

# 目的論的モデル

統計数理研究所 石 黒 真 木 夫

(受付 1998 年 6 月 1 日; 改訂 1998 年 9 月 1 日)

## 要 旨

変動する環境にあるシステムのふるまいを説明する対立的(補完的)な2つの方法がある。一つはそのふるまいを刺激に対する反応として説明するものであり、他方はそのふるまいを何らかの目的のためとして説明するやり方である。このような2通りの説明法をそれぞれ因果論的説明、目的論的説明と名付けよう。この論文では線形システムのふるまいの目的論的説明を与えるモデルを提案する。このモデルは本来因果論的説明を与える多次元 AR モデルの係数行列を目的論的解釈を持つパラメータによってリパラメトライズしたものである。数値例としてセメントのロータリーキルンシステムの解析を示す。

キーワード: 多次元 AR モデル, 因果解析, 目的解析, セメントロータリーキルン。

## 1. はじめに

変動する環境にあるシステムのふるまいを説明する対立的(補完的)な2つの方法がある。一つはそのふるまいを刺激に対する反応として説明するものであり、他方はそのふるまいを何らかの目的を実現するために、最適なものとして説明するやり方である。このような2通りの説明法をそれぞれ因果論的説明、目的論的説明と名付けよう。この論文では線形システムのふるまいの目的論的説明を与えるモデルを提案する。これまで人間の制御動作の「因果論的」解析(たとえば、相馬(1994)、石黒・大矢(1995))や、制御系設計のためのコストのとり方に関する研究(たとえば、Fujii(1987))がなされて来たが、これらを結びつける形で制御動作を行っているサブシステムがいかなるコストに関する最適化を行っているのかという観点からの研究は行われていない。いわゆる逆制御系問題では、与えられた制御則が最適となるようなコストを求める事が行われる。このような方法を適用することも著者の関心事に答える一つの方法で有り得るが、本稿では現実の制御行動を(尤度の意味で)最も良く追従するような制御をもたらすようなコストを「推定」という手法を提案する。このモデルは本来因果論的説明を与える多次元 AR モデルの係数行列を目的論的解釈を持つパラメータによってリパラメトライズしたものである。数値例としてセメントのロータリーキルンシステムの解析を示す。

論文の構成は、第2節で多次元 AR モデルに関して復習し記号を用意した上で、その一部を最適制御系で置き換える方法を示す。第3節でこの結果を利用した目的論的モデルを構成し、そのあてはめ法を与える。第4節でセメントロータリーキルンにおけるオペレータの挙動を解析する。第5節で今後の研究を展望する。

## 2. 多次元 AR モデル

多次元 AR モデルは

$$(2.1) \quad x_t = \sum_{m=1}^M A_m x_{t-m} + \varepsilon_t$$

で表される。ここで、 $\{x_t\}$  は  $k$  次元ベクトルの系列、 $\{A_m\}$  は  $k$  次元係数行列である。時系列  $\{x_t\}$  の振る舞いは、次数  $M$ 、係数行列  $\{A_m: m=1, 2, \dots, M\}$  およびノイズ系列  $\{\varepsilon_t\}$  の分散共分散行列  $\Sigma$  などのパラメータによって、決定される。

与えられたデータ  $\{x_t: t=1, 2, \dots, N\}$  が (2.1) 式の機構で生成されると想定すると、最尤法でパラメータを推定することができる。データが十分に長い場合、 $\{A_m: m=1, 2, \dots, M\}$  の最尤推定値は近似的に最小二乗法で求められる。

$\{A_m\}$  の推定値が定まれば

$$\varepsilon_t = x_t - \sum_{m=1}^M A_m x_{t-m} \quad (t=1, 2, \dots, N), \quad B = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t \varepsilon_t'$$

として、

$$(2.2) \quad \Sigma = \frac{1}{N} B$$

が最尤法による  $\Sigma$  の推定値になる。次数  $M$  は

$$(2.3) \quad \text{AIC}_M = Nk \log 2\pi + N \log \det \Sigma + Nk + 2Mk^2 + (k+1)k$$

の最小化で決めることができる。システムを 2 つのサブシステムが結合したものと考えると、

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{w}_t \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} A_m^{yy} & A_m^{yw} \\ A_m^{wy} & A_m^{ww} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t-m} \\ \mathbf{w}_{t-m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix}$$

という構造を考える。

$$(2.5) \quad \mathbf{y}_t = \sum_{m=1}^M A_m^{yy} \mathbf{y}_{t-m} + \sum_{m=1}^M A_m^{yw} \mathbf{w}_{t-m} + \boldsymbol{\zeta}_t$$

$$(2.6) \quad \mathbf{w}_t = \sum_{m=1}^M A_m^{wy} \mathbf{y}_{t-m} + \sum_{m=1}^M A_m^{ww} \mathbf{w}_{t-m} + \boldsymbol{\eta}_t$$

とする。ベクトル  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{w}$  の次元をそれぞれ  $k_1$ ,  $k_2$  とする。 $\boldsymbol{\zeta}_t$  と  $\boldsymbol{\eta}_t$  が独立であるとする。これらの分散共分散行列をそれぞれ  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  として、AIC は

$$(2.7) \quad \text{AIC}_M = \sum_{j=1}^2 \{Nk_j \log 2\pi + N \log \det \Sigma_j + Nk_j + 2Mk_j^2 + (k_j+1)k_j\}.$$

### 2.1 最適制御の設計

(2.6) 式で表される部分を最適制御系で置きかえることを考える。 $\mathbf{w}_{t-1}, \mathbf{w}_{t-2}, \dots$  から  $\mathbf{y}_t$  への影響の仕方を記述する (2.5) は

$$\mathbf{y}_t = A_1^{yy} \mathbf{y}_{t-1} + A_1^{yw} \mathbf{w}_{t-1} + \sum_{m=1}^M A_m^{yy} \mathbf{y}_{t-m} + \sum_{m=2}^M A_m^{yw} \mathbf{w}_{t-m} + \boldsymbol{\zeta}_t$$

と書き直せる。ここで

$$\mathbf{z}_t^l = \sum_{m=L+1}^M A_m^{yy} \mathbf{y}_{t+L-m} + \sum_{m=L+1}^M A_m^{yw} \mathbf{w}_{t+L-m}$$

とおくと

$$\mathbf{y}_t = A_1^{yy} \mathbf{y}_{t-1} + A_1^{yw} \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{z}_t^1 + \boldsymbol{\zeta}_t$$

となる。この  $z$  に関しては  $L=1, 2, \dots, M-1$  に対して

$$\begin{aligned} z_t^L &= \sum_{m=L+1}^M A_m^{yy} y_{t+L-m} + \sum_{m=L+1}^M A_m^{yw} w_{t+L-m} \\ &= A_{L+1}^{yy} y_{t-1} + A_{L+1}^{yw} w_{t-1} + \sum_{m=L+2}^M A_m^{yy} y_{t+L-m} + \sum_{m=L+2}^M A_m^{yw} w_{t+L-m} \\ &= A_{L+1}^{yy} y_{t-1} + A_{L+1}^{yw} w_{t-1} + z_t^{L+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし  $z_t^M = 0$  とする。これから

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} y_t \\ z_t^1 \\ \vdots \\ z_t^{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{yy} & I & & \\ A_2^{yy} & & \ddots & \\ \vdots & & & I \\ A_M^{yy} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1}^1 \\ \vdots \\ z_{t-1}^{M-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^{yw} \\ A_2^{yw} \\ \vdots \\ A_M^{yw} \end{pmatrix} w_{t-1} + \begin{pmatrix} \zeta_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。この式は  $w_{t-1}$  から  $y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots$  への影響を表現する式と考えることができる。

$$\begin{aligned} z_t &= (y_t', (z_t^1)', \dots, (z_t^{M-1})')' \\ u_t &= (\zeta_t', 0', 0', \dots, 0')' \end{aligned}$$

として、この式を

$$(2.9) \quad z_t = \Phi z_{t-1} + \Gamma w_{t-1} + u_t$$

で表すことにする。  $\Phi, \Gamma$  などの定義は式 (2.8) から明らかであろう。  
制御のコストを

$$(2.10) \quad J = \sum_{t=1}^T J_t$$

$$(2.11) \quad J_t = E_t \left\{ \begin{pmatrix} z_{t+1} \\ w_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{t+1} \\ w_t \end{pmatrix} + (z_{t+1} - z_t)' Q^\Delta (z_{t+1} - z_t) \right. \\ \left. + (w_t - w_{t-1})' R^\Delta (w_t - w_{t-1}) \right\}$$

で定義する。ただし

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix}$$

と  $Q^\Delta, R^\Delta$  は正定値行列であり、  $E_t$  は  $w_t, w_{t-1}, z_t$  が与えられたもとでの  $z_{t+1}$  に関する期待値を意味するものとする。  $\{w_t\}$  への応答が (2.9) 式で与えられるシステムをコスト (2.10) に関して最適化する制御をダイナミックプログラミングの手法で求めることができる (Widnall (1968))。

(2.11) 式は、  $H, g, f$  を

$$(2.12) \quad \begin{aligned} H &= \Gamma'(Q + Q^\Delta)\Gamma + \Gamma'S + S'T\Gamma + R + R^\Delta \\ g &= Az_t + R^\Delta w_{t-1} \\ f &= z_t' Bz_t + w_{t-1}' R^\Delta w_{t-1} + E\{u_{t+1}'(Q + Q^\Delta)u_{t+1}\} \end{aligned}$$

のように定義することによって次のように整理される。

$$(2.13) \quad \begin{aligned} J_t &= \mathbf{w}'_t H \mathbf{w}_t - 2\mathbf{g}' \mathbf{w}_t + f \\ &= (\mathbf{w}_t - H^{-1}\mathbf{g})' H (\mathbf{w}_t - H^{-1}\mathbf{g}) + f - \mathbf{g}' H^{-1}\mathbf{g} \end{aligned}$$

ただし  $A$  と  $B$  は

$$(2.14) \quad A = -(\Gamma'(Q + Q^\Delta)\Phi + S'\Phi - \Gamma'Q^\Delta)$$

$$(2.15) \quad B = \Phi'Q\Phi + (\Phi - I)'Q^\Delta(\Phi - I)$$

で定義されるものとする。(2.13) 式から、最適な  $\mathbf{w}_t$  は

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_t &= H^{-1}\mathbf{g} = H^{-1}A\mathbf{z}_t + H^{-1}R^\Delta\mathbf{w}_{t-1} \\ &= G^t\mathbf{z}_t + D^t\mathbf{w}_{t-1} \end{aligned}$$

となり、その時の (2.13) 式の最小値は

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \hat{J}_t &= f - \mathbf{g}' H^{-1}\mathbf{g} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{w}_{t-1} \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} B - A'H^{-1}A & -A'H^{-1}R^\Delta \\ -R^\Delta H^{-1}A & R^\Delta - R^\Delta H^{-1}R^\Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{w}_{t-1} \end{pmatrix} + \text{const.} \end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{w}_t$  を  $\mathbf{z}_t$  と  $\mathbf{w}_{t-1}$  から計算する制御則が  $(G^t, D^t)$  として得られるわけである。 $\hat{J}_t$  において  $t=T$  とした  $\hat{J}_T$  を用いて、 $J$  を書き直して

$$(2.18) \quad \begin{aligned} J &= \hat{J}_T + \sum_{t=1}^{T-1} J_t \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{z}_T \\ \mathbf{w}_{T-1} \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} B - A'H^{-1}A & -A'H^{-1}R^\Delta \\ -R^\Delta H^{-1}A & R^\Delta - R^\Delta H^{-1}R^\Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_T \\ \mathbf{w}_{T-1} \end{pmatrix} + \sum_{t=1}^{T-1} J_t \end{aligned}$$

$$(2.19) \quad \begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \mathbf{z}_T \\ \mathbf{w}_{T-1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Q' & \tilde{S} \\ \tilde{S}' & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_T \\ \mathbf{w}_{T-1} \end{pmatrix} + (\mathbf{z}_T - \mathbf{z}_{T-1})' Q^\Delta (\mathbf{z}_T - \mathbf{z}_{T-1}) \\ &\quad + (\mathbf{w}_T - \mathbf{w}_{T-2})' R^\Delta (\mathbf{w}_{T-1} - \mathbf{w}_{T-2}) + \sum_{t=1}^{T-2} J_t \end{aligned}$$

を得る。この式は (2.11) 式の第1項の  $\begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix}$  を

$$(2.20) \quad \begin{pmatrix} Q' & \tilde{S} \\ \tilde{S}' & R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B - A'H^{-1}A & -A'H^{-1}R^\Delta \\ -R^\Delta H^{-1}A & R^\Delta - R^\Delta H^{-1}R^\Delta \end{bmatrix}$$

で置きかえ、 $T$  を  $T-1$  で置きかえたものに等しい。(2.20) 式と (2.14) 式と (2.15) 式を繰り返し用いる事によって、制御則  $(G^{T-1}, D^{T-1}), (G^{T-2}, D^{T-2}), \dots, (G^0, D^0)$  を次々に求める事ができる。定常状態での制御則が  $\mathbf{w}_t = G^0\mathbf{z}_t + D^0\mathbf{w}_{t-1}$  で行われているものとして、この式の  $\mathbf{z}_t$  を消して、もとの  $y$  と  $w$  から計算する形に戻してみる。

$G^0 = (G_1, G_2, \dots, G_M)$  として、

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= G_1\mathbf{y}_0 + \sum_{l=2}^M G_l \mathbf{z}_0^{l-1} + D^0\mathbf{w}_{-1} \\ &= G_1\mathbf{y}_t + \sum_{L=2}^M \sum_{k=L}^M G_L (A_k^{y^y}, A_k^{y^w}) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t+L-1-k} \\ \mathbf{w}_{t+L-1-k} \end{pmatrix} + D^0\mathbf{w}_{t-1} \end{aligned}$$

となるから、 $L = k - m + 1$  として

$$\begin{aligned}
 (2.22) \quad \mathbf{w}_t &= G_1 \mathbf{y}_t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=m+1}^M G_{k+1-m} (A_k^{yy}, A_k^{yw}) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t-m} \\ \mathbf{w}_{t-m} \end{pmatrix} + D^0 \mathbf{w}_{t-1} \\
 &= \sum_{m=1}^{M-1} G_1 (A_m^{yy}, A_m^{yw}) + G_1 \boldsymbol{\zeta}_t \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=m+1}^M G_{k+1-m} (A_k^{yy}, A_k^{yw}) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t-m} \\ \mathbf{w}_{t-m} \end{pmatrix} + D^0 \mathbf{w}_{t-1} \\
 &= \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{k=m}^M G_{k+1-m} (A_k^{yy}, A_k^{yw}) \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t-m} \\ \mathbf{w}_{t-m} \end{pmatrix} + G_1 \boldsymbol{\zeta}_t + D^0 \mathbf{w}_{t-1}
 \end{aligned}$$

を得る。結局、この制御のもとでのシステム全体の振る舞いは、

$$(2.23) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{w}_t \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} A_m^{yy} & A_m^{yw} \\ \tilde{A}_m^{wy} & \tilde{A}_m^{ww} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t-m} \\ \mathbf{w}_{t-m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_t \\ G_1 \boldsymbol{\zeta}_t \end{pmatrix}$$

で記述されることになる。ただし

$$(2.24) \quad \tilde{A}_m^{wy} = \sum_{k=m}^M G_{k+1-m} A_k^{yy}$$

$$(2.25) \quad \tilde{A}_m^{ww} = \begin{cases} \sum_{k=1}^M G_k A_k^{yw} + D^0 & (m=1) \\ \sum_{k=m}^M G_{k+1-m} A_k^{yw} & (m=2, \dots, M) \end{cases}$$

である。

### 3. 目的論的モデル

(2.23) 式の  $\mathbf{w}_t$  に加わるノイズを  $G_1 \boldsymbol{\zeta}_t$  の代わりに  $\boldsymbol{\zeta}_t$  と独立な  $\boldsymbol{\xi}_t$  で置きかえた

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{w}_t \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} A_m^{yy} & A_m^{yw} \\ \tilde{A}_m^{wy} & \tilde{A}_m^{ww} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t-m} \\ \mathbf{w}_{t-m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_t \\ \boldsymbol{\xi}_t \end{pmatrix}$$

を目的論的モデルと呼び、

$$(3.2) \quad x_t = \sum_{m=1}^M \tilde{A}_m x_{t-m} + \tilde{\varepsilon}_t$$

で表すことにする。

制御の目的がシステムの安定化であるなら、その出力の平均値からの乖離をなるべく少くしようという意識が働いていることは多分まちがいがなからう。しかも、この値をコントロールするにあたって、あまり急激な操作は避けたいという意識があると想定される。このような「目的」を表現できる単純な形のコストとして、

$$(3.3) \quad J = E \left\{ \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_{t+1}' U \mathbf{y}_{t+1} + \mathbf{w}_t' R \mathbf{w}_t + (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_t)' U^\Delta (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_t) + (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1})' R^\Delta (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}) \right\}$$

を考える。この場合、 $\{A_m^{yy}, A_m^{yw}; m=1, \dots, M\}$ ,  $U$ ,  $U^\Delta$ ,  $R$ ,  $R^\Delta$  および  $\boldsymbol{\zeta}_t$  と  $\boldsymbol{\xi}_t$  の分散共分散行列  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  が目的論的モデルのパラメータということになる。このコスト (3.3) の  $U$ ,  $U^\Delta$ ,  $R$ ,  $R^\Delta$  を  $t$  に依存するようにしたコスト

$$(3.4) \quad J = E \left\{ \sum_{t=1}^T \mathbf{y}'_{t+1} U_t \mathbf{y}_{t+1} + \mathbf{w}'_t R_t \mathbf{w}_t + (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_t)' U_t^\Delta (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_t) + (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1})' R_t^\Delta (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}) \right\}$$

にもとづく目的論的モデルを考えることも可能である。この論文で利用するのは、

$$\begin{aligned} U_t &= \tau^t U = \tau^t \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{k_1} \end{pmatrix} \\ R_t &= \tau^t R = \tau^t \begin{pmatrix} u_{(k_1+1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_k \end{pmatrix} \\ U_t^\Delta &= \tau^t U^\Delta = \tau^t \begin{pmatrix} u_1^\Delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{k_1}^\Delta \end{pmatrix} \\ R_t^\Delta &= \tau^t R^\Delta = \tau^t \begin{pmatrix} u_{(k_1+1)}^\Delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_k^\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とするモデルである。このモデルのパラメータの集合は

$$\{\tau, u_1, \dots, u_k, u_1^\Delta, \dots, u_k^\Delta\} \cup \{A_m^{yy}, A_m^{yw}; m=1, \dots, M\} \cup \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$$

で、 $\sum_j \{u_j + u_j^\Delta\} =$  (たとえば) 1 という制約を置く必要があることと、 $\Sigma_1, \Sigma_2$  が対称行列であるために自由パラメータ数は

$$\tilde{K} = 2 \times k + k_1 \times k \times M + (k_1 + 1)k_1/2 + (k_2 + 1)k_2/2$$

となる。

#### モデルのあてはめと評価。

1. 最小二乗法によってモデル (2.4) の係数を推定し、 $M$  を AIC ((2.7) 式) 最小化法で定める。
2. パラメータ  $\{\tau, u_1, \dots, u_k, u_1^\Delta, \dots, u_k^\Delta\}$  を固定して 2.1 節の方法により、係数行列 (2.24), (2.25) を決める。
3.  $\{\mathbf{w}_t\}$  の予測誤差の分散共分散行列  $\Sigma_2$  を求め、尤度

$$(3.5) \quad -\{Nk_2 \log 2\pi + N \log \det \Sigma_2 + Nk_2\}/2$$

を計算する。

4. 上記尤度を最大化するようにパラメータを選ぶ。
5. モデル全体の AIC を下記で定義する。

$$(3.6) \quad \text{AIC} = \sum_{i=1}^2 \{NK_i \log 2\pi + N \log \det \Sigma_i + NK_i\} + 2 \times \tilde{K}$$

**注意.** この手順で「パラメータが推定」できるか否か問題になるが、最尤法が解を持つことはこのモデルが通常の多次元 AR モデルのリパラメトリゼーションで得られたものである事から自明である。解がユニークである保証はないが、それを最尤解の位置における尤度関数の形を調べる事によってチェックする事が可能である。又、最尤法であるが故に、更に制約を加えて解の不定を解消すること、その適否を AIC によって判定することなども可能であることを付記しておく。

モデルのあてはめができると、パラメータ  $\{\tau, u_1, \dots, u_k, u_1^A, \dots, u_k^A\}$  からこのシステムの「目的論的」な性格を読みとることができる。もちろん周波数応答関数

$$(3.7) \quad F(f) = \left[ I - \sum_{m=1}^M \tilde{A}_m e^{-i2\pi f m} \right]^{-1} \quad (0 \leq f \leq 0.5)$$

と、クロスパワースペクトル、

$$(3.8) \quad P(f) = F(f) \Sigma F^*(f) \quad (0 \leq f \leq 0.5)$$

もただちに計算できる (尾崎 (1988))。ここで  $I$  は単位行列、 $(*)$  は共約転置の意味である。パワースペクトルの内訳を見るためのパワー寄与率も計算できる (赤池・中川 (1972))。

#### 4. 数 値 例

**データ.** 図1にセメントのロータリーキルンの概念図を示す。図2はロータリーキルンの運転記録である。長さ511, 7チャンネルである。第1変数から第3変数までが被制御変数, つまり被制御システムであるセメントのロータリーキルンの状態を表す変数, 残りの4変数が制御入力である。図1に測定点が表示されている。図中 Wattage などと記されている略称の意味に関しては表1にまとめておいた (Otomo et al. (1972), Hagimura et al. (1988), 八木原 (1976))。グラフは原データから平均を引いてある。横軸の時間の単位は“時間”である。

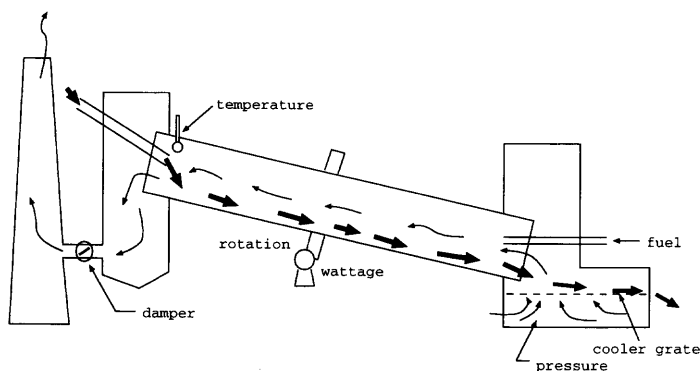


図1. セメントロータリーキルン。

表1. 測定変数。

番号	略称	内容	単位	測定値の分散	測定値の一次階差の分散
1	Wattage	キルン駆動所要動力	(kW)	.223D+05	.233D+04
2	Pressure	クーラ下室圧力	(mmH <sub>2</sub> O)	.132D+08	.447D+0
3	Temperature	窯灰ガス温度	(° C)	.139D+05	.923D+03
4	R	キルン回転速度	(r.p.h.)	.145D+07	.189D+07
5	Fuel	燃料供給率	(m <sup>3</sup> /hr)	.236D+05	.644D+04
6	CR	クーラグレート速度	(r.p.m.)	.260D+07	.423D+06
7	Damper	窯灰ダンパ開度	(°)	.131D+06	.168D+05

**モデルのあてはめ.** ARモデルを当てはめたところ、次数6のARモデルがAICの意味で最良のモデルとして選ばれた。このモデルのAICの値は25130.8であった。

「目的論的モデル」をあてはめたところ、AICは25131.2であった。(数値的最適化にはDALL (Ishiguro and Akaike (1989))を用いた。14次元空間における最適化の計算ということになるが、並列計算機SP2の15ノード使用で4分11秒を要した。)情報量規準の観点から「因果

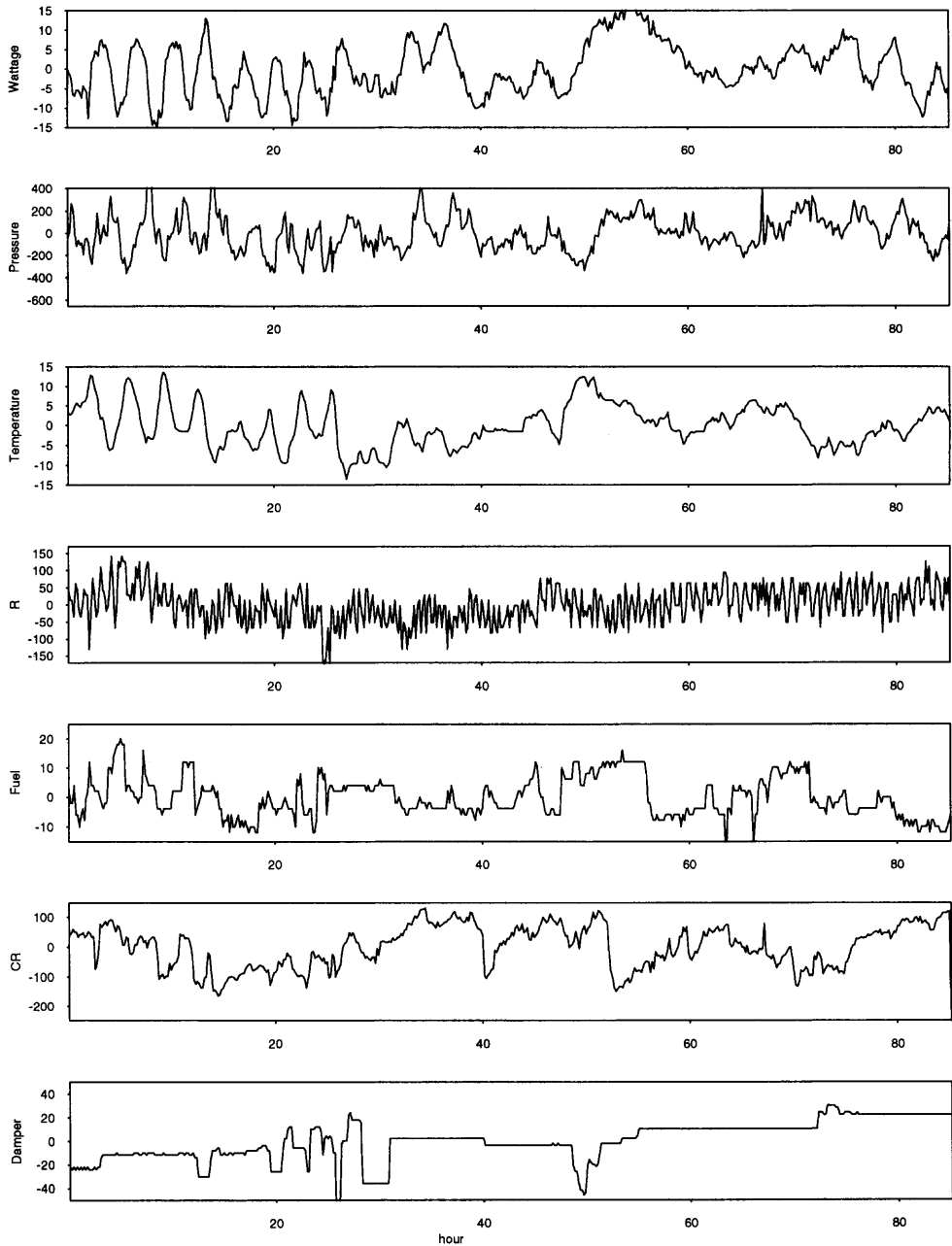


図2. セメントロータリーキルンの運転記録。



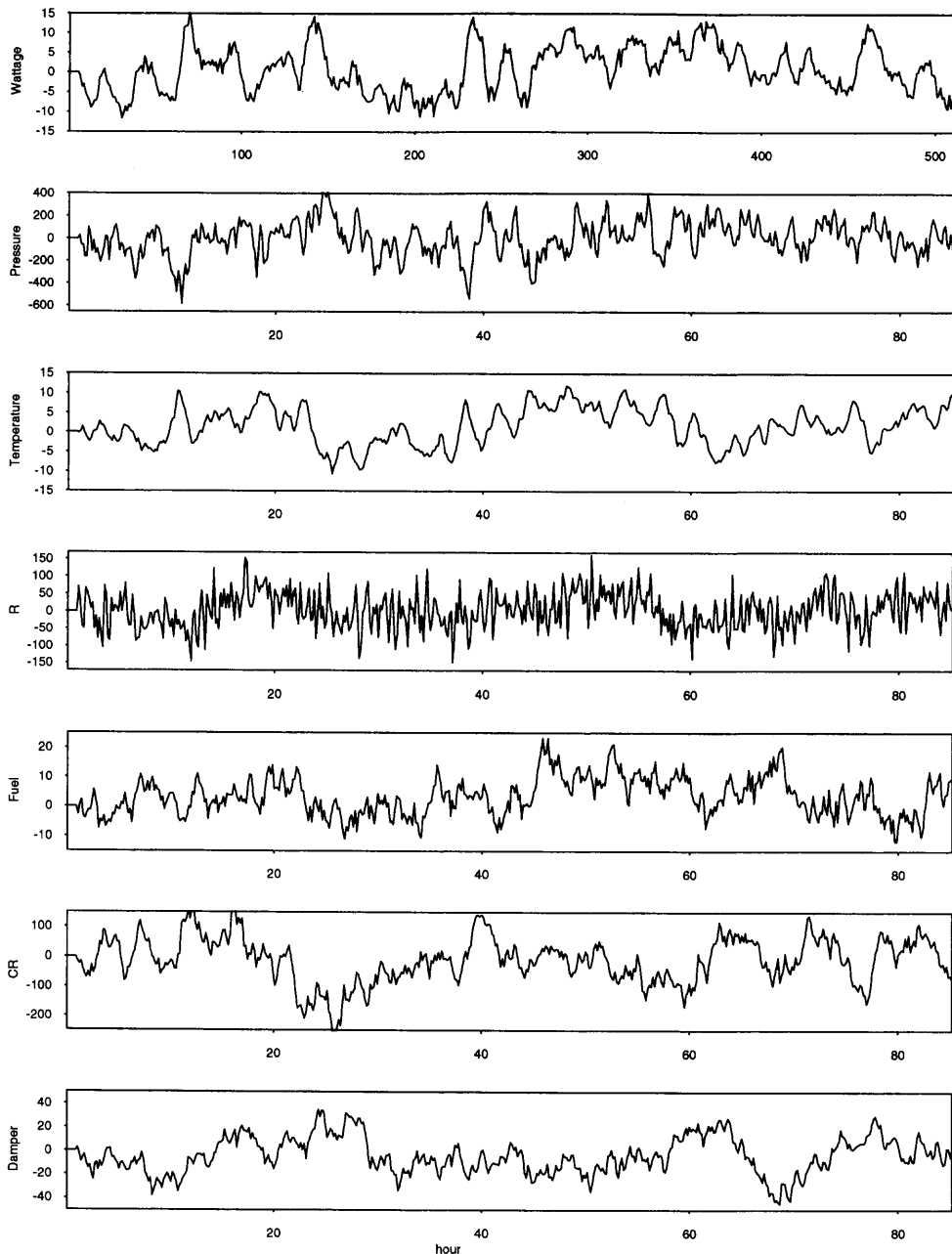


図3(a). ロータリーキルン運転のシミュレーション結果 (普通の多次元ARモデルによるもの).

論モデル」とほぼ同等のモデルといえる。実際、同じ乱数を用いたシミュレーションで両者が非常によく似た結果を出すこともこの2つのモデルがほとんど同等であることを示している(図3(a), (b))。2つのモデルから得られるパワースペクトルとノイズ寄与率を比較しても両者がキルンの変動を同じようにとらえていることが明らかである(図4.1(a), (b)~4.7(a),

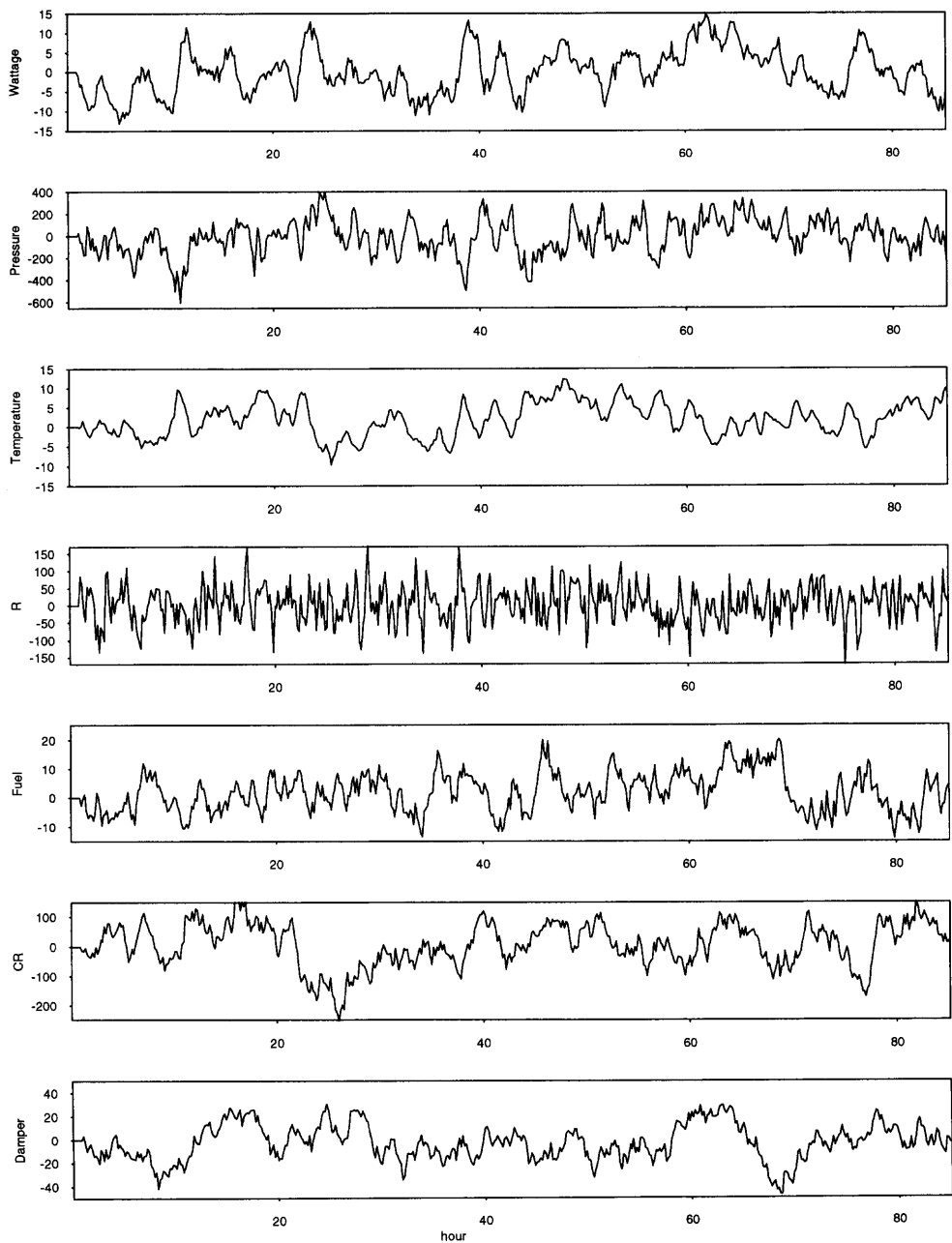


図3(b). ロータリーキルン運転のシミュレーション結果 (目的論的モデルによるもの)。

(b). パワースペクトルが図の上半分に描かれており、下半分がパワー寄与率である。パワー寄与率の図では線の代りに1, 2, 3の数字でそれぞれの成分のパワー寄与率の割合が積み上げグラフの形で示されている。下の0の線から1が並んでいる部分までがその周波数帯における1番目のチャンネルからの寄与率、1と2の間が2番目のチャンネルから、2と3の間がチャンネル3からの寄与である、等々。

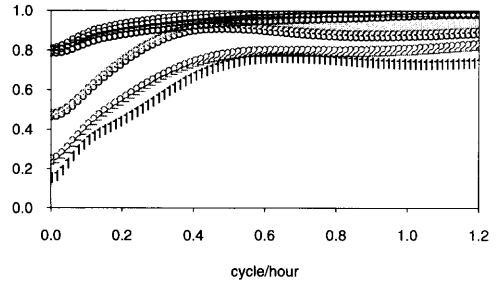
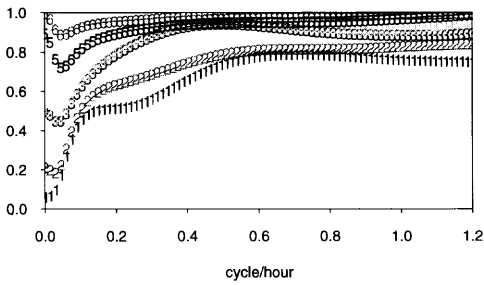
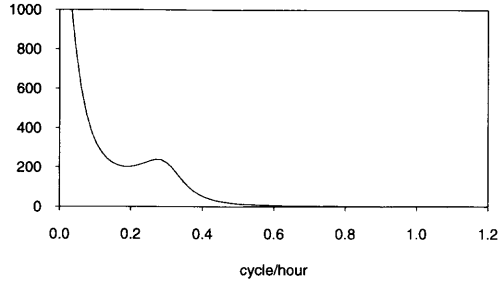
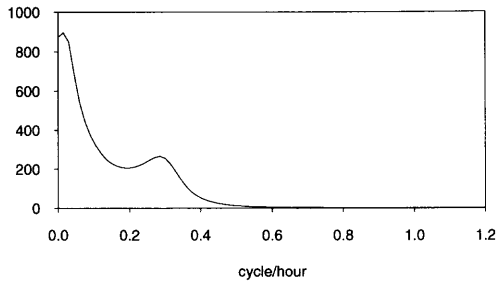


図 4.1(a). 1 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.1(b). 1 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

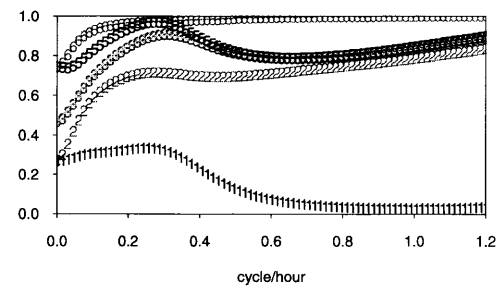
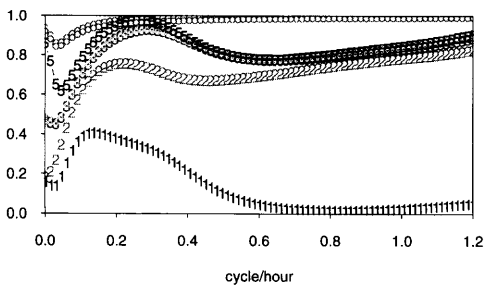
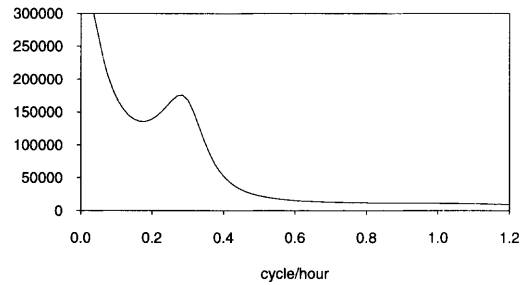
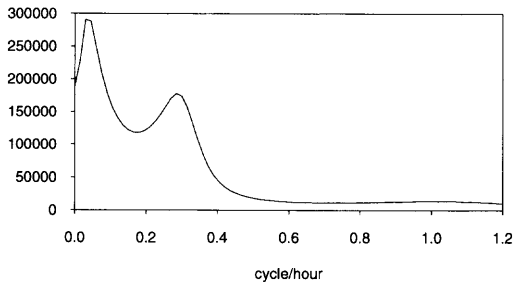


図 4.2(a). 2 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.2(b). 2 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

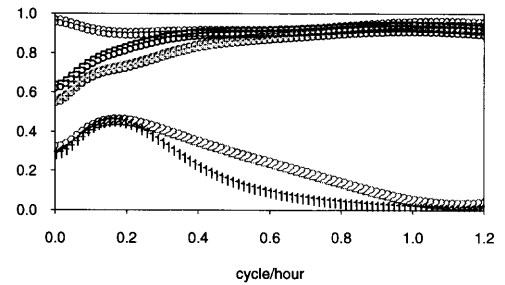
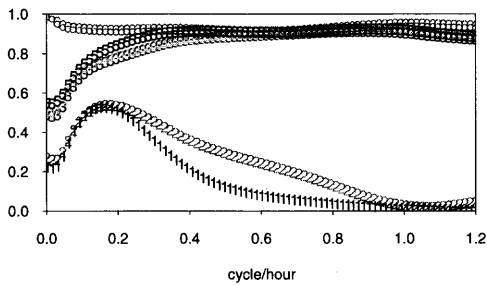
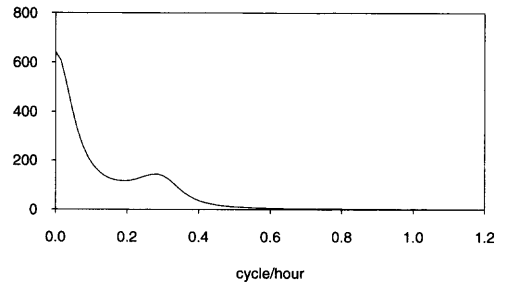
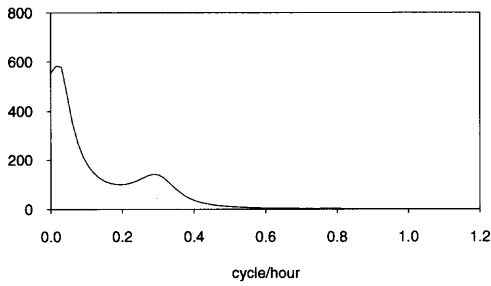


図 4.3(a). 3 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.3(b). 3 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

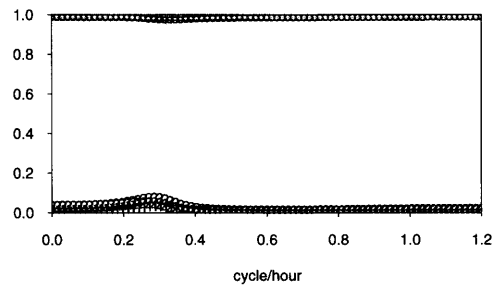
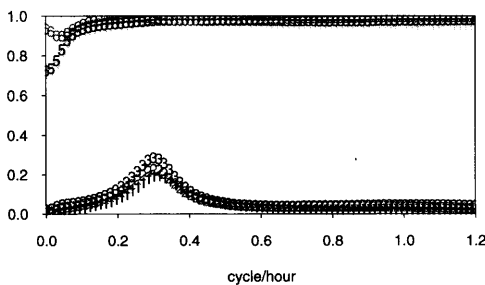
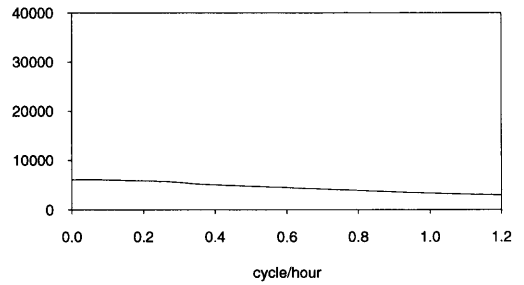
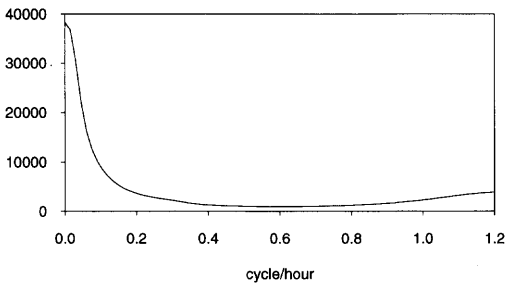


図 4.4(a). 4 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.4(b). 4 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

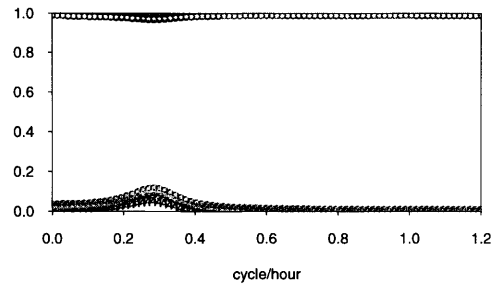
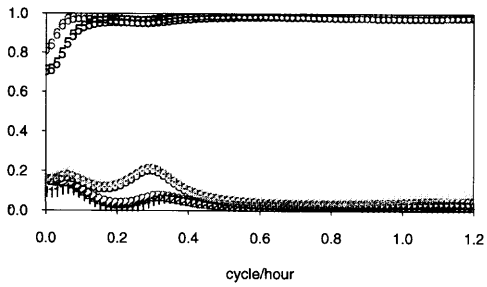
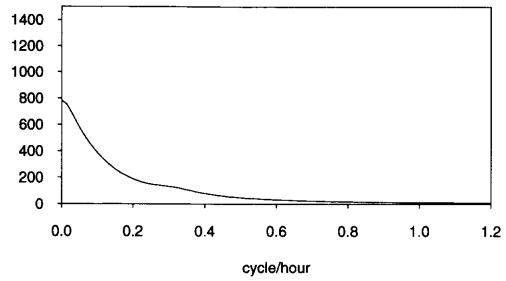
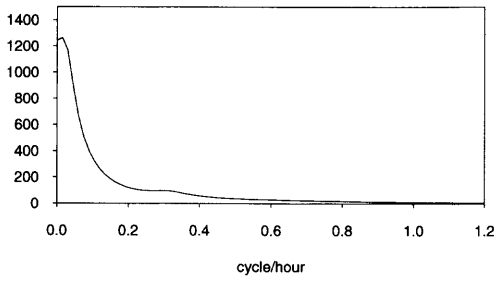


図 4.5(a). 5 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.5(b). 5 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

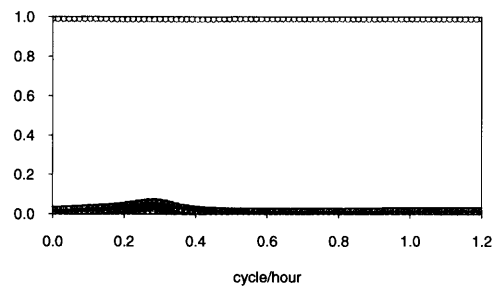
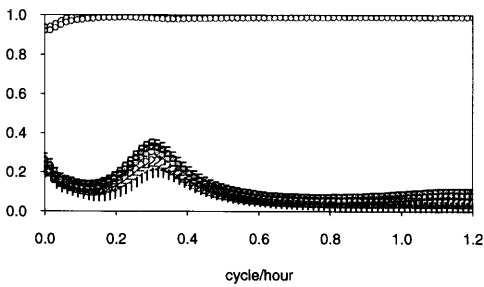
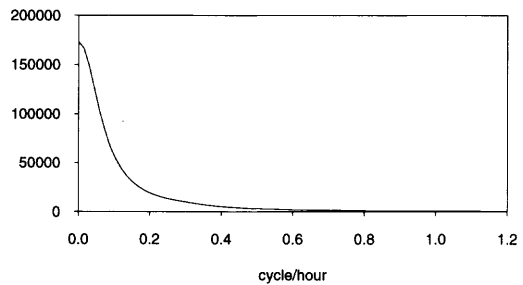
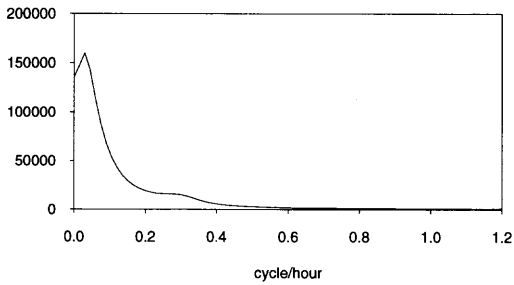


図 4.6(a). 6 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.6(b). 6 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

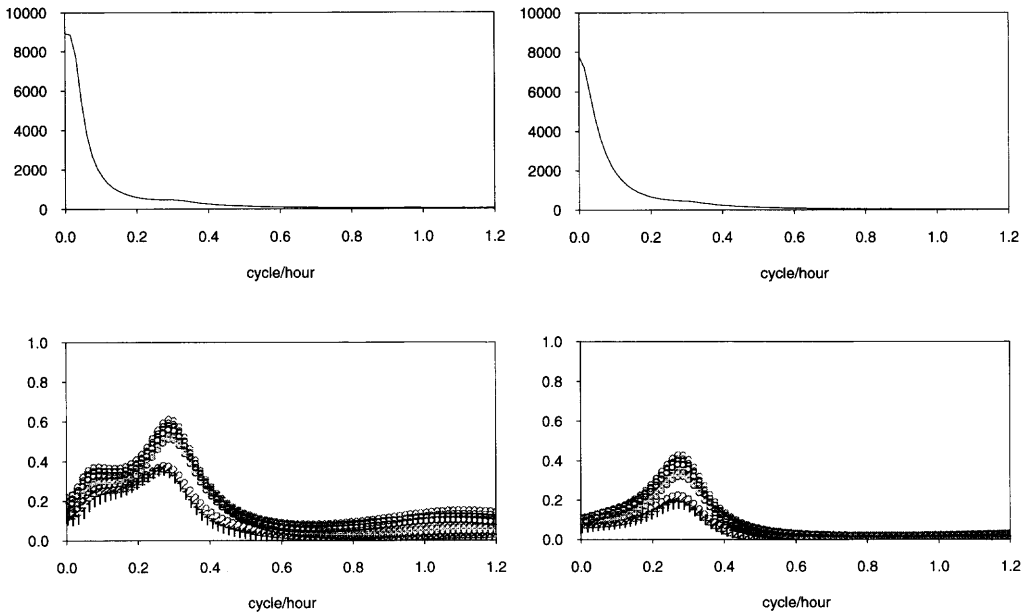


図 4.7(a). 7 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (普通の多次元 AR モデルによるもの)。

図 4.7(b). 7 ch のパワースペクトルとパワー寄与率 (目的論的モデルによるもの)。

表 2. 目的論的モデルのパラメータの推定値。

$$\tau = .0016$$

番号 ( $l$ )	$u_l$	$u_l^\Delta$
1	1.0000	7272.3663
2	.0010	8.6567
3	.0009	4741.6488
4	5.7478	.0030
5	674.8379	.9182
6	103.3495	.1494
7	230.8097	.3345

数字が重なっているところはそのチャンネルからの寄与が少いことを意味している。これらの図を見てもともと最小 2 乗法ですべての AR の係数を推定した場合に得られているパワースペクトルの形が我々の目的論的モデルを仮定したモデルによって推定されたパワースペクトルの形と良く似ていること、パワーの内訳であるパワー寄与率の形もよく似ていることが分かる。

パワースペクトルの形を比較すると第 1 チャンネルは低周波が勝っていて 0.3 cycle/hour のあたりに小さな山があり、よく似た形をしている。パワー寄与率は 1 チャンネル自身からの寄与が多く、それ以外から均等にきているという点が共通している。

2 チャンネルも基本的にパワースペクトルの形が似ていてパワー寄与率も 1 チャンネルと 2 チャンネルからかなり大きく 3 チャンネルもあるがそれ以外はかなり少いという点で共通の構

造を持っている。3チャンネルのパワー寄与率は2チャンネルからが非常に少ない。6チャンネルからの寄与が低周波で目立つという特徴が両方に共通に見られる。5チャンネルではパワースペクトルの高さが違っているが、パワー寄与率の構造はおおまかに合っているとみていい。6チャンネルも少しパワースペクトルの形が違うが、低周波が勝っているという点は共通してパワー寄与率の構造も本質的には同じとみていい。

7チャンネルはよく似ていると言っている。4チャンネルがかなり違っているが、もとのデータをながめて見ると非常に細かく動いている。この動きを white に近いという考え方を一方のモデルがしているのに対して、もう一方はその中に含まれている非常に低周波成分をつかまえている。もともとこのチャンネルの変動は周波数帯が他のチャンネルとは違うのが解析を難しくしているのではないかとみられる。

**結果の解釈.** 「目的論的モデル」のパラメータの推定値を表2に示す。表2から以下のようなことが読み取れる。

1.  $\tau$  が1にくらべて非常に小さい。これはオペレータがあまり先までのことを考えずに操作していたと解釈できる。

2. オペレータは窯尻ガス温度が平均から  $1/\sqrt{0.0009}=33.3^{\circ}\text{C}$  はずれることと、燃料供給率の平均からのずれが  $1/\sqrt{674.8}=0.038\text{m}^3/\text{hr}$  となること、制御の「コスト」として同等であると見なしている。

3. オペレータは窯尻ガス温度が平均から  $1/\sqrt{0.0009}=33.3^{\circ}\text{C}$  はずれることと、クーラ下室圧力が平均から  $1/\sqrt{0.0010}=3.16\text{mm H}_2\text{O}$  はずれることを同等と見なしている。

4. 等々

## 5. 最後 に

この論文で紹介したのはシステムの中で起こっていることを「目的」という観点から見る方法である。この稿で紹介したのは以下の点で暫定的なものであり、今後の計算機性能の向上にしたがって本来の形になるはずである。

1.  $A_{\text{燃}}$ ,  $A_{\text{窯}}$  等の係数ははじめの最小2乗法で決めて固定している。この部分も制御パラメータと同時に最適化する必要があるが、現状では、大規模な最適化の計算時間がかかりすぎるために行っていない。

2. 「オペレータ」がシステムの入出力関係の正確な知識を持っているという仮定のもとで、「目的論的モデル」を構成したが、この前提はかならずしも正しくないはずである。「オペレータ」がシステムの入出力関係を「誤解」している場合を想定した解析が必要になる場合があると思われる。

3. 「目的」が時間変化する場合や、複数の「オペレータ」の「個性」を調べるような場合への拡張が必要である。

上記1. で述べた点による影響はAICの値が過大に評価されている事を意味しており、正確な最適化を行うことにより現モデルで述べたより以上により結果が得られるであろうことを示している。このような形でスポーツにおける体の制御を解析する事によって、「客観的動作」と「主観的動作」を関連づけられると面白いと考えている。

## 謝 辞

この稿にまとめたのは“制御行動の目的論的モデル”というタイトルのもとで1994年度統計数理研究所共同研究研究会「時系列解析の理論と応用」(6-共会-5)(1994.11.21)に明治大学の矢野多喜夫教授と共同で発表し、さらに1997年度統計数理研究所共同研究研究会(9-共会-6)「時系列解析の理論と応用」(平成9年11月13日)に「目的論的モデル」というタイトルで発表した内容をもとにしたものである。計算は統計数理研究所のIBM RS/6000-SP計算統計学支援システムで行われた。査読者からの建設的なコメントがありがたかった。心から感謝する。

## 参 考 文 献

- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). 『ダイナミックシステムの統計的解析と制御』, サイエンス社, 東京.
- Fujii, T. (1987). A new approach to the LQ design from the viewpoint of the inverse regulator problem, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-32**(11), 995-1004.
- Hagimura, S., Saitoh, T. and Yagihara, Y. (1988). Application of time series analysis and modern control theory to the cement plant, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **40**(3), 419-438.
- Ishiguro, M. and Akaike, H. (1989). DALL: Davidon's algorithm for log likelihood maximization, *Comput. Sci. Monographs*, No. 25, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- 石黒真木夫, 大矢多喜夫 (1995). ARdockによる「人-二輪者システム」の解析, 『時系列解析の実際II』(赤池弘次, 北川源四郎 編), 19-39, 朝倉書店, 東京.
- Otomo, T., Nakagawa, T. and Akaike, H. (1972). Statistical approach to computer control of cement rotary kilns, *Automatica J. IFAC*, **8**, 35-48.
- 尾崎 統 編 (1988). 『時系列論』, 放送大学教育振興会, 東京.
- 相馬 仁 (1994). 人間-自動車系の動特性解析, 『時系列解析の実際I』(赤池弘次, 北川源四郎 編), 105-126, 朝倉書店, 東京.
- Widnall, W. S. (1968). *Applications of Optimal Control Theory to Computer Controller Design*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- 八木原彬股 (1976). セメントプロセスの制御, *数理科学*, **153**, 53-59.



## Teleological Model

Makio Ishiguro

(The Institute of Statistical Mathematics)

There are two opposing (or complementary) ways of explaining dynamic behavior of systems in varying environment. One is to explain the behavior as responses to stimuli. The other is to explain the behavior as something for purpose. We will call these ways of explanation by causal explanation and teleological explanation, respectively. In this paper I propose a model to give a teleological explanation for behavior of linear system. The model is derived from essentially a causally explaining multi-variate AR model, by reparametrizing coefficients matrices as a function of parameters which have teleological interpretation. A numerical example of a cement rotary kiln system analysis is given.