統計数理（1998）
第46巻 第2号 283-296

特集「計算と最適化」
［原著論文］

半正定値計画問題に対する主双対内点法の自己双対な探索方向族について[†]

統計数理研究所　土谷　隆

（受付 1998年6月22日；改訂 1998年8月10日）

要　旨

本論文では半正定値計画問題に対する自己双対な探索方向族について述べる．半正定値計画問題は，半正定値対称行列の錐とアフィン空間の交わりの上で線形関数を最小化する最適化問題である．制御や組合せ的最適化問題等多数の応用を持ち，現在活発に研究が進められている．半正定値計画問題に対する主双対内点法は線形計画問題に対するものの拡張であるが，拡張の仕方は一意的ではなく，さまざまな立場から多数の探索方向が提案されている．本論文ではこれらの探索方向を簡単にサーベイすると共に，スケーリング不変性および主問題と双対問題に対する対称性という立場から考察し，これまで知られているスケーリング不変な主双対内点法の探索方向すべてを含む，自己双対な Monteiro-Tsuchiya 族の部分族を提案する．

キーワード：半正定値計画法，主双対内点法，Monteiro-Tsuchiya 族，探索方向の自己双対性，Nesterov-Todd 探索方向，HRVW/KSH/M 探索方向．

1.　はじめに

半正定値計画問題（Alizadeh (1995), Nesterov and Nemirovskii (1994)）は，半正定値対称行列とアフィン空間の交わりの上で線形関数を最小化する最適化問題である．この問題は，線形計画問題よりもずっと複雑な構造を持つにもかかわらず，線形計画問題に対する内点法の諸結果がほとんど拡張可能であることが近年になって指摘され，現在，活発に研究が進められている．制御や組合わせ的最適化問題に対する応用も進められており（Boyd et al. (1994), Goemens and Williamson (1995)），関数 $-\log\det X$ の最小化問題とも密接な関係があるため，統計科学への応用も期待できる．（日本語の解説については，例えば小島（1996, 1998），土谷（1998）を参照のこと．）

本論文では，半正定値計画問題に対する主双対内点法の探索方向について論ずる．半正定値計画問題に対する主双対内点法は，問題を方程式を解くことに帰着させてそれを中心曲線と呼ばれる曲線を近似的に追跡することで解く．特に，収束のスピードが，問題のデータに依存せず行列の次元 n のみに依存し，一反復について，目的関数値が最適値に向け $1-1/g(n)$ 程度の割合で0に近づいていくという好ましい性質を有する（g は典型的には，n や $\sqrt{n}$ 程度の大きさの関数である）．

半正定値計画問題に対する主双対内点法は線形計画問題に対するもの（Kojima et al. (1989a, 1989b), Monteiro and Adler (1989), Tanabe (1988)）の拡張であるが，拡張の仕方は一意的

[†] 本研究は，文部省科学研究費奨励研究(A)9780417（1997）の援助を得ている．

ではない．いくつかの異なる探索方向や探索方向の族が提案されており，たとえば，これらは以下のように分類できる．(より詳しくは20以上の探索方向を整理したサーベイ (Todd (1997b)) を参照のこと．)

(A) 純粋な Newton 方向：Alizadeh-Haeberly-Overton (AHO) 方向 (Alizadeh et al. (1994))，Monteiro-Tsuchiya (MT) 方向 (Monteiro and Tsuchiya (1996))，MT dual 方向．

(B) Scaled Newton 方向で探索方向がスケーリング不変性を持つもの：Helmberg-Rendl-Vanderbei-Wolkowitz/Kojima-Shindoh-Hara/Monteiro (HRVW/KSH/M) 方向 (Helmberg et al. (1996), Kojima et al. (1997), Monteiro (1997))，HRVW/KSH/M dual 方向，Nesterov-Todd (NT) 方向 (Nesterov and Todd (1997))，MTW 方向 (Monteiro and Tsuchiya (1996))，MTW dual 方向．

(C) 探索方向の族：Monteiro-Zhang (MZ) 族 (Monteiro and Zhang (1998))，Monteiro-Tsuchiya (MT) 族 (Monteiro and Tsuchiya (1996))，MT dual 族，Kojima-Shindoh-Hara (KSH) 族 (Kojima et al. (1997))．

これらは，基本的には，(KSH 族を除いては) 2つの純粋な Newton 方向である AHO 方向，MT 方向を計算するための定式化と，問題を不変に保つスケーリングという変換を適当に組合せた，Scaled Newton 方向という枠組みで統一的に理解できる．

本論文では，これらの探索方向を簡単にサーベイすると共に，主問題と双対問題に対する対称性という立場から考察する．ここで述べる主問題と双対問題に関する対称性とは，主問題と双対問題の役割を入れ替えた時に，アルゴリズムが不変であるかどうかということである．上で述べられている探索方向の中で，＊ dual という名前の方向や族は，＊という探索方向や族から主問題と双対問題の役割を入れ替えて自動的に得られるものである．この立場から見ると，

- 主問題と双対問題に対して対称であるもの：AHO 方向，NT 方向，MZ 族
- 対称性を有さないもの：MT 方向，MTdual 方向，HRVW/KSH/M 方向，HRVW/KSH/M dual 方向，MTW 方向，MTW dual 方向，MT 族，MT dual 族

となる．

HRVW/KSH/M dual 方向が MT 族に属していることは，Monteiro and Tsuchiya (1996) において指摘されていた．これに対し，HRVW/KSH/M 方向が MT 族に属するか否かは不明であったが，最近 Todd は HRVW/KSH/M 方向も MT 族に属しているという意外な事実を指摘した (Todd (1997a, 1997b))．このことは，MT 族が自己双対である，つまり，ある方向とその dual の両方を (必ず) 含んでいるという可能性を示唆する．そこで，Todd は，MT 族が果たして自己双対か否かという問題を提起した．ここでは，この問題の解答に対する手掛りとして，MT 族の自己双対なワンパラメータ部分族で上に取り上げたスケーリング不変な探索方向をすべて含むものが構成できることを指摘する．

以下では次のような記法を用いる．$p\times p$ 対称行列の集合を $\mathcal{S}^p$ とする．$Q\in\mathcal{S}^p$ に対し，$Q\succeq 0$ は Q が半正定値対称行列であることを，$Q\succ 0$ は Q が正定値対称行列であることを表す．P, $Q\in\Re^{p\times q}$ に対し，$\Re^{p\times q}$ をベクトル空間と見なした時の内積を $P\cdot Q\equiv\mathrm{Tr}\,P^TQ$ と記す．$Q\in\Re^{p\times p}$ のフロベニウスノルムを $\|Q\|_F\equiv(Q\cdot Q)^{1/2}$ とする．$\mathcal{S}^p_+$, $\mathcal{S}^p_{++}$ を，各々 $\mathcal{S}^p$ の半正定値行列，正定値行列の集合とする．$Q\in\mathcal{S}^p_+$ に対し，唯一存在する $P^2=Q$ なる $P\in\mathcal{S}^p_+$ を $Q^{1/2}$ で表す．

2. 半正定値計画問題

半正定値計画問題は，半正定値対称行列の錐とアフィン空間上の交わり上で線形関数を最小

化する，次のような最適化問題である．

(2.1) (P) $\min\{C\bullet X : A_i\bullet X=b_i,\ i=1,\dots,m,\ X\succeq 0\}.$

ここで，$C\in\mathcal{S}^n$, $A_i\in\mathcal{S}^n$, $i=1,\dots,m$, $b=(b_1,\dots,b_m)^T\in\Re^m$，そして $X\in\mathcal{S}^n_+$ が変数である．この問題の双対問題は $(S,y)\in\mathcal{S}^n_+\times\Re^m$ を変数とする次のような問題である．

(2.2) (D) $\max\left\{b^Ty : \sum_{i=1}^m y_iA_i+S=C,\ S\succeq 0\right\}.$

問題 (2.1) と (2.2) の内点許容解の集合は次のように定義される：

$$F^0(P)\equiv\{X\in\mathcal{S}^n : A_i\bullet X=b_i,\ i=1,\dots,m,\ X\succ 0\},$$
$$F^0(D)\equiv\left\{(S,y)\in\mathcal{S}^n\times\Re^m : \sum_{i=1}^m y_iA_i+S=C,\ S\succ 0\right\}.$$

本論文では，$F^0(PD)\equiv F^0(P)\times F^0(D)\neq\emptyset$ とし，行列 $A_i, i=1,\dots,m$ は一次独立とする．任意の対称行列 P，Q に対し $\mathrm{Tr}[PQ]=\mathrm{Tr}[QP]$ であることより，任意の (2.1)，(2.2) の許容解 (X, S, y) について，

$$C\bullet X-b^Ty=X\bullet\left(C-\sum_{i=1}^m y_iA_i\right)=X\bullet S=\mathrm{Tr}[XS]=\mathrm{Tr}[X^{1/2}SX^{1/2}]\geq 0$$

が成り立つが，特に最初の仮定 $F^0(PD)\neq\emptyset$ の下で，(2.1) と (2.2) は最適解 X^* と (S^*, y^*) を持ち，最適値は一致する，つまり $C\bullet X^*=b^Ty^*\ (X^*\bullet S^*=0)$ が成り立つ．また，逆に，$X\bullet S=0$ が成立するならば，また，その時に限って X，(S,y) は最適解となっている．これらの関係を強双対性と呼ぶ．さらに，$X\bullet S=0$ ならば，

$$X\bullet S=\mathrm{Tr}[XS]=\mathrm{Tr}[X^{1/2}SX^{1/2}]=\|X^{1/2}S^{1/2}\|_F^2=0$$

となるので，$X\bullet S=0$ と $XS=0$ は同値である．これより，(2.1)，(2.2)を解くことは領域 $(X, S, y)\in\mathcal{S}^n_+\times\mathcal{S}^n_+\times\Re^m$ の中で次の方程式の解を求めることに帰着する．

(2.3a) $XS=0,$

(2.3b) $\sum_{i=1}^m y_iA_i+S-C=0,$

(2.3c) $A_i\bullet X-b_i=0,\quad i=1,\dots,m.$

主双対内点法は，この問題を，次の方程式の解として定義される中心曲線を近似的に追跡して解こうとするものである：

(2.4a) $XS=\nu I,$

(2.4b) $\sum_{i=1}^m y_iA_i+S-C=0,$

(2.4c) $A_i\bullet X-b_i=0,\quad i=1,\dots,m,$

(2.4d) $(X, S, y)\in\mathcal{S}^{n+}\times\mathcal{S}^{n+}\times\Re^m.$

ここで $\nu>0$ はパラメータである．中心曲線を近似的に追跡するというのは，後に述べるように，中心曲線に適切な近傍を定義して（$\nu\to 0$ としながら）その中に点列を生成するという意味である．以下にこのアルゴリズムの一般的な枠組みを示す．

許容型主双対パス追跡法.

1. 中心曲線の近傍 $N(\beta)$，近傍の広さを与えるパラメータ $0<\beta<1$，近似解 (X^k, S^k, y^k) の精度を与えるパラメータ $\varepsilon>0$ を定める.
2. $k:=0$ とし，$(X^0, S^0, y^0)\in N(\beta)$ となる内点許容解 (X^0, S^0, y^0) を与える.
3. もし，$X^k\cdot S^k\leq\varepsilon$ ならば反復を終了.
4. ν^k を定める.（ν^k は $\lim_{k\to\infty}\nu^k=0$ なる適当な点列.）
5. $\nu=\nu^k$ と置いて (2.4) を解くための探索方向 $(\varDelta X, \varDelta S, \varDelta y)$ を求める.
6. ステップ幅 t^k を，$(X^k, S^k, y^k)+t(\varDelta X, \varDelta S, \varDelta y)\in N(\beta)$ を満たす最大値として求め，$(X^{k+1}, S^{k+1}, y^{k+1}):=(X^k, S^k, y^k)+t^k(\varDelta X, \varDelta S, \varDelta y)$ とする.
7. $k:=k+1$ として 3 に戻る.

ここで，中心曲線の近傍 $N(\beta)$ は，XS の固有値 $(\lambda_1(XS),\ldots,\lambda_n(XS))$ を用いて次のように定義される集合である．$\beta=0$ とすると，中心曲線そのものになり，$\beta\in[0,1)$ では $N(\beta)$ は内点許容解の集合 F^0 に含まれる.

$$N(\beta)\equiv\left\{(X, S, y)\in F^0\left|\sqrt{\sum_i(\lambda_i(XS)-\mu(X, S))^2}\leq\beta\mu(X, S)\right.\right\}$$
$$=\{(X, S, y)\in F^0\mid \|X^{1/2}SX^{1/2}-\mu(X, S)I\|_F\leq\beta\mu(X, S)\}. \tag{2.5}$$

ここで $\mu(X, S)=\sum_i\lambda_i(XS)/n=X\cdot S/n$ である．この近傍をはみ出さないように近似解をコントロールすることで，中心曲線を近似的に追跡することができるわけである．典型的には，$\nu^k=\sigma\mu(X^k, S^k)$ $(\sigma\in(0,1))$ とする.

各反復では，Step 4 で適当に定められた ν^k に対して中心曲線上の点を Newton 法で近似的に求めるのが基本的な過程である．方程式 (2.4) に対して直接 Newton 法を適用すると，$XS=\nu I$ が対称でないため，探索方向も対称行列の空間では必ずしも解を持たない．そこで，通常，$XS=\nu I$ を「対称でかつ等価な条件 $\Psi_\nu(X, S)=0$」で置き換えてから Newton 法を行うことが行われてきた．典型的なものは，次のものである：

$$\Psi_\nu(X, S)=\frac{1}{2}(XS+SX)-\nu I=0, \tag{2.6}$$

$$\Psi_\nu(X, S)=X^{1/2}SX^{1/2}-\nu I=0, \tag{2.7}$$

$$\Psi_\nu(X, S)=S^{1/2}XS^{1/2}-\nu I=0. \tag{2.8}$$

$(X, S, y)\in F^0(PD)$ で得られる Newton 方向の方程式は，(2.6) に対応して

$$\frac{1}{2}(X\varDelta S+\varDelta XS+S\varDelta X+\varDelta SX)+\left[\frac{XS+SX}{2}-\nu I\right]=0, \tag{2.9a}$$

$$A_i\cdot\varDelta X=0, \qquad i=1,\ldots, m, \tag{2.9b}$$

$$\varDelta S=-\sum_i\varDelta y_iA_i, \tag{2.9c}$$

(2.7) に対応して

$$HSX^{1/2}+X^{1/2}SH+X^{1/2}\varDelta SX^{1/2}+[X^{1/2}SX^{1/2}-\nu I]=0, \tag{2.10a}$$

(2.10b) $$HX^{1/2}+X^{1/2}H-\Delta X=0,$$

(2.10c) $$A_i\cdot\Delta X=0, \qquad i=1,\ldots, m,$$

(2.10d) $$\Delta S=-\sum_i \Delta y_i A_i,$$

そして (2.8) に対応して

(2.11a) $$HXS^{1/2}+S^{1/2}XH+S^{1/2}\Delta XS^{1/2}+[S^{1/2}XS^{1/2}-\nu I]=0,$$

(2.11b) $$HS^{1/2}+S^{1/2}H-\Delta S=0,$$

(2.11c) $$A_i\cdot\Delta X=0, \qquad i=1,\ldots, m,$$

(2.11d) $$\Delta S=-\sum_i \Delta y_i A_i$$

となる．ここで，(2.10)，(2.11) を導出するには，$X^{1/2}$ (あるいは $S^{1/2}$) の ΔX (あるいは ΔS) 方向への微分Hが必要になるが，そのために，$X^{1/2}X^{1/2}=X$ ($S^{1/2}S^{1/2}=S$) の両辺を微分して得られる関係

$$HX^{1/2}+X^{1/2}H=\Delta X \text{（あるいは } HS^{1/2}+S^{1/2}H=\Delta S\text{）}$$

を用いている．(2.9) は AHO 方向 (Alizadeh et al. (1994))，(2.10) は MT 方向 (Monteiro and Tsuchiya (1996))，(2.11) は MT dual 方向と呼ばれている．これらが，中心曲線上に対する純粋な Newton 方向として知られているものである．

3. 問題のスケーリングと Scaled Newton 法

問題 (2.1) と (2.2) に現れる行列に対し正則行列Pによる次のようなスケーリングを考えることができる：$\tilde{X}=PXP^T$, $\tilde{C}=P^{-T}CP^{-1}$, $\tilde{A}_i=P^{-T}A_iP^{-1}$, $\tilde{S}=P^{-T}SP^{-1}$．これらの変換はCやXなどをベクトル上の 2 次形式とみた時にベクトル空間の座標変換に伴って誘導されるものである．(2.1)，(2.2) に対応して定義される問題

(3.1) $$(P) \qquad \min\{\tilde{C}\cdot\tilde{X} : \tilde{A}_i\cdot\tilde{X}=b_i,\ i=1,\ldots, m,\ \tilde{X}\succeq 0\},$$

(3.2) $$(D) \qquad \max\left\{b^T\tilde{y} : \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i\tilde{A}_i+\tilde{S}=\tilde{C},\ \tilde{S}\succeq 0\right\}$$

はもとの問題と完全に等価である．つまり，半正定値計画問題はこのようなスケーリングに対し不変である．さらに，XS の固有値は $\tilde{X}\tilde{S}$ のそれと等しいので，中心曲線 (2.4) やその近傍 (2.5) も不変である．これより，スケーリングを行ってから AHO 方向や MT 方向，MT dual 方向を求め，それを元の空間に戻すことで，新しい探索方向が得られる．これを Scaled Newton 方向と呼ぶ．Scaled Newton 方向は以下のようにして計算される．

1．問題を適当な正則行列Pでスケール変換する．
2．スケール変換された世界で AHO，MT，MT dual 方向を計算する．
3．得られた方向を元の問題の空間に (P^{-1} で) 引き戻す．

スケーリングPを用いた Scaled AHO 方向，Scaled MT 方向，Scaled MT dual 方向の方程式は，内点許容解 (X, S, y) で以下のように書ける．

[Scaled AHO 方向]

(3.3a)
$$\frac{1}{2}(PX\varDelta SP^{-1}+P\varDelta XSP^{-1}+P^{-T}S\varDelta XP^{T}+P^{-T}\varDelta SXP^{T}) + \left[\frac{PXSP^{-1}+P^{-T}SXP^{T}}{2}-\nu I\right]=0\ ,$$

(3.3b)
$$A_i\cdot\varDelta X=0\ ,\qquad i=1,\dots,m\ ,$$

(3.3c)
$$\varDelta S=-\sum_i\varDelta y_iA_i\ ,$$

[Scaled MT 方向]

(3.4a)
$$\begin{aligned}&H(P^{-T}SP^{-1})(PXP^{T})^{1/2}+(PXP^{T})^{1/2}(P^{-T}SP^{-1})H\\&\quad+(PXP^{T})^{1/2}P^{-T}\varDelta SP^{-1}(PXP^{T})^{1/2}\\&\quad+[(PXP^{T})^{1/2}(P^{-T}SP^{-1})(PXP^{T})^{1/2}-\nu I]=0\ ,\end{aligned}$$

(3.4b)
$$H(PXP^{T})^{1/2}+(PXP^{T})^{1/2}H-P\varDelta XP^{T}=0\ ,$$

(3.4c)
$$A_i\cdot\varDelta X=0\ ,\qquad i=1,\dots,m\ ,$$

(3.4d)
$$\varDelta S=-\sum_i\varDelta y_iA_i\ ,$$

[Scaled MT dual 方向]

(3.5a)
$$\begin{aligned}&H(PXP^{T})(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}+(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}(PXP^{T})H\\&\quad+(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}P\varDelta XP^{T}(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}\\&\quad-[(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}(PXP^{T})(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}-\nu I]=0\ ,\end{aligned}$$

(3.5b)
$$H(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}+(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}H-P^{-T}\varDelta SP^{-1}=0\ ,$$

(3.5c)
$$A_i\cdot\varDelta X=0\ ,\qquad i=1,\dots,m\ ,$$

(3.5d)
$$\varDelta S=-\sum_i\varDelta y_iA_i\ .$$

P を正則行列の範囲で変化させることで，いろいろな探索方向が得られる．P を正則行列ととった Scaled AHO 方向の集合を Monteiro-Zhang（MZ）族（Monteiro and Zhang（1996））と呼ぶ．また，P を正則行列にとった Scaled MT（dual）方向の集合を Monteiro-Tsuchiya (MT)（dual）族（Monteiro and Tsuchiya (1996)）と呼ぶ．（Monteiro and Zanjacomo (1997) では，ここで MT 族，MT dual 族と呼んでいるものを，各々X-MT 族，S-MT 族と呼んでいる．このような探索方向の族で一番最初に提案されたのは，小島・進藤・原らによる KSH 族 (Kojima et al.（1997)）であるが，Newton 法としての解釈が困難なので，ここではとり扱っていない．）

一般に，ある探索方向の計算法が与えられた時に，元の問題で計算された探索方向 ($\varDelta X, \varDelta S, \varDelta y$) とスケーリングされた問題で計算された方向 ($\varDelta\tilde{X}, \varDelta\tilde{S}, \varDelta\tilde{y}$) が，関係

$$\varDelta\tilde{X}=P\varDelta XP^{T}\ ,\qquad \varDelta\tilde{S}=P^{-T}\varDelta SP^{-1}\ ,\qquad \varDelta\tilde{y}=\varDelta y$$

を満たす時，探索方向はスケーリング不変性を持つという．スケーリングで互いに移り合う問題は対等であると考えられるので，不変性を持った方向が望ましいと考えられる．

一般には，AHO 方向や MT 方向は不変性を持たないが，適当なスケーリングと組合せた Scaled Newton 方向はスケーリング不変性を持つ．そのためのスケーリングとは次のようなものである．

1．主アフィンスケーリング：$P=X^{-1/2}$ と取る．すると，$\tilde{S}=X^{1/2}SX^{1/2}$，$\tilde{X}=I$ となる．主変数 $\tilde{X}$ を単位元 I に写すので，このスケーリングを主アフィンスケーリングと呼ぶ．
2．双対アフィンスケーリング：$P=S^{1/2}$ と取る．すると，$\tilde{X}=S^{1/2}XS^{1/2}$，$\tilde{S}=I$ となる．双対変数 $\tilde{S}$ を単位元 I に写すので，このスケーリングを双対アフィンスケーリングと呼ぶ．
3．Nesterov-Todd（NT）スケーリング（Nesterov and Todd（1997））：変換後の $\tilde{X}$ と $\tilde{S}$ が同じ値になるように P を選ぶ．そのような P の一つは以下のようにして求められる．$\tilde{X}=PXP^T=P^{-T}SP^{-1}=\tilde{S}$．これより，$P^TPXP^TP=S$．両辺に左と右から $X^{1/2}$ をかけて，$X^{1/2}P^TPX^{1/2}=(X^{1/2}SX^{1/2})^{1/2}$ を得る．したがって，$P^TP=X^{-1/2}(X^{1/2}SX^{1/2})^{1/2}X^{-1/2}\equiv W$ となる．導出から分かるように，W は，$WXW=S$ となる唯一の対称行列である．さらに，P を対称行列に選べばこのような P も一意に定まり，この時，$\tilde{X}=\tilde{S}$ となる．つまり，

$$\tilde{X}=W^{1/2}XW^{1/2}=W^{-1/2}SW^{-1/2}=\tilde{S}$$

である．このようなスケーリングを Nesterov-Todd のスケーリングと呼ぶ．

これまで述べてきた 3 つの探索方向 AHO, MT, MT dual と 3 つのスケーリングを組合せることで，MT，AHO 2 つの純粋 Newton 方向の他に，以下のような 5 つの Scaled Newton 方向を新しく構成することができる．(本来は 9 つの可能性がある筈だが，いくつかの欄に同じ探索方向が現われていることに注意．)

スケーリング／方程式	AHO (3.3)	MT (3.4)	MT dual (3.5)
$P=S^{1/2}$	HRVW/KSH/M	NT	HRVW/KSH/M
$P=X^{-1/2}$	HRVW/KSH/M dual	HRVW/KSH/M dual	NT
$P=W^{1/2}$	NT	MTW	MTW dual

ここで，探索方向の主問題と双対問題に対する対称性ということについて考察してみよう．探索方向を定義する方程式で，(2.9a)，(2.10a, b)，(2.11a, b)，(3.3a)，(3.4a, b)，(3.5a, b) などは，$XS=\nu I$ に等価な条件 $\Psi_\nu(X, S)=0$，あるいはそのスケーリングされたものから Newton 方程式として構成されたことはすでに述べた通りである．この条件において，X, S を入れ替えても，それが $XS=\nu I$ と等価であることは変わらない．したがって，(2.9a)，(2.10a, b)，(2.11a, b)，(3.3a)，(3.4a, b)，(3.5a, b) において，X と S（そして ΔX と ΔS）を入れ替えて得られる方程式も探索方向の方程式として同様の考え方で正当化できることは明らかであろう．そこで，ある探索方向が $\Psi_\nu(X, S)=0$ に対する Newton 方向として得られる時に，$\Psi_\nu(X, S)=0$ を線形化した部分（探索方向を定義する各式の (a)，あるいは (a) (b) の部分）の X と S を完全に入れ替えることによって新たに定義される探索方向を，双対な探索方向と呼ぼう．もし，これらがまったく同じものになる時に，その探索方向は自己双対であるという．明らかに，AHO 方向は自己双対であるが，MT 方向は自己双対ではない．MT 方向の双対は MT dual 方向になる．NT 方向は自己双対であるが，HRVW/KSH/M 方向，MTW 方向は自己双対ではなく，その双対は HRVW/KSH/M dual 方向，MTW dual 方向になる．（ここで述べている探索方向の双対の定義は Todd（1997b）のものと同じである．）

次に，探索方向の族について同様のことを考える．ある探索方向の族において，各メンバーに双対な探索方向からなる集合をその族の dual あるいは双対と呼ぶ．もし，ある族がその双対と一致する時，その族を自己双対な族と呼ぶ．

MZ 族は，Scaled AHO 方向の族であるが，$P=\tilde{P}$ ととった Scaled AHO 方向の方程式にお

いてXとS（そしてΔXとΔS）を入れ替えたものは，$P=\tilde{P}^{-T}$とおいたScaled AHO方向の方程式となっているので，やはりMZ族に属する．したがってMZ族は自己双対である．また，MZ族はHRVW/KSH/M，HRVW/KSH/M dual，NTの各方向を含む．

一方，MT族は，Scaled MT方向の族である．Scaled MT方向の方程式においてXとSを入れ替えて得られる探索方向はMT dual族に属するが，この探索方向は，どのようなスケーリングを施せばScaled MT方向として得られるかは定かではない．したがって，MT族は自己双対かどうかはわからない．しかしながら，いくつかの探索方向がMTとMT dual族の両方に属することが知られている．NT方向は$P=S^{1/2}$ととった場合のMT族のメンバーとして得られ，また，$P=X^{-1/2}$ととった場合のMT dual族のメンバーとして得られる．KSH/HRVW/M方向は，MT dual族で$P=S^{1/2}$ととって得られるものであるが，実は，Toddはこれが MT族にも属することを指摘した（Todd（1997a，1997b））．対称性から，KSH/HRVW/M dual方向もMT族，MT dual族の両方に属することが分かる．したがって，少なくとも，MT族とMT dual族の交わりには，NT，KSH/HRVW/Mとその双対の3つの方向が含まれる．

以下では，この3つの方向に加え，MTW，MTW dualを含んだスケーリング不変な自己双対なMT部分族を導入する．これは，MT族が自己双対か否かという問いを解く上での一つの手掛りとなろう．

4. 主要結果とその証明

次のようなMT部分族を考える．

$$\Omega=\{(\Delta X, \Delta S, \Delta y):(\Delta X, \Delta S, \Delta y)\text{ は }P=V^{\alpha}W^{1/2}\text{ ととって得られる Scaled MT 方向}\}$$

ここで，$W=X^{-1/2}(X^{1/2}SX^{1/2})^{1/2}X^{-1/2}$, $V=W^{1/2}XW^{1/2}=W^{-1/2}SW^{-1/2}$, V^{α}はVの特異値分解を$V=U\Sigma U^T$として，$U\Sigma^{\alpha}U^T$で定義される正定対称行列のべき乗である．$PXP^T=V^{1+2\alpha}$, $P^{-T}SP^{-1}=V^{1-2\alpha}$などを用いると，探索方向を求める方程式は，$(X,S,y)\in F^0(PD)$において以下のように書ける．

(4.1a) $$HV^{3/2-\alpha}+V^{3/2-\alpha}H+V^{1/2}W^{-1/2}\Delta SW^{-1/2}V^{1/2}=V^2-\nu I,$$

(4.1b) $$HV^{1/2+\alpha}+V^{1/2+\alpha}H=V^{\alpha}W^{1/2}\Delta XW^{1/2}V^{\alpha},$$

(4.1c) $$A_i\cdot\Delta X=0,\qquad i=1,\dots,m,$$

(4.1d) $$\Delta S=-\sum_i \Delta y_i A_i.$$

これに双対な方向は，上の方程式の第1，2式で，SとX（およびΔSとΔX）の役割を入れ替えて得られる．W, Vの定義式においてXとSを入れ替えたものを$\hat{W}$, $\hat{V}$などと記すことにすると，方程式

$$\begin{aligned}
&\hat{H}\hat{V}^{3/2-\beta}+\hat{V}^{3/2-\beta}\hat{H}+\hat{V}^{1/2}\hat{W}^{-1/2}\Delta X\hat{W}^{-1/2}\hat{V}^{1/2}=\hat{V}^2-\nu I,\\
&\hat{H}\hat{V}^{1/2+\beta}+\hat{V}^{1/2+\beta}H=\hat{V}^{\beta}\hat{W}^{1/2}\Delta S\hat{W}^{1/2}\hat{V}^{\beta},\\
&A_i\cdot\Delta X=0,\qquad i=1,\dots,m,\\
&\Delta S=-\sum_i \Delta y_i A_i
\end{aligned}$$

（αの代りにβと置いた）が得られる．$\hat{W}$は$\hat{W}S\hat{W}=X$を満たす唯一の対称行列であるから，$\hat{W}=W^{-1}$, $\hat{V}=\hat{W}^{1/2}S\hat{W}^{1/2}=W^{-1/2}SW^{-1/2}=V$となることを用いると，結局，上の方程式は，

(4.2a) $\hat{H}V^{3/2-\beta}+V^{3/2-\beta}\hat{H}+V^{1/2}W^{1/2}\Delta XW^{1/2}V^{1/2}=V^2-\nu I,$

(4.2b) $\hat{H}V^{1/2+\beta}+V^{1/2+\beta}\hat{H}=V^{\beta}W^{-1/2}\Delta SW^{-1/2}V^{\beta},$

(4.2c) $A_i\cdot\Delta X=0, \quad i=1,\ldots,m,$

(4.2d) $\Delta S=-\sum_i \Delta y_i A_i$

となって，Ω に対して双対な族 Ω^* は，

$$\Omega^*=\{(\Delta X,\Delta S,\Delta y):(\Delta X,\Delta S,\Delta y)\text{ は } P=V^{-\beta}W^{1/2}\text{ ととって得られる Scaled MT dual 方向}\}$$

であることが分かる．

Proposition 4.1. Ω に属する各探索方向はスケーリング不変である．

Proof. 問題が Q でスケーリングされたとして，スケーリングされた問題で対応する量を $\tilde{A}$, $\tilde{X}$ 等で表す．すると，$\tilde{W}^{1/2}QXQ^T\tilde{W}^{1/2}=\tilde{W}^{-1/2}Q^{-T}SQ^{-1}\tilde{W}^{-1/2}$ より，$Q^T\tilde{W}QXQ^T\tilde{W}Q=S$ が成立する．X を S に変換する対称なスケーリング行列は，唯一定まるので（NT スケーリングの導出の項参照），$W=Q^T\tilde{W}Q$ となる．これより，ある直交行列を用いて，$\tilde{W}^{1/2}Q=UW^{1/2}$ と書ける．これを $\tilde{V}$ の定義に代入して，$\tilde{V}=U^TVU$ を得る．

さて，スケーリングされた問題に対する方程式は，次のようにかける．

$$\begin{aligned}&\hat{H}\tilde{V}^{3/2-\alpha}+\tilde{V}^{3/2-\alpha}\hat{H}+\tilde{V}^{1/2}\tilde{W}^{-1/2}\Delta\tilde{S}\tilde{W}^{-1/2}\tilde{V}^{1/2}=\tilde{V}^2-\nu I,\\ &\hat{H}\tilde{V}^{1/2+\alpha}+\tilde{V}^{1/2+\alpha}\hat{H}=\tilde{V}^{\alpha}\tilde{W}^{1/2}\Delta\tilde{X}\tilde{W}^{1/2}\tilde{V}^{\alpha},\\ &\tilde{A}_i\cdot\Delta\tilde{X}=0,\quad i=1,\ldots,m,\\ &\Delta\tilde{S}=-\sum_i\Delta y_i A_i.\end{aligned}\tag{4.3}$$

上に述べた $\tilde{W}$, $\tilde{V}$ の定義および $\tilde{V}^{\alpha}=U^TV^{\alpha}U$ と書けることを用いると，もし，$(\Delta X,\Delta S,\Delta y)$ が (4.1) の解ならば，$(Q\Delta XQ^T,Q^{-T}\Delta SQ,\Delta y)$ が (4.3) の解であることは，代入によって簡単に確かめられる（$\hat{H}=U^THU$ ととることに注意）．□

Proposition 4.2. Ω は HRVW/KSH/M dual，MTW，NT の各方向を含む．

Proof. Ω が MTW 方向を含むのはその定義（Monteiro and Tsuchiya (1996)）より明らかである．

HRVW/KSH/M dual 方向は，$P=X^{-1/2}$ ととった Scaled MT 方向で，スケーリング不変性があることが知られている（Monteiro and Tsuchiya (1996)）．Ω に属する各方向もスケーリング不変であることを考えて，一般性を失わずに $X=S=V$, $W=I$ とできる．（NT スケーリングのもとで考える．）そこで，$\alpha=-1/2$ とすると，$P=V^{-1/2}=X^{-1/2}$ ととった Scaled MT 方向が生成でき，これが HRVW/KSH/M dual 方向となる．

NT 方向は，$P=S^{1/2}$ ととった Scaled MT 方向で，スケーリング不変性があることが知られている（Monteiro and Tsuchiya (1996)）．HRVW/KSH/M 方向の場合と同様に考えて，Ω で，$\alpha=1/2$ ととると，$P=V^{1/2}=S^{1/2}$ ととった Scaled MT 方向が生成でき，これが NT 方向になる．□

これまで，それぞれの探索方向が任意の $F^0(PD)$ の点で well-defined かどうかについて論じ

てこなかったが，実はAHOやMTなどの方向は，中心曲線を含むある一部の領域でしか存在が保障されないことが知られている（Monteiro and Tsuchiya (1996)，Monteiro and Zanjaĉomo (1996)）．一方，HRVW/KSH/M，HRVW/KSH/M dual，NT，MTWなどの方向は任意の $F^0(PD)$ でwell-definedである（Nesterov and Todd (1997)，Kojima et al. (1997)，Monteiro (1997)，Todd et al. (1996)，Monteiro and Tsuchiya (1996)）．以下に示すように，Ω に属する方向は，任意の $F^0(PD)$ の点でwell-definedである．

Proposition 4.3. Ω に属する探索方向は，任意の $F^0(PD)$ の点でwell-definedである．

Proof. これを示すには，Ω がMonteiro and Tsuchiya (1996) で定義されているMT*族に属することを示せば良い．MT*族の定義は，

$$(PXP^T)(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}+(P^{-T}SP^{-1})^{1/2}(PXP^T)>0$$

であるようなMT族であるということであるが，これは，Ω に属する各探索方向については上式の左辺は $V^{3/2+\alpha}$ であるから容易に確かめられる．□

次の定理が我々の主要結果である．

Theorem 4.4. Ω は，HRVW/KSH/M，HRVW/KSH/M dual，MTW，MTW dual，NTの各探索方向を含む，スケーリング不変な探索方向からなる自己双対なMT族の部分族である．

Proof. $(\Delta X_\alpha^X, \Delta S_\alpha^X, \Delta y_\alpha^X)$ を (4.1) の解とし，$(\Delta X_\beta^S, \Delta S_\beta^S, \Delta y_\beta^S)$ を (4.2) の解としよう．以下，$\alpha+\beta=1$ である時に，$(\Delta X_\alpha^X, \Delta S_\alpha^X, \Delta y_\alpha^X)=(\Delta X_\beta^S, \Delta S_\beta^S, \Delta y_\beta^S)$ が成り立っていることを示す．これは任意の Ω^* のメンバーは Ω として得られることを示している．Ω の任意のメンバーがスケーリング不変であること，そしてHRVW/KSH/M dual，MTW，NTは Ω に属することは先に証明したので，上に述べたことが示せれば，定理が証明されたことになる．

(4.1)，(4.2)の(c)，(d)の部分は共通なので，(a)，(b)についてだけ示せば良い．そのために，(a)，(b)を，NTスケーリングをした空間で書き直してみよう．$(\Delta\hat{X}_\alpha^X, \Delta\hat{S}_\alpha^X, \Delta y_\alpha^X)$ と $(\Delta\hat{X}_\beta^S, \Delta\hat{S}_\beta^S, \Delta y_\beta^X)$ を $(\Delta X_\alpha^X, \Delta S_\alpha^X, \Delta y_\alpha^X)$ と $(\Delta X_\beta^S, \Delta S_\beta^S, \Delta y_\beta^S)$ を各々NTスケーリングで表現したものだとしよう．

$$\Delta\hat{X}_\alpha^X=W^{1/2}\Delta X_\alpha^X W^{1/2}, \qquad \Delta\hat{S}_\alpha^S=W^{-1/2}\Delta S_\alpha^S W^{-1/2},$$
$$\Delta\hat{X}_\beta^S=W^{1/2}\Delta X_\beta^S W^{1/2}, \qquad \Delta\hat{S}_\beta^S=W^{-1/2}\Delta S_\beta^S W^{-1/2}$$

が成立する．(4.1a)，(4.2a)の両辺に左と右から $V^{-1/2}$ をかけ，(4.1b)，(4.2b)の両辺に各々 $V^{-\alpha}$，$V^{-\beta}$ をかけ，方程式を新しい変数について書き直すと，

$$\begin{aligned} &V^{-1/2}HV^{1-\alpha}+V^{1-\alpha}HV^{-1/2}+\Delta\hat{S}_\alpha^X=V-\mu V^{-1}, \\ &V^{-\alpha}HV^{1/2}+V^{1/2}HV^{-\alpha}=\Delta\hat{X}_\alpha^X, \end{aligned} \tag{4.4}$$

そして

$$\begin{aligned} &V^{-1/2}\hat{H}V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\hat{H}V^{-1/2}+\Delta\hat{X}_\beta^S=V-\mu V^{-1}, \\ &V^{-\beta}\hat{H}V^{1/2}+V^{1/2}\hat{H}V^{-\beta}=\Delta\hat{S}_\beta^S \end{aligned} \tag{4.5}$$

が得られる．

以下，これらの方程式を Kronecker 積（Horn and Johnson（1991））で表現して見よう．行列をベクトルに展開する演算 $\mathrm{vec}(L)=(L_{11}, L_{21},..., L_{nn})$ を導入する．$n\times n$ の行列 F，G に対して，Kronecker 積 $F\otimes G$ は，その ij ブロックが $f_{ij}G$ で与えられる $n^2\times n^2$ 行列である．行列 E，F，G，H に対し

$$(E\otimes F)\mathrm{vec}[G]=\mathrm{vec}[FGE^T], \tag{4.6}$$

$$(EF)\otimes(GH)=(E\otimes G)(F\otimes H) \tag{4.7}$$

が成り立つ．以下，これらの性質を用いて行列を変形していく．

$\widehat{\Delta x}^X=\mathrm{vec}(\Delta\hat{X}^X)$, $\widehat{\Delta s}^X=\mathrm{vec}(\Delta\hat{S}^X)$, $\widehat{\Delta x}^S=\mathrm{vec}(\Delta\hat{X}^S)$, $\widehat{\Delta s}^S=\mathrm{vec}(\Delta\hat{S}^S)$ と定義して，(4.6) を用いると，方程式 (4.4) と (4.5) は

$$\begin{aligned}&[V^{-1/2}\otimes V^{1-\alpha}+V^{1-\alpha}\otimes V^{-1/2}][V^{-\alpha}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\alpha}]^{-1}\widehat{\Delta x}^X+\widehat{\Delta s}^X\\&\quad=\mathrm{vec}[V-\mu V^{-1}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}][V^{-\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\beta}]^{-1}\widehat{\Delta s}^S+\widehat{\Delta x}^S\\&\quad=\mathrm{vec}[V-\mu V^{-1}],\end{aligned} \tag{4.8}$$

となる．(ここで，行列 $[V^{-\alpha}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\alpha}]$ は正則であることに注意．それは，この行列が，$[V^{-\alpha}\otimes V^{-\alpha}][I\otimes V^{1/2+\alpha}+V^{1/2+\alpha}\otimes I]$ と書け，$V^{-\alpha}\otimes V^{-\alpha}$ の逆行列は $V^{\alpha}\otimes V^{\alpha}$ であり，$[I\otimes V^{1/2+\alpha}+V^{1/2+\alpha}\otimes I]$ は $V^{1/2+\alpha}$ が正定値対称なので正則であるためである（Horn and Johnson（1991），定理 4.4.5 参照）.）

(4.8) の両辺に左から

$$[V^{-\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\beta}][V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}]^{-1}$$

をかけると，

$$[V^{-\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\beta}][V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}]^{-1}\widehat{\Delta x}^S+\widehat{\Delta s}^S=\mathrm{vec}[V-\mu V^{-1}]$$

が得られる．ここで，右辺が変化しないことは，

$$[V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}]^{-1}\mathrm{vec}[V-\mu V^{-1}]=\frac{1}{2}\mathrm{vec}[V^{\beta-1/2}(V-\nu V^{-1})] \tag{4.9}$$

が成立することに注意して，(4.6) を用いると分かる．

以下，$\alpha+\beta=1$ であれば，

$$\begin{aligned}&[V^{-\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\beta}][V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}]^{-1}\\&\quad=[V^{-1/2}\otimes V^{1-\alpha}+V^{1-\alpha}\otimes V^{-1/2}][V^{-\alpha}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\alpha}]^{-1}\end{aligned} \tag{4.10}$$

が成立することを示す．これが示されれば定理は証明されたことになる．実際，(4.7) を用いて，

$$\begin{aligned}&[V^{-\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\beta}][V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}]^{-1}\\&\quad=[V^{-\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-\beta}](V^{\beta-1/2}\otimes V^{\beta-1/2})\\&\qquad\cdot(V^{-\beta+1/2}\otimes V^{-\beta+1/2})[V^{-1/2}\otimes V^{1-\beta}+V^{1-\beta}\otimes V^{-1/2}]^{-1}\\&\quad=[V^{-1/2}\otimes V^{\beta}+V^{\beta}\otimes V^{-1/2}][V^{-1+\beta}\otimes V^{1/2}+V^{1/2}\otimes V^{-1+\beta}]^{-1}\end{aligned}$$

となるので，これを(4.10)の右辺と比較して，$\alpha+\beta=1$ であれば両者は等しいことがわかる．□

参 考 文 献

Alizadeh, F. (1995). Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization, *SIAM J. Optim.*, **5**, 13-51.

Alizadeh, F., Haeberly, J.-P. and Overton, M. (1994). Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming, Tech. Report 659, Computer Science Department, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Science*, SIAM Publications, Philadelphia.

Goemens, M. X. and Williamson, D. P. (1995). Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *Journal of Association for Computing Machinery*, **42**, 1115-1145.

Helmberg, C., Rendl, F., Vanderbei, R. J. and Wolkowicz, H. (1996). An interior-point method for semidefinite programming, *SIAM J. Optim.*, **6**, 342-361.

Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1991). *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Massachusetts.

小島政和 (1996). 半正定値計画問題と内点法, 応用数理, **6**(4), 270-279.

小島政和(1998). 半正定値計画とその組合せ最適化への応用,『離散構造とアルゴリズムV』, 203-246, 近代科学社, 東京.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989a). A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems, *Math. Programming*, **44**, 1-26.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989b). A primal-dual interior point algorithm for linear programming, *Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 29-47, Springer, New York.

Kojima, M., Shindoh, S. and Hara, S. (1997). Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices, *SIAM J. Optim.*, **7**, 86-125.

Monteiro, R. D. C. (1997). Primal-dual path following algorithms for semidefinite programming, *SIAM J. Optim.*, **7**, 663-678.

Monteiro, R. D. C. and Adler, I. (1989). Interior path-following primal-dual algorithms, Part I: Linear programming, *Math. Programming*, **44**, 27-41.

Monteiro, R. D. C. and Tsuchiya, T. (1996). Polynomial convergence of a new family of primal-dual algorithms for semidefinite programming, Research Memo., No. 627, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (to appear in *SIAM J. Optim.*).

Monteiro, R. D. C. and Zanjaĉomo, P. (1996). A note on the existence of the Alizadeh-Haeverly-Overton direction for semidefinite programming, manuscript, School of ISyE, Georgia Institute of Technology, Atlanta.

Monteiro, R. D. C. and Zanjaĉomo, P. (1997). Implementation of primal-dual methods for semidefinite programming based on Monteiro-Tsuchiya Newton directions and their variants, *Math. Programming*, **78**, 393-396.

Monteiro, R. D. C. and Zhang, Y. (1998). A unified analysis for a class of path-following primal-dual interior-point algorithms for semidefinite programming, *Math. Programming*, **81**, 281-299.

Nesterov, Y. and Nemirovskii, A. (1994). *Interior Point Methods in Convex Programming: Theory and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Nesterov, Y. and Todd, M. (1997). Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming, *Math. Oper. Res.*, **22**, 1-42.

Tanabe, K. (1988). Centered Newton method for mathematical programming, *System Modelling and Optimization* (eds. M. Iri and K. Yajima), 197-206, Springer, Tokyo.

Todd, M. J. (1997a). Private communication.

Todd, M. J. (1997b). On the search directions in interior-point methods for semidefinite programming, Tech. Report 1205, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York.

Todd, M. J., Toh, K. C. and Tütüncü, R. H. (1996). On the Nesterov-Todd direction in semidefinite programming, *SIAM J. Optim.*, **8**, 769-796.

土谷　隆 (1998). 最適化アルゴリズムの新展開 (連載中), システム・制御・情報, **42**, 218-226, 334-343, 460-469, 550-559.

A Scaling-invariant Self-dual Subfamily of the Monteiro-Tsuchiya Family of Search Directions for the Primal-dual Algorithms for Semidefinite Programming

Takashi Tsuchiya

(The Institute of Statistical Mathematics)

Semidefinite programming (SDP) is the problem of minimizing a linear objective function over the cross-section of the cone of symmetric positive semidefinite matrices and an affine space. In this paper we survey various search directions for the primal-dual path-following algorithms for SDP chiefly from the viewpoint of invariance and primal-dual symmetry, and proposes a self-dual subfamily of the Monteiro–Tsuchiya family of search directions which is scaling invariant and contains all the known scaling invariant search directions for the primal-dual algorithms for SDP.

Key words: Semidefinite programming, primal-dual interior point algorithm, Monteiro-Tsuchiya family, self-duality of search directions, Nesterov-Todd direction, HRVW/KSH/M direction.