^{0}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy+e^{\theta/\lambda}\int_{\theta/\lambda}^{\infty}e^{-y}y^{1/\alpha-1}dy\right).$$

よって，

$$f(x;\theta,\lambda,\alpha)=\alpha/\lambda^{1/\alpha}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x^\alpha-\theta|-\ln H_2(\theta;\lambda,\alpha)\right\}$$

と表せ所要の分布型を得る．

注 4.5. $\alpha=1$ の時，上記の pdf. は Laplace 分布（or 二重指数分布）のそれに帰着する：

$$f(x;\theta,\lambda)=\frac{1}{2\lambda}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x-\theta|\right\},\qquad(-\infty<x<\infty,\lambda>0).$$

$\theta=0$ なら $H(\theta;\lambda,\alpha)=2\Gamma(1/\alpha)$．冪二重指数分布は一般誤差分布に帰着する：

$$f(x;\lambda,\alpha)=\frac{\alpha}{2\lambda^{1/\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}|x^\alpha|\right\},\qquad(-\infty<x<\infty,\lambda>0,\alpha:\text{正の整数}).$$

4.4 離散モデル

最初に，修正冪級数分布（modified power series distribution）を構築する．何故なら，それが非常に多数の離散分布を含んでいるからである．確率関数は次式で与えられる：

$$p(x;\theta)=C(x)\cdot\frac{[h(\theta)]^x}{k(\theta)},\qquad(x\in T;h(\theta),k(\theta)>0),\tag{4.7}$$

ここで T は非負整数の集合の部分集合で規格化関数 $C(x)>0$ は次式で与えられる：

$$k(\theta)=\sum_{x\in T} C(x)\cdot[h(\theta)]^x. \tag{4.8}$$

構築. 式(3.2)で

$$\varphi(x)=x\ (x\in T),\qquad \psi(\theta)=\frac{h(\theta)}{h'(\theta)}\frac{k'(\theta)}{k(\theta)},\qquad \xi(\theta)=\frac{h(\theta)}{h'(\theta)}.$$

と設定すると

$$p(x\,;\theta)\propto\exp\left[\int\frac{h'(\theta)}{h(\theta)}\left(x-\frac{h(\theta)}{h'(\theta)}\frac{k'(\theta)}{k(\theta)}\right)d\theta\right]=\exp\{x\ln h(\theta)-\ln k(\theta)\}.$$

従って，確率関数 $p(x\,;\theta)$ は次のように与えられる：

$$p(x\,;\theta)=C(x)\frac{[h(\theta)]^x}{k(\theta)},\qquad (x\in T),$$

ここで，$C(x)$ は次式を満たす様に決定される量である：

$$k(\theta)=\sum_{x\in T} C(x)\cdot[h(\theta)]^x.$$

注 4.6. 修正冪級数分布のクラスは Gupta (1974) で考察された．彼が指摘したようにこのクラスには離散確率モデルが数多く含まれる．例えば，Jain and Consul (1971) による一般化負の二項分布 (generalized negative binomial) およびその打ち切りの型が在る．また，Consul and Jain (1973) の一般化ポアソン分布 (generalized Poisson distribution)，そして一般化対数級数分布 (generalized logarithmic series distribution) が含まれる．それらの確率関数は $h(\theta)$ および $k(\theta)$ を適切に設定することにより得られる．また，係数 $C(x)$ は Lagrange's 展開を用いて求まる．

例 4.4.1. 一般化負の二項分布

$$p_{\mathrm{GNB}}(x\,;\theta,n,\beta)=\frac{n\Gamma(n+\beta x)}{x!\,\Gamma(n+\beta x-x+1)}\cdot\frac{\{\theta(1-\theta)^{\beta-1}\}^x}{(1-\theta)^{-n}},$$
$$(x=0,1,2,\ldots\,;n>0,0<\theta,|\theta\beta|<1),$$

これは $h(\theta)=\theta(1-\theta)^{\beta-1}$ および $k(\theta)=(1-\theta)^{-n}$ として求まる．$\beta=0,\beta=1$ の時上の分布は二項分布 $B_i(n,\theta)$ および負の二項分布 $NB_i(n,\theta)$ に帰着する．

例 4.4.2. 一般化ポアソン分布

$$p_{\mathrm{GPO}}(x\,;\theta,\lambda,\kappa)=\frac{\lambda(\lambda+\kappa x)^{x-1}}{x!}\cdot\frac{\{\theta e^{-\kappa\theta}\}^x}{e^{\lambda\theta}},\qquad (x=0,1,2,\ldots\,;\lambda\theta>0,|\kappa\theta|<1),$$

これは $h(\theta)=\theta e^{-\kappa\theta}$ および $k(\theta)=e^{\lambda\theta}$ とすればよい．$\kappa=0,\lambda=1$ の時上の分布はポアソン分布 $P_o(\theta)$ となる．

例 4.4.3. 一般化対数級数分布

$$p_{\mathrm{GLS}}(x\,;\theta,\beta)=\frac{\Gamma(\beta x)}{x\Gamma(x)\Gamma(\beta x-x+1)}\cdot\frac{\{\theta(1-\theta)^{\beta-1}\}^x}{-\ln(1-\theta)},\qquad (x=1,2,\ldots\,;0<\theta<1,0<\theta\beta<1),$$

これは $h(\theta)=\theta(1-\theta)^{\beta-1}$ および $k(\theta)=-\ln(1-\theta)$ として求まる．$\beta=1$ の時対数級数分布となる．

5. おわりに

統計基礎モデルの構築の問題は現代統計学が意図的に避けてきた問題であると言える．本稿ではこの問題を解決するために，パラメトリックな立場から，一つの接近法を示した．ここでの方法は，パラメーターおよび主変量が行列値の場合にも拡張可能である．また，ノンパラメトリックな場合も同様な議論が可能である．

本稿で基礎モデルを与える理論的根拠として，特定化方程式(3.1)，(3.27)を与え，それを基に第4章で具体的な一次元分布を構築した．しかし，例えば(3.27)における$\Delta(x;\theta,\boldsymbol{\tau})$および$\xi(\theta,\boldsymbol{\tau})$をデータからどのように選択するか，また(3.1)を基礎にする場合，どの平均を考えるかを，理論および数値計算・実験を通じて検討することが今後の重要な課題である．現代統計科学の中で重要な位置を占めているモデル選択の方法論は，その前提として，モデルビルディング(model building)の理論と方法の基盤の上に立つ必要がある．その段階でデータを有効に利用することが今後の統計科学の主要な研究課題の一つである．この部分で貢献できるか否かが，統計科学が真に独立した科学として存在していけるかどうかの鍵を握っているかも知れない．この問題に多様な視点から取り組み，21世紀へ向けての統計科学の展開の準備が必要とされているように思える．

謝辞

本稿に貴重なご意見，特に定理3.1の証明についてのコメント，を寄せられた二名の査読者に深く感謝します．

参考文献

Consul, P. C. and Jain, G. C. (1973). A generalization of the Poisson distribution, *Technometrics*, **15**, 791-799.

Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **222**, 309-368.

Gauss, C. F. (1809). *Theoria Motus Corporum Coelestium*, Perthes & Besser. (English Translation by C. H. Davis (1857). Little Brown, Boston)

Gupta, R. C. (1974). Modified power series distribution and some of its applications, *Sankhyā Ser. B*, **36**, 288-298.

Jain, G. C. and Consul, P. C. (1971). A generalized negative binomial distribution, *SIAM J. Appl. Math.*, **21**, 501-503.

Keynes, J. M. (1911). The principal averages and the laws of error which lead to them, *J. Roy. Statist. Soc.*, **24**, 322-331. (See also, (1962). *A Treatise on Probability*, 194-205, Harper & Row, New York)

Lehmann, E. L. (1990). Model specification: the views of Fisher and Neyman, and later developments, *Statist. Sci.*, **5**, 160-168.

Matsunawa, T. (1994). Origin of distributions, *Proc. Inst. Statist. Math.*, **42**(2), 197-214 (in Japanese).

Poincaré, H. (1912). *Calcul des Probabilité*, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris.

Taguchi, T., Sakurai, H. and Nakajima, S. (1993). A concentration analysis of income distribution model and consumption pattern. Introduction of logarithmic gamma distribution and statistical analysis of Engel elasticity, *Statistica*, **53**, 31-57.

Zacks, S. (1971). *The Theory of Statistical Inference*, Wiley, New York.

Basic Parametric Statistical Model Building without Assuming Existence of True Distributions

Tadashi Matsunawa

(The Institute of Statistical Mathematics)

Parametric statistical model buildings without assumption of true distributions are considered. To this end a specification equation is presented as a scaffolding of the model building. That consists of a parametric specific intensity of a model and a measurement error based on a generalized arithmetic mean or on a median for n independent data. An extended equation is also given. The modified exponential families having general functional forms are derived in order to build basic model distributions based on those equations. It is shown that many basic model distributions belong to the family. For instance, a power arithmetic mean derives the normal distribution, the gamma distribution and the inverse Gaussian distribution. A reciprocal log-power arithmetic mean derives the log-normal distribution and the log gamma distribution. Some important discrete distributions are also derived through the modified power series distribution along the same line as continuous cases.

Key words: Specification of parametric models, performance specific intensity, a specification equation, a generalized arithmetic mean, primary parameter, secondary parameter, a scaffolding distribution, a modified exponential family.