

複雑な粘弾性物質のモデル化と逆問題： Riemann-Liouville 積分表示

東北大学大学院* 原 啓明・李 相錫
群馬工業高等専門学校** 小幡 常啓
統計数理研究所 田村 義保

(受付 1997 年 8 月 4 日；改訂 1998 年 5 月 11 日)

要 旨

Maxwell と Kelvin-Voigt 要素から成る複雑な粘弾性物質のモデルを構成し、Riemann-Liouville (RL) 積分を利用してこの体系が呈する不規則現象を逆問題として定式化する。つまり、観測データから不規則現象の性質を予測できる表式が逆問題として RL 積分表示の逆変換から導出されることを示す。また、情報幾何の立場で観測データを標本（確率変数）の実現値とみて、観測値から決まる確率密度関数の汎関数を推定する。

キーワード：逆問題、Riemann-Liouville 積分、分数次微積分、情報幾何。

1. はじめに

最近、鉄骨、コンクリートなど素材の疲労現象や地震災害による土木建造物の破壊現象に見られる動的変形に伴う不規則現象の解明がクローズアップされている。一方、多様な機能を生み出す新素材の開発においては、粘弾性物質が注目され動的変形に伴う不規則現象の評価や解析法が求められている。これ等の複雑な不規則現象に対する研究の目的の一つに、新しい概念と新しい解析法に裏付けられた基本法則の模索がある。この模索はまだ始まったばかりで、従来の統計物理学の枠を越えた広い複雑性の科学という新しい視野の中で進められている。

複雑な体系に発生する不規則現象の解析法の一つに、不規則に変化する時系列を分数（非整数）次 Brown 運動 (fBm) として、Riemann-Liouville (RL) 積分表示で解析する方法がある (Mandelbrot and Ness (1968), MaCcone (1981), Peitgen and Saupe (1988))。RL 積分表示によると、不規則現象は入力関数であるノイズと体系の応答特性を規定する積分核の畳み込みで表される。元来、RL 積分表示 (Oldham and Spanier (1974), Miller and Ross (1993)) は整数回の微積分演算表式から分数次（非整数回）の表式へ解析接続されたものである。分数次の微積分演算表式はいろいろな問題 (Mehaute (1991), Metzler et al. (1995), Strømme et al. (1995)) に適用されている。特に、Furukawa (1985a, 1985b) は、分数次微分概念を Langevin 方程式に適用して $1/f$ ゆらぎの発生機構を論じた。RL 積分表示を使った地震波のスペクトル解析 (Koyama and Hara (1993), Koyama (1995)) も行なわれている。また、断層を特徴的な長さ（時定数）が無限個ある系とみなし、スケール化された Langevin 方程式系 (Koyama and Hara (1992), 原・小山 (1992), 小山・原 (1992)) を援用すると、地震波のスペクトル解析ができ

* 〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 01.

** 〒371-0845 群馬県前橋市鳥羽町 580.

る。

近年、統計的推論を始め複雑な不規則現象に対するアプローチとして情報幾何の方法 (Amari (1985), 甘利・長岡 (1993), Murray and Rice (1993)) が注目されている。また、微分幾何学的枠組みの中で相転移の問題 (Janyszek (1990)), 確率過程の問題 (Obata et al. (1992, 1994), Obata and Hara (1996), Ruppeiner (1995)) を研究する方法も展開されている。

本論文では、Riemann-Liouville (RL) 積分核に相当する体系を複雑な粘弾性物質で構築し、この物質が示す動的応力や歪に伴う不規則現象を解析する。この複雑な粘弾性物質の応力や歪の時間発展はスケール化された Maxwell 型、あるいは Kelvin-Voigt 型の方程式で記述される。さらに、体系に生じたノイズ問題を逆問題として解析する表式を導出する。また、複雑な粘弾性物質に対する入力と出力の観測データを標本 (確率変数) の実現値とみて、情報幾何学の立場で入出力ノイズの観測値から決まる確率密度関数の或る特殊な汎関数を推定する。

2. 複雑な粘弾性物質に対する複合系モデルの構成

物質が示す粘性と弾性はダッシュポットとバネ (図 1 (a)) によって表現される。両性質を兼ね備えた粘弾性物質はこれらの基本要素の結合の仕方によって Maxwell (M) 型 (図 1 (b)) あるいは Kelvin-Voigt (KV) 型 (図 1 (c)) でモデル化される。

M 型では応力 (σ_i ($i=1,2$)) が不変量 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), 歪 (ϵ_i ($i=1,2$)) は加算量 ($\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$) である。この粘弾性物質の歪は

$$(2.1) \quad \epsilon = \frac{\sigma}{G} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(t') dt'$$

で記述される。ここで G はバネ定数 (せん断弾性率), η は粘性率である。

一方, KV 型では, 歪が不変量, 応力が加算量である。この粘弾性物質の応力は

$$(2.2) \quad \sigma = G\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt}$$

で与えられる。

条件 ($\epsilon(t) = \epsilon_0$: 一定) を満たす M 型モデルの $\sigma(t)$ は緩和過程, 条件 ($\sigma(t) = \sigma_0$: 一定) を満たす KV 型モデルの $\epsilon(t)$ は遅延過程と言われる (Yamamoto (1968), Eisele (1990))。これ

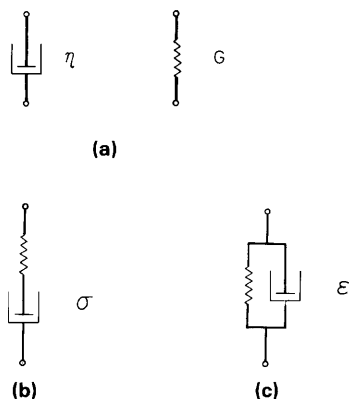


図1. (a) ダッシュポット (η : 粘性率) とバネ (G : 剛性率), (b) Maxwell 型, (c) Kelvin-Voigt 型。

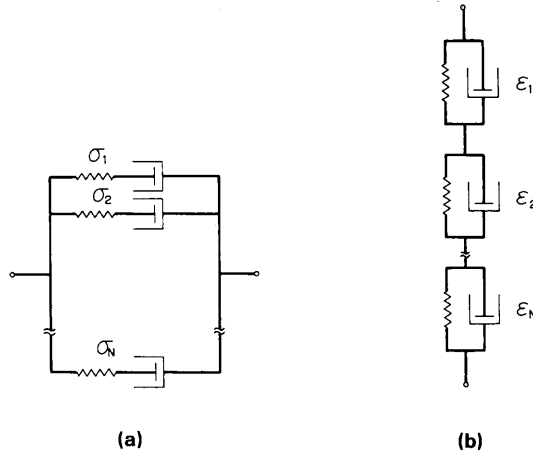


図2. (a) Maxwell 型の一般化モデル, (b) Kelvin-Voigt 型の一般化モデル.

等の条件を満たす M と KV 型モデルの解はそれぞれ $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t/\tau)$ [$\sigma_0 = \sigma(t=0)$, $\tau = \eta/G$] と $\epsilon(t) = \epsilon_\infty [1 - \exp(-t/\tau)]$ [$\epsilon_\infty = \sigma_0/G = \epsilon(t=\infty)$] となる.

式 (2.1) と (2.2) を更に複合化した図2で示す一般化された M 型の粘弾性物質 (図2 (a)) に対して, 緩和過程の解は

$$(2.3) \quad G_{relax}(t) \left(= \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k}{\epsilon_k(0)} e^{-t/\tau_k}$$

で与えられる.

定数 $\tau_k = \eta_k/G_k$ は k 番目の部分系の時定数で, M 型要素を特徴づける粘性率 η_k とバネ定数 G_k から決定される.

同様に, 一般化された KV 型 (図2 (b)) の場合, 遅延過程の解は

$$(2.4) \quad J_{ret}(t) \left(= \frac{1}{G_{ret}} = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon_k(\infty)}{\sigma_0} (1 - e^{-t/\tau_k})$$

となる (Eisele (1990)).

σ あるいは ϵ を $X(t)$ で表し, また $1/\tau$ を γ , M 型の $G\dot{\epsilon}$ と KV 型の σ/η を Q で表すと, (2.1) と (2.2) に相当する表式は

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} X(t) + \gamma X(t) = Q(t)$$

と書き換えられる.

複雑系のモデル (原・小山 (1991, 1992), Hara et al. (1992), Koyama and Hara (1992)) を参考に一般化された粘弾性物質 [(2.3) と (2.4)] とは異なる複雑な粘弾性物質をデザインする. この複雑な粘弾性物質は多数の M 型および KV 型の要素から成る複合系であり, 動的変形の時間発展はスケール化された共変方程式 (SCE) 系 ($i=1, 2, \dots$)

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} X_i(t) + \gamma_i X_i(t) = Q_i(t)$$

で記述されるものとする。つまり、SCE系に含まれる各関数や係数間には、次式で規定されたスケールリング則；

$$(2.7) \quad \begin{aligned} X_i(t) &= a^i X_0(b^i t) & (a, b: \text{任意定数}, b < 1) \\ \gamma_i &= b^i \gamma_0 \\ Q_i(t) &= a^i b^i Q_0(b^i t) \end{aligned}$$

が要請されている。ここで $X(t) \equiv X_0(t)$ 、また a と b はスケール因子である。因子 a の物理的意味は $a(>1)$ が整数の場合は、図3で示したユニットの個数 $a(<1)$ が実数の場合は、ユニットの重みを表す。

方程式系 (2.6) とスケールリング則 (2.7) で表現される応力・歪特性をもつ N 個の系を重畳して一つの新しい複合系 Σ_s を作る。この複合系 Σ_s 全体としての $G_{relax}(t)$ と $J_{ret}(t)$ [(2.3) と (2.4)] に相当する表式 $X(t)$ はその部分系を規定する SCE 系の解 $X_k(t)$ の和として、次式

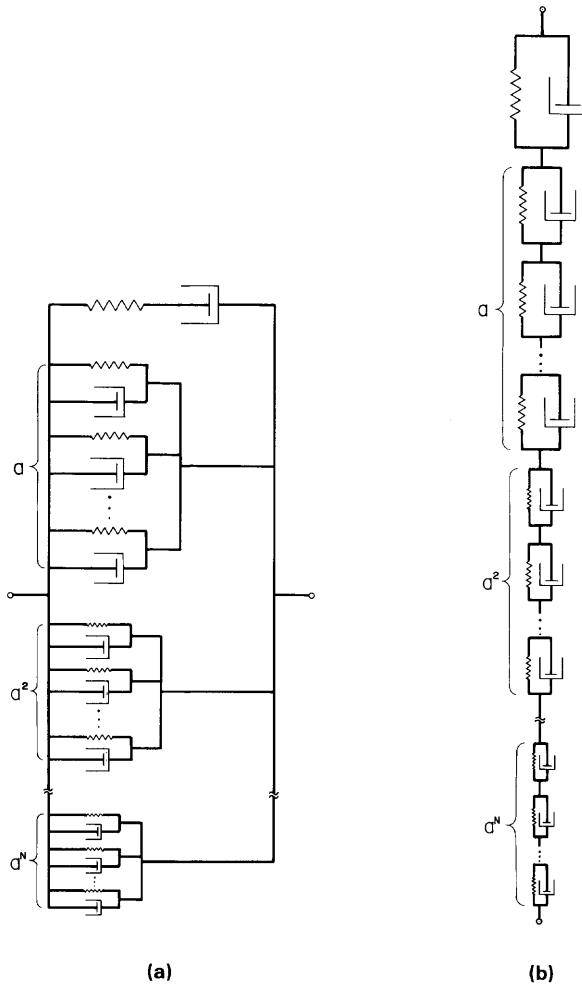


図3. (a) Maxwell 型の複合系 Σ_s , (b) Kelvin-Voigt 型の複合系 Σ_s . 因子 a の意味は $a(>1)$ が整数の場合は要素の個数, $a(<1)$ が実数の場合は一個の要素に対する重みを表す。

$$(2.8) \quad \begin{aligned} X(t) &= \sum_{k=1}^N X_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^N a^k X_0(b^k t) \end{aligned}$$

で与えられる。

複合系 Σ_s に対する $G_{relax}(t)$ と $J_{ret}(t)$ を (2.8) で表し、和を積分で近似する。これを $a < 1, N \rightarrow \infty$ として、鞍部点法で漸近評価 (Hara et al. (1992)) する。計算結果はそれぞれ

$$(2.9) \quad \begin{aligned} (G_{relax}(t))_{asym} &= \frac{1}{\mathcal{E}_C(\bar{\alpha}, \gamma)} t^{-\bar{\alpha}} \\ \mathcal{E}_C(\bar{\alpha}, \gamma) &= |\ln b| \sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{2\pi}} e^{(1-\ln(\bar{\alpha}/\gamma))}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\ln a}{\ln b} \end{aligned}$$

と

$$(2.10) \quad \begin{aligned} (J_{ret}(t))_{asym} &= \frac{1}{\mathcal{E}_J(\bar{\alpha}, \gamma)} t^{-\bar{\alpha}} \\ \mathcal{E}_J(\bar{\alpha}, \gamma) &= |\ln b| \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_{eff}}{2\pi}} \frac{e^{-\bar{\alpha}_{eff} \ln(\bar{\alpha}/\gamma) + \ln(1+\alpha_{eff})}}{1 - e^{-\alpha_{eff}}}, \quad \alpha_{eff} = \bar{\alpha}/(1 + \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

で与えられる。これ等の表式は、外力 $Q_i(t)$ を入力とみて方程式系 (2.6) からラプラス変換で求められ、その複合系 Σ_s に対する解 $X(t)$ の表式において (2.9) あるいは (2.10) は複合系 Σ_s の伝達関数、つまり応答関数の役目をする。

3. Riemann-Liouville (RL) の逆変換

一般に、埋め込まれたノイズが原因で複雑な体系から発生する不規則現象は時系列として観測される。この複雑な体系を前節で述べた複合系 Σ_s とみるとこの時系列は、Riemann-Liouville (RL) 積分表示 (Mandelbrot and Ness (1968), MaCcone (1981), Peitgen and Saupe (1988)) を使った分数次ブラウン運動 (fBm) として記述できる。つまり、複合系 Σ_s の呈する不規則現象の記述として、入力関数 (ノイズ) $X_{in}(t)$ と応答関数 $K(t)$ [(2.9) あるいは (2.10)] の畳込み形式を使うと、出力関数 $X_{out}(t)$ は、入力関数 (ノイズ) を $X_{in}(t)$ として

$$(3.1) \quad \begin{aligned} X_{out}(t) &= \int_0^t K(t-s) X_{in}(s) ds \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}_K} \int_0^t (t-s)^{-\bar{\alpha}} X_{in}(s) ds \quad (0 \leq \bar{\alpha} < 1) \end{aligned}$$

と表される (図 4)。関数 \mathcal{E}_K は M 型では \mathcal{E}_C (式 (2.9))、KV 型では \mathcal{E}_J (式 (2.10)) を表す。式 (3.1) の $X_{out}(t)$ は複合系 Σ_s の応答関数 $K(t) = t^{-\bar{\alpha}}/\mathcal{E}_K(\bar{\alpha}, \gamma)$ で変調された時系列として表現される (図 4 参照)。

また、 \mathcal{E}_K が Γ 関数：

$$(3.2) \quad \Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt \quad (\lambda > 0)$$

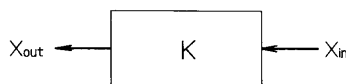


図 4. 入出力関数 (ノイズ) と応答関数。

に一致する場合、因子 $\tilde{\alpha}$ を $(1/2) - H$ (H : Hurst 指数) と等置すると、(3.1) は従来の fBm を記述する RL 積分表示を与える。一般に、外力に対する体系の応答は線形応答理論によって (3.1) の積分核 $K(t)$ を応答関数とした畳込み形式で与えられる。この意味で関数 Ξ_K を別にすれば、(3.1) は従来とは異なるブラウン運動とも云うべき不規則現象に対する新しい分数次 RL 積分表示とみることができる。

以下では、入力関数 (ノイズ) $X_{in}(t)$ を白色ガウス過程：

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \langle X_{in}(t) \rangle &= 0 \\ \langle X_{in}(t_1) X_{in}(t_2) \rangle &= \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

とし、複合系 Σ_s の呈する不規則現象を対象にする。

出力関数 $X_{out}(t)$ の相関関数は

$$(3.3) \quad R(t_1, t_2) = \langle X_{out}(t_1) X_{out}(t_2) \rangle$$

で定義され、 $R(t_1, t_2)$ は式 (3.1) と (3.3) によって評価される。

表式 (3.4) を使用して不規則現象としての時系列の振舞いを直接表現する。このため、 $X_{out}(t)$ の Karhunen-Loève (KL) 展開 (Ash (1965), MaCcone (1981))

$$(3.5) \quad X_{out}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \varphi_n(t)$$

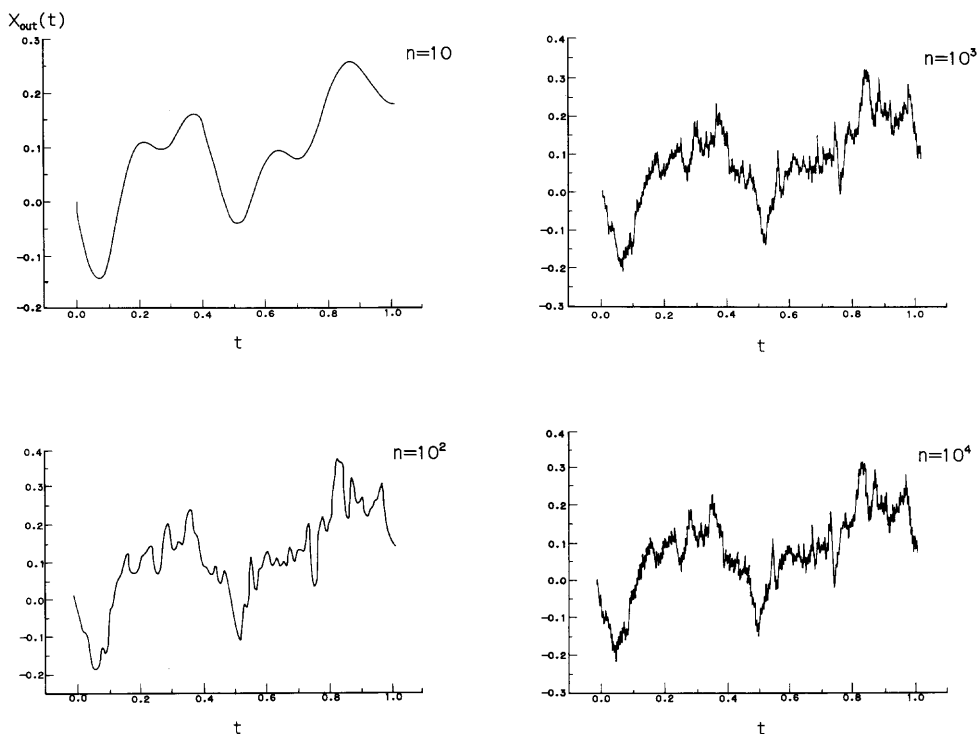


図5(a). 標本1に対する Karhunen-Loève (KL) 展開 ($n=10, 10^2, 10^3, 10^4$).

を行なう。ここで、 z_n は

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \langle z_n \rangle &= 0 \\ \langle z_n z_m \rangle &= \lambda_n \delta_{nm} \end{aligned}$$

を満たすランダムな展開係数である。 $\varphi_n(t)$ は固有値積分方程式

$$(3.7) \quad \int_0^T R(t_1, t_2) \varphi_n(t_2) dt_2 = \lambda_n \varphi_n(t_1) \quad (0 \leq t_1 \leq T)$$

を満たす固有関数、 λ_n は固有値である。

式 (3.1) を (3.4) に代入し (3.5) を考慮すると、(3.7) に対する最終的な表式が得られる。この両辺を t_1 で微分すると、ベッセルの微分方程式が得られる (MaCcone (1981))。この方程式は、 $\bar{\alpha}=0(H=1/2)$ の場合、調和振動子の微分方程式になる。これを境界条件 $\varphi(0)=0, \dot{\varphi}(T)=0$ で解くと、 $X_{out}(t)$ の KL 展開：

$$(3.8) \quad X_{out}(t) = \sum_{n=1} z_n \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2T} t$$

が得られる。図 5 は標本 1 と 2 に対し (3.8) で右辺の項数を変え数値計算を行なった結果である。

次に出力関数の観測データからノイズ源 $X_{in}(t)$ の性質を推定する問題を考える。式 (3.1) の左辺で観測誤差 ϵ_K を考慮しこれを逆変換すると

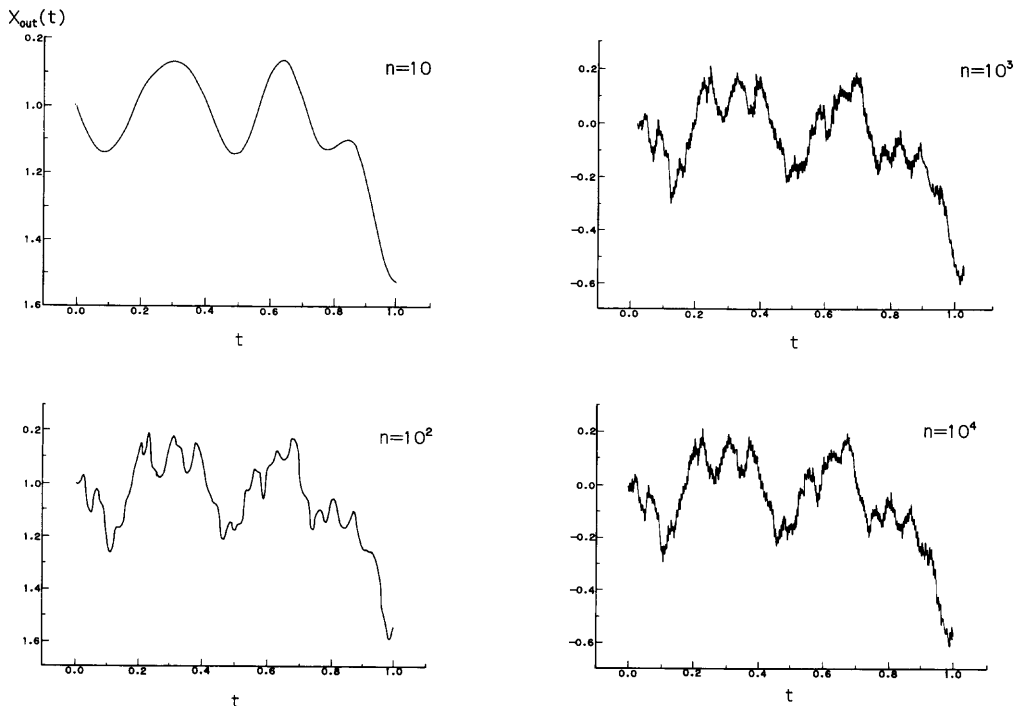


図 5(b). 標本 2 に対する KL 展開 ($n=10, 10^2, 10^3, 10^4$).

$$(3.9) \quad X_{in}(t) = \varepsilon_K t^{\bar{\alpha}-1} + \Xi_K \left(\frac{\sin \bar{\alpha}\pi}{\pi} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t \frac{X_{out}(s)}{(t-s)^{1-\bar{\alpha}}} ds \right] \quad (\bar{\alpha} > 0)$$

あるいは、積分過程 $\tilde{X}_{in}(t)$ に対する表式

$$(3.10) \quad \tilde{X}_{in}(t) = \left(\int_0^t X_{in}(t') dt' \right) = \frac{\varepsilon_K}{\bar{\alpha}} t^{\bar{\alpha}} + \Xi_K \left(\frac{\sin \bar{\alpha}\pi}{\pi} \right) \int_0^t \frac{X_{out}(s)}{(t-s)^{1-\bar{\alpha}}} ds \quad (\bar{\alpha} > 0)$$

が得られる。

公式 (3.9) と (3.10) を逆問題として見るとき、各第一項は出力関数のデータに含まれる観測誤差 ε_K を含む (公式を導出するとき観測誤差 ε_K とノイズは統計的に独立であると仮定した)。特に、複合系 Σ_s を伝播する入出力ノイズ間の変換 (3.10) を数値的に簡単に検証するため

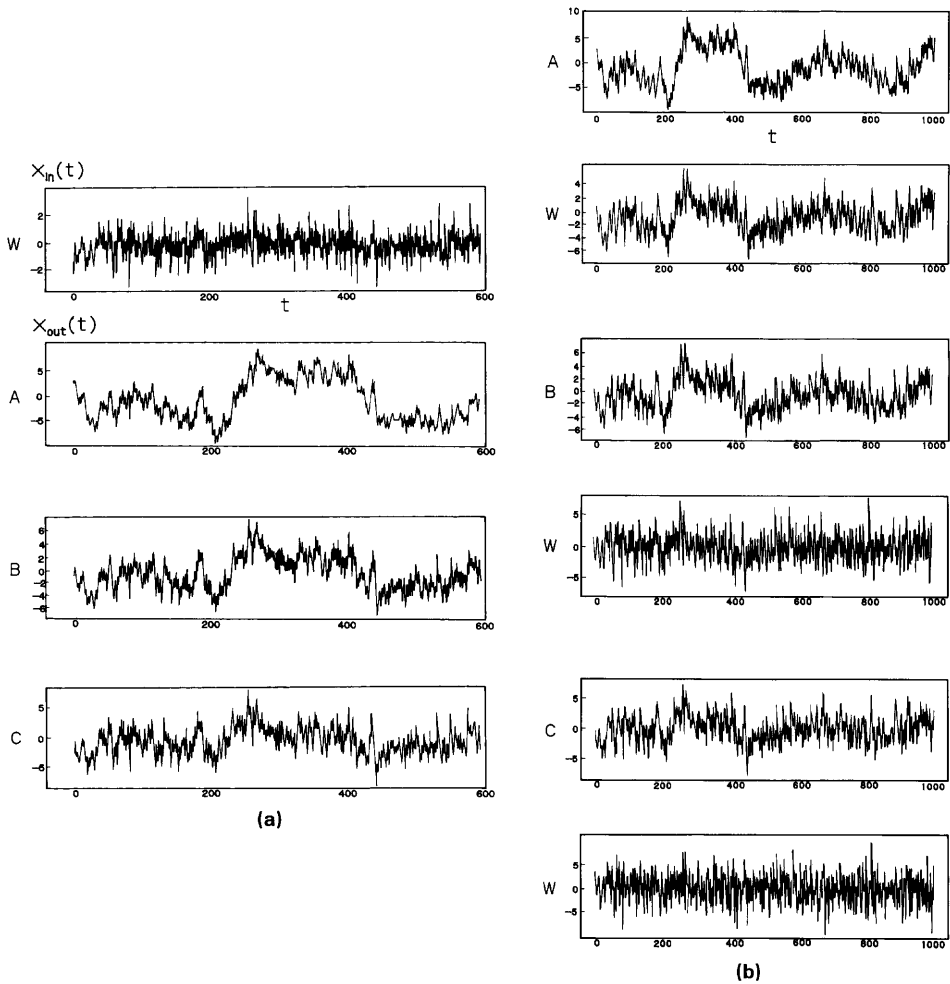


図6. (a) 白色ガウス型の入力関数(ノイズ: W)に対して、 $\Xi_K=1$ において $\bar{\alpha}$ の値だけで規定された (3.1) から数値計算で得られた出力関数(ノイズ)の結果 $A(\bar{\alpha}=3/4)$, $B(\bar{\alpha}=1/2)$, $C(\bar{\alpha}=1/4)$, (b) 出力データ A, B, C を観測し逆問題として表式 (3.11) の数値計算から予想される入力ノイズ源 (W) の性質 ($A \rightarrow W, B \rightarrow W, C \rightarrow W$).

に、 $\varepsilon_k=0(=\mathcal{O}(1/\sqrt{N}))$, N : データ数), $\bar{\varepsilon}_k=1$ とする. また, 区間 $[0, t]$ をきざみ巾 Δt で N 分割し, (3.10) の積分を和

$$(3.11) \quad \tilde{X}_{in}(t) = \left(\frac{\sin \bar{\alpha}\pi}{\pi} \right) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{[N\Delta t - (i+1/2)\Delta t]^{1-\bar{\alpha}}} \left(\frac{X_{out}((i+1)\Delta t) - X_{out}(i\Delta t)}{\Delta t} \right) \Delta t$$

で評価する. 図 6 の数値計算の結果は $\Delta t=1$ とした標本経路である.

式 (3.11) による評価の妥当性, 精度については, 別の方法 (広田 (1993)) 等で検討する必要もあるが, これ等の数値計算から入出力ノイズを変動のパターンで比較すると, 両者の間には著しい差が認められない. この意味で観測誤差とノイズの間の統計的独立性の仮定を別にすれば, 公式 (3.9) あるいは (3.10) を入出力ノイズの変換式とみて, これを複合系 Σ_s が呈する不規則現象に関する逆問題の解析に援用することは妥当であろう.

4. 確率密度関数の汎関数

前節までは, $X_{in}(t)$ に対する確率分布は既知であるとした. すなわち, 応力や歪に伴う不規則な時系列を規定する確率分布は白色ガウス型 ((3.3) 参照) であった. 本節では, $X_{in}(t)$ や $X_{out}(t)$ に関する観測データを基に, この確率密度関数の汎関数を推定する問題を考える. つまり, 順問題として入力関数 (ノイズ) $X_{in}(t)$ が観測値 x を実現する確率変数 X , 出力関数 (ノイズ) $X_{out}(t)$ は複合系 Σ_s によって変換された観測値 y を実現する確率変数 Y とみる. また, 複雑な粘弾性物質は X に Y を対応づける確率変数 (関数) の変換器 f であるとみる. この枠組みで標本 (確率変数) の統計モデルを考え, 情報幾何の立場で確率密度関数の汎関数を推定する.

統計モデルは標本 (確率) 分布 P_θ の確率密度関数 $p(x, \theta)$ の集合 $S = \{p(x, \theta)\}$ である. x は確率変数 X の実現値, $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots)$ は n 次元パラメータである.

S の各要素はパラメータ θ で指定され, θ は S 上の座標系である. $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$ ($i=1, 2, \dots, n$) の一次結合の全体 $T_\theta = \{A | A = A^i \partial_i\}$ は点 θ における接ベクトル空間である. S の要素が確率密度関数であることを利用すると, T_θ に同型なランダム変数 (関数) $A(x)$ で張られる接ベクトル空間

$$(4.1) \quad T_\theta^{(1)} \equiv \{A(x) | A(x) = A^i \partial_i l = A l, l = l(x, \theta) = \ln p(x, \theta)\}$$

が構成される. ベクトル場 $A(x)$ に対する期待値は $E[A(x)] (= E[Al]) = \int p(x, \theta) A(x) dx = 0$ である.

任意のランダム変数 $A(x), B(x)$ に対して, 接ベクトル空間 $T_\theta^{(1)}$ 上に内積を

$$(4.2) \quad \langle A; B \rangle (= E[AlBl]) \equiv \int p(x, \theta) A(x) B(x) dx$$

で定義する. この内積 $\langle A; B \rangle = E[AlBl]$ は θ の変換に対して不変である. スカラー関数 ϕ と接ベクトル A に対して, ϕ の A 方向導関数を $A(\phi)$ で定義すると, この定義は線形性と Leibnitz 則を満たす. ベクトル場 B と接ベクトル A に対しては, B の A 方向の共変微分を $\nabla_A B$ で定義すると, 接続係数は任意のベクトル場 C との内積 $\langle \nabla_A B; C \rangle$ によって定義される. 特に, α 接続係数は

$$(4.3) \quad \langle \nabla_A^\alpha B; C \rangle = E \left[\left(Al + \frac{1-\alpha}{2} ABl \right) Cl \right]$$

で与えられる (Amari (1985)).

この α 接続係数の意味を少し違った視点で考察する。複合系 Σ_s による変換 $X \rightarrow Y$ では、入出力データの確率密度関数がそれぞれ $p(x, \theta)dx$ と $q(y, \theta)dy$ で y が $y=f(x)$ で規定されるものとする。出力データの確率密度関数 $q(y, \theta)$ による接ベクトル空間上の内積は、 $G=G[q]$ を q の未知汎関数として

$$(4.4) \quad \langle A; B \rangle_c (= E_c[A l_a B l_a]) = \int G[q] A(y) B(y) dy \\ = E_c[A F B F]$$

で定義される。記号 l_a は l を一般化したものであり、 $l_a (= l_a(y, \theta)) = F (= F[q(y, \theta)])$ である。つまり F は尤度関数を一般化した確率密度関数 q の未知汎関数 $F[q]$ である。観測値 y のベクトル場 $A(y)$ は $T_\theta^{(a)}$ に対応する接ベクトル空間

$$(4.5) \quad T_\theta^{(a)} = \{A(y) | A(y) = A^i \partial_i l_a = A l_a, l_a (= l_a(y, \theta)) = F[q(y, \theta)]\}$$

を構成する。ここで $q(y, \theta)$ は $p(x(y), \theta) |\partial y / \partial x|^{-1}$, $x = f^{-1}(y)$ である。

入出力関数のデータを実現値とする確率変数の変換 ($X \rightarrow Y$) の前後で、内積と接続係数は互いに比例することを主張する。次の基本的要請：

$$(4.6) \quad 1. \langle A; B \rangle_c = K_0(\bar{\alpha}) \langle A; B \rangle$$

$$(4.7) \quad 2. \langle AB; C \rangle_c = K_0(\bar{\alpha}) \langle AB; C \rangle$$

を行なう。

ここで、関数 $K_0(\bar{\alpha})$ は、応答関数の漸近的ふるまいを規定する因子 $\bar{\alpha}$ [(2.9) と (2.10) 参照] だけに依存する任意係数である。

この要請 1 と 2 は入出力の前後において幾何学的構造が保存されることを意味する。

入出力データ間で、確率変数の実現値の変換 ($x \rightarrow y$, $p(x, \theta)dx = q(y, \theta)dy$) に関する不変量 ($A \ln p = A \ln q$, $AB \ln p = AB \ln q$) に注意すると、要請 2 (4.7) は次の関係式

$$(4.8) \quad 1. \frac{G[q]}{q} \left(q \frac{dF}{dq} \right)^2 = K_0(\bar{\alpha})$$

$$(4.9) \quad 2. \frac{G[q]}{q} q \frac{dF}{dq} q \frac{d}{dq} \left(q \frac{dF}{dq} \right) = K_1(\bar{\alpha})$$

によって

$$(4.10) \quad \langle AB; C \rangle_c = K_0(\bar{\alpha}) \langle \nabla_A^{(K_1/K_0)} B; C \rangle$$

$$(4.11) \quad \left(= E \left[\left(AB l + \frac{K_1}{K_0} A l B l \right) C l \right] \right)$$

に書き換えられる (付録 A 参照)。ただし $K_1 = K_1(\bar{\alpha})$ は $\bar{\alpha}$ に依存し q には依存しない任意関数である。

複合系 Σ_s で変調された一般化された尤度関数を表す未知の汎関数 $F[q]$ と重みの分布関数 [(4.4) 参照] を表す汎関数 $G[q]$ は、関係式 (4.8) と (4.9) からそれぞれ

$$(4.12) \quad F[q] = \begin{cases} \frac{K_0(\bar{\alpha})}{K_1(\bar{\alpha})} q^{K_1(\bar{\alpha})/K_0(\bar{\alpha})} & (K_1(\bar{\alpha})/K_0(\bar{\alpha}) \neq 0) \\ \ln q & (K_1(\bar{\alpha})/K_0(\bar{\alpha}) = 0) \end{cases}$$

$$(4.13) \quad G[q] = K_0(\bar{\alpha}) q^{1-2(K_1(\bar{\alpha})/K_0(\bar{\alpha}))}$$

与えられる。つまり、ここで、 $\bar{\alpha} = \ln a / \ln b$ (式(2.9)参照) を α 接続係数と等置し、 $K_1(\bar{\alpha})/K_0(\bar{\alpha}) = (1 - \bar{\alpha})/2$ とおき、 F と G に対する (4.12) と (4.13) を使うと、 $\langle AB; C \rangle = \langle \mathcal{F}_A^{(\alpha)} B; C \rangle$ 、 $\langle AB; C \rangle_c = K_0(\alpha) \langle \mathcal{F}_A^{(\alpha)} B; C \rangle$ が導出され、 $\bar{\alpha} = 1$ では $\langle \mathcal{F}_A^{(1)} B; C \rangle = \langle AB; C \rangle$ となる。この意味で、(4.6) と (4.7) の要請 2 は接続係数を決定する条件である。また $K_0(\bar{\alpha})$ の関数形は θ 空間に関する性質、たとえば測地線などから決定される。実験的には観測データの解析から直接 θ の変化として求めることも可能であろう。

5. 結 論

本論文では、複雑な粘弾性物質のモデルとして新しい複合系 Σ_s を作り、応力や歪に伴う不規則現象を解析する方法を示した。この複合系 Σ_s から生じる不規則現象は Riemann-Liouville (RL) 積分表示により逆問題として定式化される。つまり、出力データの観測からノイズ源の特性や物質を推定する公式を導出した。また、複合系 Σ_s に対する入出力関数 (ノイズ) のデータを標本 (確率変数) の実現値とみて、情報幾何の立場で入出力関数 (確率変数) の汎関数を推定する問題を定式化した。

2 節では、複雑な粘弾性物質をダッシュポットとバネの基本要素でモデル化し、これ等の要素間の時間発展方程式がスケール変換に関して共変になる複合系 Σ_s を構築した。応力や歪の時間変化は物質の部分系に関するスケール化された共変方程式 (SCE) 系で表現された。また、体系の応答特性は RL 積分表示に相当する応答関数で表現された。つまり、応答関数を漸近的に評価すると、係数を別にすれば RL 積分核と同じ振舞いを示すことが分った。白色ガウス型ノイズ源が複合系 Σ_s に埋め込まれている場合、ここで変調された出力ノイズは Karhunen-Loève (KL) 展開で表現された。逆に、このモデルの立場では複雑な粘弾性物質で発生する観測データからノイズ源の性質を推定する場合、RL 積分表示の逆変換公式が援用されることを示した。つまり、入力関数 (ノイズ) の推定値 $X_m(t)$ を求める逆問題として、逆変換公式の妥当性を調べた。2 節と 3 節の入出力ノイズに関する確率 (標本) 分布は既知で白色ガウス型であるとしたが、4 節では、入出力関数の観測データを確率変数 X, Y の実現値 x と y とみて、これらの確率密度関数に関する未知の汎関数を推定する問題を定式化した。このため α 接続 (Amari (1985)) を少し違った視点で考察した。推定には、標本 (観測データ) に関する微分幾何学構造を規定する基本的要請 (4.6), (4.7) とこれらの要請を導く関係式 [(4.8) と (4.9)] が重要であった。実際この関係式から一般化された尤度関数を表す確率密度関数の汎関数 F が決定され、複雑な粘弾性物質の応答特性がどんな形で汎関数の関数形に反映されるかが議論できた。この関数形を決める (4.9) から汎関数 G が求まった。また、 F を出力関数のデータのばらつきを規定する対数尤度関数であるとみると、 F は刺激とその応答である感覚量の関係を規定する Weber-Fechner 則の一般化であるとみる事もできる (原 (1991), Ikeda et al. (1995))。

謝 辞

著者達は 2 名の査読者から詳細で発展性のある有益なコメントをいただきました。改めてここに感謝の意を表したい。

付録 A: 式 (4.8), (4.9) と (4.10) の導出

幾何学的構造が保存されることを主張する基本的要請 1 と 2 [式 (4.6) と (4.7)] の意味を関係式 (4.8) と (4.9), それと結果 (4.10) を導出することによって明確にする。

まず, 次の等式:

$$(A.1) \quad \begin{aligned} AF (= A^i \partial_i F) &= A^i \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i} \ln q \right) q \frac{dF}{dq} \\ &= (A \ln q) q \frac{dF}{dq} \end{aligned}$$

$$(A.2) \quad \begin{aligned} ABF &= A(BF) \\ &= (AB \ln q) q \frac{dF}{dq} + (B \ln q) \left[(A \ln q) q \frac{dF}{dq} \left(q \frac{dF}{dq} \right) \right] \end{aligned}$$

に注意する。また, $A(y) \in T_0^{(a)}$ より $A(y) = AF$ となり, 式 (4.6) の左辺は内積の定義式から

$$(A.3) \quad \begin{aligned} \langle A; B \rangle_c &= \int G[q] AFBF dy \\ &= \int \frac{G[q]}{q} \left(q \frac{dF}{dq} \right)^2 (A \ln q) (B \ln q) q dy \end{aligned}$$

と変形できる。この表式において $qdy = pdx$ からの不変量 $A \ln q = A \ln p$ と内積の定義式 (4.2) に注意すると, 要請 1:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \langle A; B \rangle_c &= K_0(\bar{\alpha}) \int (A \ln p) (B \ln p) p dx \\ &= K_0(\bar{\alpha}) \langle A; B \rangle \end{aligned}$$

が得られる。同様に, 要請 2 (式 (4.7) の左辺) は内積の定義式 (4.2) から

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \langle AB; G \rangle_c &= \int G[q] ABFCF dy \\ &= \int \frac{G[q]}{q} \left[\left[(AB \ln q) (C \ln q) \left(q \frac{dF}{dq} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + (A \ln q) (B \ln q) (C \ln q) \left\{ q \frac{d}{dq} \left(q \frac{dF}{dq} \right) \right\} q \frac{dF}{dq} \right] q dy \end{aligned}$$

と変形される。ここで式 (4.8) と (4.9) を代入し, $qdy = pdx$ からの不変量 $A \ln q = A \ln p$ と $AB \ln q = AB \ln p$ に注意すると $\langle AB; C \rangle_c$ は

$$(A.6) \quad \begin{aligned} \langle AB; C \rangle_c &= K_0(\bar{\alpha}) E \left[\left(AB \ln + \frac{K_1(\bar{\alpha})}{K_0(\bar{\alpha})} A \ln \right) C \right] \\ &\equiv \langle \mathcal{V}_X^{(K_1/K_0)} B; C \rangle \end{aligned}$$

となり, 式 (4.10) で与えた α 接続係数 (4.3) に相当する表式が得られる。実際, 尤度関数を一般化した汎関数 $F[q]$ と内積の重みを表す汎関数 $G[q]$ の役割は, α を実数とし, $F[q] = 2/(1 - \alpha) \cdot q^{(1-\alpha)/2}$ ($\alpha \neq 1$), $G[q] = q^a$ である特別な場合に対して直接調べることができる。すなわち $F[q]$ の形から $\partial_i l_a (= \partial/\partial \theta^i F[q]) = q^{(1-\alpha)/2} \partial_i l$ に注意すると

$$(A.7) \quad \begin{aligned} Al_a &= A^i \partial_i l_a = q^{\frac{1-\alpha}{2}} Al, \\ AB l_a &= q^{\frac{1-\alpha}{2}} \left\{ AB l + \frac{1-\alpha}{2} A l B l \right\} \end{aligned}$$

が得られる。従って、この場合 $G[q](=q^\alpha)$ に対する (A.5) の左辺の内積 $\langle AB; C \rangle_\alpha$ は

$$(A.8) \quad \begin{aligned} \langle AB; C \rangle_\alpha &= \int q^\alpha AB l_a C l_a dy \quad (G[q]=q^\alpha, l_a=F[q]) \\ &\equiv \langle \mathcal{I}_\alpha^{(q)} B; C \rangle \end{aligned}$$

と変形される。(A.6) と (A.8) を比べると要請 2 の表式が接続係数に関する要請であることが分る。

参 考 文 献

- Amari, S. (1985). *Differential Geometrical Methods in Statistics*, Springer, Berlin.
- 甘利俊一, 長岡浩司 (1993). 『情報幾何の方法』, 岩波書店, 東京.
- Ash, R. (1965). *Information Theory*, Wiley, New York.
- Eisele, U. (1990). *Introduction to Polymer Physics*, Springer, Berlin.
- Furukawa, H. (1985a). $1/f$ noise and turbulence from a self-similar decay of function, *Prog. Theoret. Phys.*, **73**, 1141-1150.
- Furukawa, H. (1985b). $1/f$ noise spectrum on self-similar cascade of bifurcation processes, *Phys. Lett.*, **110A**, 316-318.
- 原 啓明 (1991). Weber-Fechner 則の一般化, 物性研究, **56**, 58-62.
- 原 啓明, 小山順二 (1991). ランダムシステムの活性化とべき分布, 統計数理, **39**, 73-83.
- 原 啓明, 小山順二 (1992). 複雑な系の活性化と相関関数, 統計数理, **40**, 217-226.
- Hara, H., Chung, O. H. and Koyama, J. (1992). Dynamical activation processes described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **46**, 838-845.
- 広田良吾 (1993). 差分学のすすめ, 応用数理, **3**, 48-57.
- Ikeda, N., Hara, H. and Obata, T. (1995). Response properties of complex system interpreted by information geometry, *Statistical Physics (Abstract)*, 33-34, Tohwa University, Fukuoka.
- Janyaszek, H. (1990). Riemann geometry and stability of thermodynamical equilibrium systems, *J. Phys. A*, **23**, 477-490.
- Koyama, J. (1995). Stochastic modeling of complex earthquake activity, *Advance in Mathematical Seismology* (eds. J. Koyama and F. Deyi), 165-180, Seismological Press, Beijing.
- Koyama, J. and Hara, H. (1992). Scaled Langevin equation for complex system to describe $1/f^\alpha$ spectrum, *Phys. Rev. A*, **46**, 1844-1849.
- 小山順二, 原 啓明 (1992). ランジュバン方程式のスケール変換によるブラウン運動の一般化とそのスペクトル構造, 統計数理, **40**, 17-26.
- Koyama, J. and Hara, H. (1993). Fractional Brownian motions described by scaled Langevin equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, **3**, 467-480.
- MaCcone, C. (1981). Eigenfunction expansion for fractional Brownian motions, *Nuovo Cimento B*, **61**, 229-248.
- Mandelbrot, B. B. and Ness, J. W. van (1968). Fractional Brownian motion, fractional noises and applications, *SIAM Rev.*, **10** (4), 422-437.
- Mehaute, A. L. (1991). *Fractal Geometries, Theory and Applications*, Penton Press, London.
- Metzler, R., Schick, W., Killan, H.-G. and Nonnenmacher, T. F. (1995). Relaxation in filled polymers: a fractional calculus approach, *Journal of Chemical Physics*, **103** (16), 7180-7186.
- Miller, K. S. and Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York.
- Murray, M. K. and Rice, J. W. (1993). *Differential Geometry and Statistics*, Chapman & Hall, London.

- Obata, T. and Hara, H. (1996). Correlated-walks seen from the viewpoint of information geometry, *Interdiscip. Inform. Sci.*, **2**, 111-123.
- Obata, T., Hara, H. and Endo, K. (1992). Differential geometry of nonequilibrium processes, *Phys. Rev. A*, **45**, 6997-7001.
- Obata, T., Hara, H. and Endo, K. (1994). Dynamical behavior of statistical manifold associated with correlated walks, *J. Phys. A*, **27**, 5715-5726.
- Oldham, K. B. and Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, New York.
- Peitgen, H. O. and Saupe, D. (1988). *The Science of Fractal Images*, Springer, Berlin.
- Ruppeiner, G. (1995). Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory, *Rev. Modern Phys.*, **67**, 605-659.
- Strømme, M., Niklasson, G. A. and Granqvist, C. G. (1995). Determination of fractal dimension by cyclic I-V studies: The Laplace-transform method, *Phys. Rev. B*, **52**, 14192-14197.
- Yamamoto, M. (1968). Mechanical models for three dimensional linear viscoelasticity, *J. Phys. Soc. Japan*, **25**, 239-249.

Modelling of Complicated Visco-elastic Material and Its Inverse Problem : Riemann-Liouville Integral Representation

Hiroaki Hara and Sang Seok Lee

(Department of Computer and Mathematical Sciences, Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University)

Tunehiro Obata

(Department of Electrical Engineering, Gunma National College of Technology)

Yoshiyasu Tamura

(The Institute of Statistical Mathematics)

A model system representing a complicated visco-elastic material is constructed. Irregular motions exhibited by the model are formulated as an inverse problem by virtue of the Riemann-Liouville (RL) integral concerned with fractal Brownian motions. It is shown that an expression, capable of predicting properties of the irregular motions from data observed, is derived as an inverse transform of the RL integral representation. Based on information geometry we give a functional form of probability density functions which are determined by the data as values of the samples or the stochastic variables.