統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 175-199

特集「統計基礎理論」
[研究詳解]

Malliavin 解析と統計的漸近理論

名古屋大学* 阪 本 雄 二
東京大学** 吉 田 朋 広

(受付 1998 年 12 月 28 日；改訂 1999 年 3 月 3 日)

要　旨

漸近展開の導出においては，確率変数の分布の滑らかさをどのように捉えるかが問題になるが，連続時間確率過程の汎関数を扱うためには，無限次元解析が必要になり，Malliavin 解析が解決の鍵となる．Malliavin 解析では部分積分の公式が重要な役割を演じるが，我々は有限次元の場合から始め，この理論の雛形について考察する．つぎに，Malliavin 解析の基礎に関して解説し，一般化 Wiener 汎関数の漸近展開の理論およびその統計学への応用について述べる．さらに，縮小推定量にたいする展開公式もこのような一般論から導けることを示す．

キーワード：Stein の等式，部分積分の公式，Sobolev 空間，一般化 Wiener 汎関数，拡散過程，縮小推定量．

1. Stein の等式と部分積分の公式

p 変量正規分布族 $\{N_p(m, \sigma^2 I_p);\ m \in \boldsymbol{R}^p,\ \sigma > 0\}$ (I_p は p 次単位行列) に従う n 個の独立な観測 $X_1, X_2,\dots, X_n$ に基づく位置母数mの自然な推定量

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

は 2 次損失関数を考えるとき，$p \geq 3$ ならば非許容的 (inadmissible) であることは Stein 現象としてよく知られている．この事実を証明するときに用いるのが **Stein の等式** (Stein's identity) とよばれる等式である．確率変数 $w = (w^i)_{i=1}^{p}$ が p 次元正規分布 $N(m, \sigma^2 I_p)$ に従うとする．すなわち，w の $\boldsymbol{R}^d$ 上の分布が確率密度関数

$$\phi(w\,;\, m, \sigma^2 I_p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{p/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{p}(w^i - m^i)^2\right)$$

を持つとする．ただし，$m = (m^i)_{i=1}^{p}$. このとき等式

$$(1.1)\quad \int_{\boldsymbol{R}^p} \partial_i F(w)\cdot\phi(w\,;\, m, \sigma^2 I_p)\, dw = \int_{\boldsymbol{R}^p} F(w)\frac{w^i - m^i}{\sigma^2}\phi(w\,;\, m, \sigma^2 I_p)\, dw, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial w^i}$$

を **Stein の等式**とよぶ．この式はたとえば $F:\ \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}$ が微分可能でそれ自身と導関数が高々

* 工学研究科：〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町．
** 数理科学研究科：〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1．

多項式の増大のオーダーをもつとき，**部分積分**によって容易に確かめることができる．

$$g(x) = -\frac{p-2}{|x|^2}x$$

とおくと，分散係数 σ^2 が既知のときの James-Stein 推定量

$$\tilde{m} = \left(1 - \frac{\sigma^2(p-2)}{n|\bar{X}|^2}\right)\bar{X}$$

は

$$\tilde{m} = \bar{X} + \frac{\sigma^2}{n}g(\bar{X})$$

と表され，いっぽう，

$$g(x) = -\nabla \log |x|^{p-2}$$

となり，とくに，

$$\begin{aligned} \text{div } g(x) &= \sum_{i=1}^{p}\partial_i g(x)^i \\ &= -|g(x)|^2 \end{aligned}$$

となる．Stein の等式 (1.1) を用いると，

$$\begin{aligned} E_m[|\bar{X}-m|^2] - E_m[|\tilde{m}-m|^2] &= -\frac{2\sigma^2}{n}E_m[(\bar{X}-m)\cdot g(\bar{X})] - \frac{\sigma^4}{n^2}E_m[|g(\bar{X})|^2] \\ &= -\frac{2\sigma^4}{n^2}E_m[\text{div } g(\bar{X})] - \frac{\sigma^4}{n^2}E_m[|g(\bar{X})|^2] \\ &= \frac{\sigma^4}{n^2}E_m[|g(\bar{X})|^2] \\ &> 0 \end{aligned}$$

を得る．これが $\bar{X}$ の非許容性の証明であった (Ibragimov and Has'minskii (1981))．

本質的に同じことなので以後 $m=0$，$\sigma=1$ とし，$\phi(w) = \phi(w;0,I_p)$ と表す．$\boldsymbol{R}^p$ 上で定義された滑らかな実数値関数でそれ自身とすべての導関数が高々多項式のオーダー以下であるようなもの全体の集合を $C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^p)$ で表す．$F, G^i \in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^p), i=1,\ldots,p,$ に対して，式 (1.1) で F の代わりに FG^i をとると，

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{R}^p}\partial_i F(w)\cdot G^i(w)\,\phi(w)\,dw + \int_{\boldsymbol{R}^p}F(w)\,\partial_i G^i(w)\,\phi(w)\,dw \\ &\quad = \int_{\boldsymbol{R}^p}F(w)\,G^i(w)\,w^i\phi(w)\,dw \end{aligned}$$

となるから，$F \in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^p)$ に対して

$$DF = \nabla F,$$

$G = (G^i)_{i=1}^p \in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^p;\boldsymbol{R}^p)$ に対して

$$D^*G(w) = -\text{div } G(w) + \sum_{i=1}^{p}G^i(w)\,w^i$$

とおくと，(1.2) より，

$$(1.3)\qquad \int_{\boldsymbol{R}^p}\langle DF(w),\, G(w)\rangle_{\boldsymbol{R}^p}\phi(w)\,dw = \int_{\boldsymbol{R}^p}F(w)\,D^*G(w)\,\phi(w)\,dw$$

を得る．式 (1.3) を眺めると，左辺の F の微分が右辺では消えて，その代わりに G の微分が現れているから，これは一種の**部分積分の公式**といえる．逆に G を恒等的に第 i 標準基底ベクトルにとると容易にわかるように，(1.3) は Stein の等式と同値である．

さて，$F\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^p;\boldsymbol{R}^k)$ に対して

$$\sigma_F = (\sigma_F^{lm})_{l,m=1}^k$$

とする．ここで，

$$\sigma_F^{lm} = \langle DF^l,\, DF^m\rangle_{\boldsymbol{R}^p}$$

である．σ_F は F の Malliavin 共分散行列と呼ばれる．$\hat{\sigma}_{ml}$ を行列 σ_F の (ml) 余因子とし，$\Delta_F=\det\sigma_F$ とおく．このとき，$T\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^k)$, $J\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^p)$, $G=J\sum_{m=1}^k DF^m\hat{\sigma}_{ml}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle D(T(F(w))),\, G\rangle_{\boldsymbol{R}^p} &= \sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^k\partial_j T(F(w))\,\partial_i F^j(w)\,J(w)\sum_{m=1}^k\partial_i F^m(w)\,\hat{\sigma}_{ml}(w)\\ &= \sum_{j=1}^k\partial_j T(F(w))\,J(w)\sum_{m=1}^k\sigma_F^{jm}\hat{\sigma}_{ml}(w)\\ &= \partial_l T(F(w))\,\Delta_F(w)\,J(w)\end{aligned}$$

だから，(1.3) を用いると，

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad &\int_{\boldsymbol{R}^p}(\partial_l T)(F(w))\,\Delta_F(w)\,J(w)\,\phi(w)\,dw\\ &\quad = \int_{\boldsymbol{R}^p}T(F(w))\,D^*\Big(J(w)\sum_{m=1}^k\hat{\sigma}_{ml}DF^m(w)\Big)\,\phi(w)\,dw\end{aligned}$$

を得る．Δ_F^{-1} の適当な可積分性のもとで，(1.4) において $J=\Delta_F^{-1}\psi$，$\psi\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^d)$，に置き換えることができて，

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad &\int_{\boldsymbol{R}^p}(\partial_l T)(F(w))\,\psi(w)\,\phi(w)\,dw\\ &\quad = \int_{\boldsymbol{R}^p}T(F(w))\,D^*\Big(\psi(w)\sum_{m=1}^k\gamma_F^{ml}DF^m(w)\Big)\,\phi(w)\,dw\end{aligned}$$

を得る．ここで，γ_F^{ml} は σ_F^{-1} の (m,l) 成分である．等式 (1.4)，(1.5) は**部分積分の公式**と呼ばれる．

次節で説明するように，漸近展開を導くとき，対象とする確率変数の分布の滑らかさが要求される．その際，本節で説明した部分積分の公式，および Malliavin 共分散の非退化性 (Δ_F^{-1} の可積分性) が鍵になることは，以降の節で明らかにする．

2. 分布の滑らかさと漸近展開

正規密度による Edgeworth 展開の導出の手順を復習しよう．簡単のため独立同分布に従う確率変数列 $\{\xi_j\}_{j\in N}$ を考え，$E[\xi_j]=0$, $\mathrm{Var}[\xi_j]=1$ とする．$X_n=n^{-1/2}\sum_{j=1}^n\xi_j$ とおくとき，中心極限定理から $X_n\to^d N(0,1)$ $(n\to\infty)$ である．中心極限定理つまり正規分布による分布の近似は n が小さいとき必ずしも精度はよくないことは簡単な数値実験をすれば容易に確認できるこ

とである．そこで，漸近理論であるにも関わらず，nが小さなときにむしろ近似として役に立つ漸近展開に訴えることになる．漸近展開法はnが無限大にいくときの理論なので有限のnに適用してはならないという指摘はあり得るが，漸近展開はむしろ近似公式を系統的に導く方法として重要であり，実際的意味をもつ．

近年，連続時間の確率過程のパスに依存する複雑な汎関数としてかけるデリバティブの価格付けの問題，つまり期待値の計算が課題となっているが，たとえば，顧客の目の前で汎関数を操作しデリバティブの設計をするには，大型計算機を必要とする確率数値解析的な方法よりは，漸近展開等の方法のほうが優れており，実際そのようなことが行われている．また，確率数値解析の厳密証明においても，近似の精度はそのオーダーの評価までで，それにかかるコンスタントに関してはあまり注意が払われていない（実際それを陽に書くことが非常に複雑であり得ることは，確率数値解析の論文の証明を見ればわかる）．漸近展開法が現在利用可能な状況では，問題となっているアシンプトーティクスに制限があるので，漸近展開が万能とはいえないが，しかしながら，いろいろな状況で一つの有力な方法であり，実際的なその近似精度も経験的に確認されている．

さて，もとの問題に戻って，確率変数X_nの分布の漸近展開をどのように導くかであるが，それはよく知られているように，特性関数の展開をすればよい：

$$
\begin{aligned}
\log E[e^{iuX_n}] &= n \log E[e^{iu\xi_1/\sqrt{n}}] \\
&= n \log\left(1 - \frac{u^2}{2n} + \frac{(iu)^3\kappa_3}{6n^{3/2}} + \cdots\right) \\
&= -\frac{u^2}{2} + \frac{(iu)^3\kappa_3}{6n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，κ_3はξ_1の3次キュムラントである．したがって，

$$
\begin{aligned}
E[e^{iuX_n}] &= \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{(iu)^3\kappa_3}{6n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= e^{-\frac{u^2}{2}}\left(1 + \frac{(iu)^3\kappa_3}{6n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

だから，$p_n(z)$をX_nの分布の「確率密度」とするとき，Fourier 逆変換によって，

$$
\begin{aligned}
p_n(z) &= \mathcal{F}^{-1}[E[e^{iuX_n}]](z) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}} e^{-iuz} e^{-\frac{u^2}{2}}\left(1 + \frac{(iu)^3\kappa_3}{6n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}} \left(1 + \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}}(-\partial_z)^3 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{-iuz} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \left(1 + \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}}(-\partial_z)^3 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}} e^{-iuz} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \left(1 + \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}}(-\partial_z)^3 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \phi(z) \\
&= \phi(z) + \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}} h_3(z)\,\phi(z) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となり，漸近展開を得る．ここで，h_3は3次のエルミート多項式である．もし分布の漸近展開が欲しければ，積分形の

$$P[X_n \le x] = \int_{-\infty}^{x}\left(\phi(z) + \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}} h_3(z)\,\phi(z) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) dz$$
$$= \Phi(x) - \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}} h_2(x)\,\phi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

を得る．したがって，

$$P_n(x) = \Phi(x) - \frac{\kappa_3}{6n^{1/2}} h_2(x)\,\phi(x)$$

は X_n の分布関数の 2 次の近似になっていて，

$$\sup_{x\in \boldsymbol{R}}|P[X_n \le x] - P_n(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.1}$$

が予想される．

もちろんこの計算は形式的なものであり，反省しなければならない点がある．X_n の特性関数 $\varphi_n(u) = E[e^{iuX_n}]$ の可積分性が必ずしも成り立たないことである．たとえば，Bernoulli 試行 $P[\xi_j = 1] = P[\xi_j = -1] = 1/2$ のとき $\varphi_n(u) = (\cos(n^{-1/2}u))^n$ となり，可積分でなくなる．実際このとき，$P[X_n = 0] \sim \mathrm{const.}n^{-1/2}$ となり，(2.1) はどんな連続関数 P_n をもってきても成立しない．このように特性関数 $\varphi(u)$ の $|u| \to \infty$ における減衰の状況が漸近展開において本質的であるが，いまの独立同分布の例では可積分性より弱い（であろう），いわゆるクラーメル条件：

$$\limsup_{|u|\to\infty} |E[e^{iu\xi_1}]| < 1 \tag{2.2}$$

で十分である．これは独立性の仮定から特性関数が積の性質をもつからである．クラーメル条件 (2.2) のための十分条件は ξ_1 の分布 G が絶対連続部分を持つこと，つまり，

$$dG(x) = \delta p(x)\,dx + (1-\delta)\,dG_1(x), \qquad 0 < \delta \le 1,$$

となることである．実際，L^1 関数 p は滑らかな関数 $g \in C_K^1(\boldsymbol{R})$ で L^1 近似でき，**部分積分**によって，

$$\lim_{|u|\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}} e^{iux} g(x)\,dx = -\lim_{|u|\to\infty}(iu)^{-1}\int_{\boldsymbol{R}} e^{iux} g'(x)\,dx$$
$$= 0$$

であるから (2.2) が従う．これは Riemann-Lebesgue の定理の証明であった．

確率変数 X_n をつぎのように定義する．

$$X_n = g_n(W).$$

ここで，関数 $g_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は $|x| \le 1/\sqrt{n}$ で $g_n(x) = 0, |x| \ge 2/\sqrt{n}$ で $g_n(x) = x$ を満足する滑らかな関数で，$\sup_{x,n}|g_n'(x)| < \infty$ を満たすものとする．W は 1 次元標準正規確率変数である．

このとき容易にわかるように，任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$X_n = W + o_P(r_n^k), \qquad r_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

このことから，任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$\sup_{x\in \boldsymbol{R}}|P[X_n \le x] - \Phi(x)| = o(r_n^k) \tag{2.3}$$

が期待されるが，これは正しくない．実際，X_n の分布は $x=0$ に r_n のオーダーのアトムをもち，(2.3) は Φ の代わりにどんな連続関数 P_n を用いても成立しない．つまり，$op(1/n^k)$ を平均量において安易に $o(1/n^k)$ に置き換えるのは危険であり，さらに，この例もまた，分布の滑らかさが漸近展開において重要であることを示している．

滑らかな関数 F によって $X=F(W)$ と表される確率変数 X に対して，$DX=F'(W)$ だから Malliavin 共分散は $\sigma_X=F'(W)^2$ となり，もし，$F'(W)^{-1}\in L^p$ $(p>1)$ ならば，部分積分の公式 (1.5) を繰り返し用いて，$|E[e^{iuX}]|\leq \text{const}(k)|u|^{-k}$ $(k\in \boldsymbol{N})$ となることがわかり，とくに X の確率密度の存在と滑らかさが保証される．

上の例 X_n の Malliavin 共分散は，

$$\sigma_{X_n}=1_{\{|W|>r_n\}}g_n'(W)^2$$

だから $\{|W|\leq r_n\}$ 上 $\sigma_{X_n}=0$ となり，Malliavin 共分散の非退化性が成立せず，このことは X_n の分布が一部アトミックで滑らかでないことと対応している．

連続時間の確率過程にたいする統計量では，入力にあたる W が無限次元 (関数) となり，出力を表現する F は汎関数となる．このとき，微分 D, D^* も無限次元の作用素となるが，部分積分の公式 (1.3)，(1.4)，(1.5) は依然成立し，確率変数 $F(W)$ の分布の滑らかさが，Malliavin 共分散の定量的な評価を介して議論できる．これは汎関数の漸近展開を扱うときも同様である．

以下，第3節において，Malliavin 解析の基礎について説明し，第4節において一般化 Wiener 汎関数の漸近展開の理論と小さな攪乱のある拡散過程の推定量の漸近展開，第5節において縮小推定量への適用について述べ，最後に最近の発展に言及する．

3. Malliavin 解析

r 次元 Wiener 空間を (W, H, P) で表すことにする．ここで，W は，$w(0)=0$ なる $[0,\infty)$ 上の $\boldsymbol{R}^r$-値連続関数 w の全体であり，コンパクト集合上の一様位相によって位相空間とみなす．また，P は W 上の Wiener 測度である．さらに，H は，Cameron-Martin 部分空間と呼ばれる Hilbert 空間で，

$$H=\left\{h\in W: h \text{ は絶対連続で，} \int_0^\infty|\dot{h}(t)|^2dt<\infty\right\},\qquad \dot{h}(t)=\frac{dh}{dt}(t)$$

により定義され，内積が

$$\langle h_1,\ h_2\rangle_H=\int_0^\infty\langle \dot{h}_1(t),\ \dot{h}_2(t)\rangle_{\boldsymbol{R}^r}dt$$

により与えられる．

本節では，Wiener 空間 (W, H, P) における Malliavin 解析の基本的な概念を紹介し，第1節で導入した部分積分の公式 (1.3)，(1.4)，(1.5) が，Wiener 空間上で定義された汎関数に対しても成り立つことを概説する．さらに，Malliavin 共分散の非退化性のもとで，Wiener 過程の汎関数と超関数の合成が定義できることを説明する．この定義に基づく超関数を形式的に Taylor 展開すると，種々の統計量の漸近展開が導かれることは次節以降で述べる．本節に関する詳細は，Ikeda and Watanabe (1989) などの教科書を参照されたい．

3.1 多項式汎関数と部分積分の公式

まず，H の正規直交関数系 $h_1,\ldots,h_n$ に対して，汎関数 $[h_j]: W\to \boldsymbol{R}$ を

$$[h_j](w) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^\infty \dot{h}_j^i(t)\, dw_t^i, \qquad h_j = (h_j^1,\dots, h_j^r), \quad w = (w^1,\dots, w^r)$$

により定義しよう．このとき，確率変数 $([h_1](w),\dots,[h_n](w))$ は，n 次元標準正規分布に従うことがわかるので，任意の $\mathcal{B}^n$-可測関数 f に対して，

$$\int_W f([h_1](w),\dots, [h_n](w))\, P(dw) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(z)\, \phi(z)\, dz$$

である．ただし，ϕ は，n 次元標準正規分布の密度関数である．したがって，(1.3) より，$\boldsymbol{R}^n$ 上の多項式 f, $(g^i)_{i=1,\dots,n}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_W &\langle (Df)([h_1](w),\dots, [h_n](w)), g([h_1](w),\dots, [h_n](w))\rangle_{\boldsymbol{R}^n}\, P(dw)\\ &= \int_W f([h_1](w),\dots, [h_n](w))\, D^*g([h_1](w),\dots, [h_n](w))\, P(dw)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．ただし，$g = (g^1,\dots, g^n)$ であり，D, D^* は，第1節で定義した有限次元空間上の関数に対する微分作用素である．

さて，多項式 f により定義される汎関数

$$F(w) = f([h_1](w),\dots, [h_n](w))$$

に対する微分 D を定義しよう．任意の $h \in H$ に対して，汎関数 $F(w)$ の h 方向への方向微分

$$D_h F(w) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{F(w + \epsilon h) - F(w)}{\epsilon}$$

は，h に関して線形だから，Riesz の定理より，

$$D_h F(w) = \langle DF(w), h\rangle_H$$

なる $DF \in H$ が唯一存在する．この場合，F の多項式 f による表現を用いると，Riesz の定理を用いるまでもなく，

$$DF(w) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)([h_1](w),\dots, [h_n](w))\, h_i, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.1}$$

を導くことができる．一方，多項式 $(g^i)_{i=1,\dots,n}$ により

$$G(w) = \sum_{i=1}^{n} g^i([h_1](w),\dots, [h_n](w))\, h_i$$

で与えられる汎関数 G に対して，

$$D^*G(w) = -\sum_{i=1}^{n} (\partial_i g^i)([h_1](w),\dots, [h_n](w)) + \sum_{i=1}^{n} g^i([h_1](w),\dots, [h_n](w))\, [h_i](w) \tag{3.2}$$

と定義する．このとき，(1.3) より

$$\int_W \langle DF(w), G(w)\rangle_H\, P(dw) = \int_W F(w)\, D^*G(w)\, P(dw)$$

が成り立つことが容易にわかる．

より一般に，任意の Hilbert 空間 E に値をとる汎関数について考えよう．まず，

$$\boldsymbol{P}=\{F\colon W\to\boldsymbol{R}\mid \text{自然数}\, n\, \text{と}\, H\, \text{の正規直交関数系}\; h_1,\dots,h_n$$
$$\text{多項式}\, f\, \text{が存在して，}\; F(w)=f([h_1](w),\dots,[h_n](w))\}$$

とおき，$\boldsymbol{P}$ に属する汎関数を**多項式汎関数**と呼ぶことにしよう．さらに，

$$\boldsymbol{P}(E)=\{F\colon W\to E\mid \text{自然数}\, m\, \text{と}\, E\, \text{の正規直交系}\; e_1,\dots,e_m,$$
$$(F_j)_{j=1,\dots,m}\in\boldsymbol{P}\; \text{が存在して，}\; F(w)=\sum_{j=1}^{m}F_j(w)\,e_j\}$$

とおき，$\boldsymbol{P}(E)$ に属する汎関数を E-値**多項式汎関数**と呼ぶことにする．いうまでもなく，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R})$ である．(3.1) により定義される ($\boldsymbol{R}$-値) 多項式汎関数 F の微分 DF は，多項式 f の選び方に依存しないので，微分作用素 $D:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{P}(H)$ を (3.1) により定義することにする．同様に，$D^*:\boldsymbol{P}(H)\to\boldsymbol{P}$ を (3.2) により定義する．E-値多項式汎関数

$$F(w)=\sum_{i=1}^{m}f_i([h_1](w),\dots,[h_n](w))\,e_i \tag{3.3}$$

に対しては，

$$DF(w)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\partial_j f_i)([h_1](w),\dots,[h_n](w))\,h_j\otimes e_i$$

と定義する．このときも，この DF は，F の表現 (3.3) に依存しない．高階の微分 D^kF は，$H^k\otimes E$ の元として帰納的に定義される．たとえば，

$$D^2F(w)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\partial_l\partial_j f_i)([h_1](w),\dots,[h_n](w))\,h_l\otimes h_j\otimes e_i\,.$$

微分作用素 $D^*:\boldsymbol{P}(H)\to\boldsymbol{P}$ は次のように一般化される．$H\otimes E$-値多項式汎関数

$$G(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}g^{ij}([h_1](w),\dots,[h_n](w))\,h_i\otimes e_j$$

に対して，微分作用素 $D^*:\boldsymbol{P}(H\otimes E)\to\boldsymbol{P}(E)$ を

$$\begin{aligned}D^*G(w)=&-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\partial_i g^{ij}([h_1](w),\dots,[h_n](w))\,e_j\\&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}g^{ij}([h_1](w),\dots,[h_n](w))\,[h_i](w)\,e_j\end{aligned}$$

と定義する．これらの微分作用素に対しても，部分積分の公式

$$\int_W\langle DF(w),G\rangle_{H\otimes E}\,P(dw)=\int_W\langle F(w),D^*G(w)\rangle_E\,P(dw),\qquad \forall F\in\boldsymbol{P}(E),\quad G\in\boldsymbol{P}(H\otimes E) \tag{3.4}$$

が成り立つことが，(1.3) から容易に示せる．

滑らかな関数 $T\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ と $F=(F^1,\dots,F^d)\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^d)$ の合成関数に関しても，(1.5) の無限次元版である

$$\int_W(\partial_iT)(F(w))\,\psi(w)\,P(dw)=\int_W T(F(w))\,D^*\Big(\psi(w)\sum_{j=1}^{k}\gamma_F^{ij}DF^j(w)\Big)P(dw),\qquad \forall T\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R}^d),\quad F\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^d),\quad \psi\in\boldsymbol{P} \tag{3.5}$$

が，同様にして導ける．ここで，γ_F^{ij} は，

(3.6) $$\sigma_F^{ij} = \langle DF^i, DF^j \rangle_H$$

により定義される **Malliavin 共分散** $\sigma_F = (\sigma_F^{ij})$ の逆行列の第 (i, j) 成分である．

3.2 Sobolev 空間 $D_p^s(E)$ と部分積分の公式

本節では，多項式汎関数に対する部分積分の公式を，より広い汎関数のクラスに拡張することにする．

まず，任意の Hilbert 空間 E に対して，

$$\boldsymbol{L}_p(E) = \{F : W \to E \mid \|F\|_p < \infty\},$$
$$\|F\|_p = \left(\int_W |F(w)|_E^p P(dw)\right)^{1/p}, \quad |F|_E = \sqrt{\langle F, F \rangle_E}, \quad p \geq 1$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{P}(E)$ は $\boldsymbol{L}_p(E)$ において，稠密であることが示せる．したがって，多項式汎関数の様々な性質が，$\boldsymbol{L}_p(E)$ に自然に拡張されることが期待される．

そこで，Hilbert 空間 $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{R})$ について考えることしよう．$\boldsymbol{C}_0$ を，実定数に値をとる汎関数の全体とし，$\boldsymbol{C}_n$ は

$$\boldsymbol{C}_n = \bar{\boldsymbol{P}}_n \cap [\boldsymbol{C}_0 \oplus \boldsymbol{C}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}_{n-1}]^\perp$$

により帰納的に定義される，n 次多項式汎関数の閉包の部分集合であるとする．このとき，$\boldsymbol{L}_2$ は，

$$\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{C}_0 \oplus \boldsymbol{C}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}_n \oplus \cdots$$

のように分解される．この分解における $\boldsymbol{C}_n$ への射影作用素 J_n を用いて，

$$LF = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) J_n F, \qquad F \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R})$$

と定義される作用素 $L : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R})$ を Ornstein-Uhlenbeck 作用素という．多項式汎関数 F が，(3.3) で与えられるとき，

$$LF = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ((\partial_j^2 f_i)([h_1](w), \ldots, [h_n](w)) \\ - [h_j](w)(\partial_j f_i)([h_1](w), \ldots, [h_n](w)))\, e_i$$

が成り立ち，これより，

$$L = -D^* D$$

が導かれる．つまり，Ornstein-Uhlenbeck 作用素 L は，2 階の微分作用素であることがわかる．

次に，$\boldsymbol{P}(E)$ 上のノルムを定義しよう．任意の $s \in \boldsymbol{R}$ に対して，作用素 $(I-L)^s : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R})$ を

$$(I-L)^s F = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^s J_n F, \qquad F \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R})$$

で定義し，一般の E-値多項式汎関数 $F = F_1 e_1 + \cdots + F_n e_n$ に対しては，

$$(I-L)^s F = \sum_{i=1}^{n} (I-L)^s F_i e_i$$

と定義することにする．この作用素に対して，$\boldsymbol{P}(E)$ 上のノルム $\|\cdot\|_{p,s}$, $p > 1$, $s \in \boldsymbol{R}$ を

$$\|F\|_{p,s} = \|(I-L)^{s/2}F\|_p, \qquad F \in \boldsymbol{P}(E)$$

と定義する．このノルムは，次のような性質を持つ．

Proposition 3.1. (i) $s \leq s', 1 \leq p \leq p'$ のとき，

$$\|F\|_{p,s} \leq \|F\|_{p',s'}, \qquad F \in \boldsymbol{P}(E).$$

(ii) 任意の $s \in \boldsymbol{R}$ と $1/p + 1/q = 1$ を満たす $p > 1$, $q > 1$, さらに任意の $G \in \boldsymbol{P}(E)$ に対して，

$$\|G\|_{q,-s} = \sup\left\{\left|\int_W \langle F, G\rangle_E \, P(dw)\right|; F \in \boldsymbol{P}(E), \|F\|_{p,s} \leq 1\right\}.$$

ノルム $\|\cdot\|_{p,s}$ による $\boldsymbol{P}(E)$ の完備化空間を $D_p^s(E)$ と表すことにする．このとき，上の性質(i)より，

$$D_{p'}^{s'}(E) \hookrightarrow D_p^s(E), \qquad s \leq s', \ \ 1 \leq p \leq p'$$

なる包含関係が導ける．また，性質(ii)は，任意の $s \in \boldsymbol{R}$ と $1/p + 1/q = 1$ なる $p > 1$, $q > 1$ に対して，$D_q^{-s}(E)$ が $D_p^s(E)$ の双対空間であることを示している．一方，$D_p^s(E)$ の定義より，

$$\boldsymbol{L}_p(E) = D_p^0(E) \hookleftarrow D_{p'}^{s'}(E), \qquad s' \geq 0, \ \ 1 < p \leq p'.$$

つまり $D_p^s(E)$, $s \geq 0$ は，$\boldsymbol{L}_p(E)$ に属する Wiener 汎関数で構成されることがわかる．したがって，$D_p^s(E)$ の双対空間である $D_q^{-s}(E)$, $s > 0$ の元は，無限次元空間上の超関数とみなすことができ，一般化 Wiener 汎関数と呼ばれている．超関数 $F' \in D_q^{-s}(E)$ の $F \in D_p^s(E)$ における値

$${}_{D_q^{-s}(E)}\langle F', F\rangle_{D_p^s(E)}$$

は一般化平均と呼ばれている．

多項式汎関数に対する微分作用素 D, D^* は，以下のようにして，$D_p^s(E)$ の元に対して拡張できる．

Theorem 3.1. (Meyer (1983), Sugita (1985), P.Krée and M. Krée (1983)) 任意の $p > 1$ と $s \in \boldsymbol{R}$ に対して，$C_{p,s} > 0$ が存在して，

$$\|DF\|_{p,s} \leq C_{p,s}\|F\|_{p,s+1}.$$

この不等式より，任意の $F \in D_p^{s+1}(E)$ に対して，F に収束する多項式汎関数列 F_n を選ぶと，DF_n は $D_p^s(E)$ において Cauchy 列をなし，$D_p^s(E)$ に極限を持つことがわかる．その極限は，汎関数列 F_n の選び方に依存しないことがわかるので，それを DF と定義する．こうして，微分作用素 $D: \boldsymbol{P}(E) \to \boldsymbol{P}(H \otimes E)$ は，$D: D_p^{s+1}(E) \to D_p^s(H \otimes E)$ に拡張される．

微分作用素 D^* に関しては，次の不等式が成り立ち，微分作用素 $D^*: \boldsymbol{P}(H \otimes E) \to \boldsymbol{P}(E)$ も，$D^*: D_p^{s+1}(H \otimes E) \to D_p^s(E)$ へ拡張されることがわかる．

Corollary 3.1. 任意の $p > 1$ と $s \in \boldsymbol{R}$ に対して，$C_{p,s} > 0$ が存在して，

$$\|D^*G\|_{p,s} \leq C_{p,s}\|G\|_{p,s+1}.$$

このように拡張された微分作用素 D, D^* に対して，部分積分の公式 (3.4) は次のように一般

化できる．

Theorem 3.2. 汎関数 F，G が，

$$(F,\ G) \in \bigcup_{\substack{p>1, q>1 \\ 1/p+1/q=1}} D_p^1 \times D_q^1(H)$$

を満たすとき，

$$\int_W \langle DF(w),\ G\rangle_{H\otimes E}\, P(dw) = \int_W \langle F(w),\ D^*G(w)\rangle_E\, P(dw)\,.$$

任意の $F \in D_p^s(\boldsymbol{R}^d)$ に対する Malliavin 共分散も，(3.6) により定義すると，多項式汎関数に対する部分積分の公式 (3.5) は，次のように拡張される．

Theorem 3.3. $F \in \cap_{p>1} D_p^2(\boldsymbol{R}^d)$ と $\psi \in \cup_{p>1} D_p^1$ が，

$$\psi(\det\, \sigma_F)^{-1} \in \cup_{q>1} D_q^1$$

を満たすとき，任意の Schwartz クラスの元 $T \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ に対して，

$$\int_W (\partial_i T)(F)\,\psi P(dw) = \int_W T(F)\, \Phi_i^F(w\,;\,\psi)\, P(dw)\,.$$

ただし，

$$\Phi_i^F(\ \cdot\ ;\,\psi) = \sum_{j=1}^d D^*[(\gamma_F^{ij}\psi)\, DF^j]\,, \qquad (\gamma_F^{ij}) = \gamma_F = \sigma_F^{-1}.$$

これを繰り返すと，高階の微分について次を得る．

Theorem 3.4. 自然数 k に対して，$F \in \cap_{p>1} D_p^{k+1}(\boldsymbol{R}^d)$ と $\psi \in \cup_{p>1} D_p^k$ が

$$i \le k,\quad i+j \le 2k,\quad i,\, j \in \mathbf{Z}^+ \Longrightarrow (\det\, \sigma_F)^j\, D^i\psi \in \cup_{q>1} \boldsymbol{L}_q(H^{\otimes^i})$$

を満たすとき，任意の Schwartz クラスの元 $T \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ と自然数列 $0 \le i_1,\ldots,\ i_k \le d$ に対して，

$$\int_W (\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} T)(F)\,\psi P(dw) = \int_W T(F)\, \Phi_{i_1,\ldots,i_k}^F(w\,;\,\psi)\, P(dw)$$

が成り立つ．ただし，$\Phi_{i_1,\ldots,i_k}^F(\ \cdot\ ;\,\psi)$ は，

$$\Phi_{i_1,\ldots,i_k}^F(\ \cdot\ ;\,\psi) = \Phi_{i_k}^F(\ \cdot\ ;\,\Phi_{i_1,\ldots,i_{k-1}}^F(\ \cdot\ ;\,\psi))$$

により帰納的に定義される汎関数である．

この汎関数 $\Phi_{i_1,\ldots,i_k}^F(\ \cdot\ ;\,\psi)$ は，$F,\ DF,\ D^2F,\ldots,\ LF,\ldots$ の多項式 $P_{(i,j;\,i_1,\ldots,i_k)}^F$ により，

$$\Phi_{i_1,\ldots,i_k}^F(\ \cdot\ ;\,\psi) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=k}^{2k-j} \langle(\det\, \sigma_F)^{-i}\, D^j\psi,\ P_{(i,j;\,i_1,\ldots,i_k)}^F\rangle_{H^{\otimes^j}}$$

なる表現を持つ．

第 2 節で説明したように，中心極限定理の精密化として，Edgeworth 展開を導出するときは，特性関数の可積分性が問題となる．対象としている統計量Fが，Wiener 汎関数とみなせるとき

は，Theorem 3.4 の部分積分の公式を用いると，特性関数の可積分性が証明できる．$T(x)=e^{iu\cdot x}$ と置くと，

$$E[e^{iu\cdot F}]=E[(1-\psi)e^{iu\cdot F}]+\frac{1}{(iu_{i_1})\cdots(iu_{i_k})}E[\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}e^{iu\cdot x}|_{x=F}\,\psi]$$
$$=E[(1-\psi)\,e^{iu\cdot F}]+\frac{1}{(iu_{i_1})\cdots(iu_{i_k})}E[e^{iuF}\Phi^F_{i_1,\dots,i_k}(w\,;\psi)]$$

となり，ψ を適当に選んでFに関する大偏差原理を利用すると，上の第1項は無視できる場合が多い．したがって，多くの場合は Theorem 3.4 の条件をチェックすれば，特性関数の可積分性が証明できて，Edgeworth 展開を導くことができる．たとえば，マルチンゲール性を持つ Wiener 汎関数については，このようにして漸近展開が得られる (Yoshida (1997))．また，ここで説明した部分積分の公式を，ジャンプを持つ確率過程の汎関数に一般化する事もできて，それを利用した混合過程の漸近展開が最近導かれた (Kusuoka and Yoshida (1997))．

一方，Wiener 汎関数Fが

$$F=f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\cdots,\qquad \epsilon\downarrow 0$$

のような，ある主要項 f_0 に摂動が加わった形で表せる場合，特性関数によらない直接的なアプローチがある．つまり，任意の Borel 集合Bの定義関数 1_B とFの合成 $1_B(F)$ に対して，

$$E[1_B(F)]\sim E[1_B(f_0)]+\epsilon E\left[\sum_{i=1}^d \partial_i 1_B(f_0)\,f_1^i\right]$$
$$+\epsilon^2 E\left[\sum_{i=1}^d \partial_i 1_B(f_0)\,f_2^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_i\partial_j 1_B(f_0)\,f_1^i f_1^j\right]+\cdots$$

という形式的な Taylor 展開を利用する方法である．ただし，この展開が意味を持つためには，少なくとも，$\partial_i 1_B(f_0)$ などが何らかの意味で定義できないといけない．その自然な方法として，Schwartz の超関数 $\partial_i 1_B$ と Wiener 汎関数の合成 $\partial_i 1_B(f_0)$ を D_p^{-s} の元，すなわち，一般化 Wiener 汎関数として定義することが考えられる．第4節および第5節では，このアプローチによる漸近展開の正当性 (Theorem 4.2, 5.1, 5.2) とその応用について述べるが，本節の最後に，Schwartz の超関数と Wiener 汎関数の合成を一般化 Wiener 汎関数として定義する方法について説明する．そこでも，ある種の部分積分の公式 (Theorem 3.5) を用いるが，それは Theorem 3.4 より導かれる．

3.3 超関数と Wiener 汎関数の合成

一般化 Wiener 汎関数の例として，Wiener 汎関数 $F\colon W\to \boldsymbol{R}^d$ と Schwartz 超関数 $T\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d)$ の合成について考えよう．詳細は Watanabe (1983), Ikeda and Watanabe (1989), Sakamoto and Yoshida (1996) を参照されたい．

Schwartz クラス $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ 上の微分作用素

$$A=1+|x|^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \partial_i^2$$

の逆作用素 A^{-1} は，

$$A^{-1}T(x)=\int_0^\infty\int_{\boldsymbol{R}^d}e^{-t}p(t,x,y)\,T(y)\,dydt,\qquad T\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$$

で与えられる．ただし，

$$p(t,\,x,\,y)=\prod_{i=1}^{d}\frac{\exp\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\coth\sqrt{2}t)\,[(x^i)^2-2x^iy^i\,\mathrm{sech}\sqrt{2}t+(y^i)^2]\right\}}{\sqrt{2\pi(\sinh\sqrt{2}t)\,2^{-1/2}}}.$$

$m\geq 2$ に対しては，$A^{-m}=A^{-1}A^{-(m-1)}$ と定義すると，

$$A^{-m}T(x)=\int_0^\infty\int_{\boldsymbol{R}^d}\frac{t^{m-1}e^{-t}}{\Gamma(m)}\,p(t,\,x,\,y)\;T(y)\,dydt$$

と表せる．Schwartz の超関数 $T\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d)$ に対しては，次の積分が存在するとき，

$$A^{-m}T(x)=\int_0^\infty\frac{t^{m-1}e^{-t}}{\Gamma(m)}\langle T(y),\,p(t,\,x,\,y)\rangle\,dt$$

と定義しよう．この積分作用素を用いると，任意の超関数 $T\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d)$ を連続関数に変換することができる．そこで，次のような超関数の部分集合を考えることにする．

$$\tilde{C}^{-2m}(\boldsymbol{R}^d)=\{T\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d)\,|\,A^{-m}T\in\hat{C}(\boldsymbol{R}^d)\}.$$

ここで，

$$\hat{C}(\boldsymbol{R}^d)=\left\{f\,|\,\boldsymbol{R}^d\text{ から }\boldsymbol{R}\text{ の連続関数で，}\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0\right\}$$

であり，そのノルムは，

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in\boldsymbol{R}^d}|f(x)|$$

で与えられる．

Wiener 汎関数と Schwartz の超関数の合成関数を定義する前に，微分作用素Aに関する部分積分の公式を与えることにする．

Theorem 3.5. 自然数mに対して，$F\in\cap_{p>1}D_p^{2m+1}(\boldsymbol{R}^d)$ と $\psi\in\cup_{p>1}D_p^{2m}$ が，

$$i\leq 2m,\quad i+j\leq 4m,\quad i,\,j\in\mathbf{Z}^+\Longrightarrow(\det\,\sigma_F)^{-j}\,D^i\psi\in\cup_{q>1}\boldsymbol{L}_q(H^{\otimes i})$$

をみたすとき，任意の $T\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ に対して，

$$\int_W(A^mT)\,(F)\,\psi P(dw)=\int_W T(F)\;\Psi_{2m}^F(w\,;\,\psi)\;P(dw)$$

が成り立つ．ただし，汎関数 Ψ は，次のように帰納的に定義される．

$$\Psi_2^F(\;\cdot\;;\,\psi)=(1+|F|^2)\,\psi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\Phi_{ii}(\;\cdot\;;\,\psi)$$
$$\Psi_{2(m+1)}^F(\;\cdot\;;\,\psi)=\Psi_2^F(\;\cdot\;;\,\Psi_{2m}^F(\;\cdot\;;\,\psi)),\qquad(m\geq 1).$$

汎関数 $\Psi_{2m}^F(\;\cdot\;;\psi)$ も，Φ と同様に，$F,DF,D^2F,\ldots,LF,\ldots$ のある多項式 $Q_{(i,j;2m)}^F$ を用いて，

$$\Psi_{2m}^F(\;\cdot\;;\,\psi)=\sum_{\substack{i\leq 2m\\ i+j\leq 4m}}\langle(\det\,\sigma_F)^jD^i\psi,\;Q_{(i,j;2m)}^F\rangle_{H^{\otimes i}}$$

と表される．この部分積分の公式より，次の不等式が得られる．

Theorem 3.6. 実数 $q>1$ と非負の整数 m に対して，$F\in\cap_{p>1}D_p^{2m+1}(\boldsymbol{R}^d)$ と $\psi\in\cup_{p>1}D_p^{2m}$ が

$$(3.7)\qquad i\le 2m,\quad i+j\le 4m,\quad i,j\in\mathbf{Z}^+\Longrightarrow(\det\sigma_F)^{-j}D^i\psi\in\boldsymbol{L}_q(H^{\otimes i})$$

を満たすとき，$q>p>1$ なる実数 p,q に対して，正の定数 $C_{p,2m}^{F,\psi}$ が存在して，

$$\|\psi T(F)\|_{p,-2m}\le C_{p,2m}^{F,\psi}\|A^{-m}T\|_\infty,\qquad \forall\, T\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d).$$

ここで，$\|T\|_\infty=\sup_{x\in\boldsymbol{R}^d}|T(x)|$.

一般に，$\tilde{C}^{-2m}(\boldsymbol{R}^d)$ に属する超関数 T に対して，

$$(3.8)\qquad \|A^{-m}T-A^{-m}T_n\|_\infty\to 0,\qquad n\to\infty$$

を満たす列 $T_n\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ が存在するが，上の不等式より，適当な汎関数 ψ を選ぶと，$\psi T_n(F)$ が $D_p^{-2m}(E)$ において Cauchy 列をなすことがわかる．その極限を超関数 T と Wiener 汎関数 F の合成の定義とする．すなわち，実数 $q>1$ と非負の整数 m に対して，$F\in\cap_{p>1}D_p^{2m+1}(\boldsymbol{R}^d)$ と $\psi\in\cup_{p>1}D_p^{2m}$ が (3.7) を満たすとき，任意の $T\in\tilde{C}^{-2m}(\boldsymbol{R}^d)$ に対して，

$$(\psi\cdot T)\circ F:=\lim_{n\to\infty}\psi T_n(F),\qquad \text{in } D_p^{-2m}$$

と定義する．ただし，$T_n\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ は，(3.8) を満たす任意の関数列である．このようにして，Wiener 汎関数と Schwartz の超関数の合成が，無限次元空間上の超関数の空間である D_p^{-2m} の元として定義できた．

4. 小さな拡散過程

本節では，Malliavin 解析の応用として，小さな拡散項をもつ拡散過程の推定量の漸近展開について述べる．簡単のため 1 次元の拡散過程，1 次元のパラメータの場合について述べるが，多次元の場合も同様の議論が可能である．

拡散過程 $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ が確率微分方程式

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} dX_t &= V_0(X_t,\theta)\,dt+\epsilon V(X_t)\,dw_t, \qquad t\in[0,\ T]\\ X_0 &= x_0\end{aligned}$$

を満足するとせよ．ここで，$V_0,\ V:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は滑らかな既知の関数で，w は Wiener 過程である．Lipschitz 連続性のもとでこの確率微分方程式は強い解を一意にもち，ここではそのような場合を取り扱う．確率微分方程式 (4.1) のパラメータ θ は未知で，我々はデータ $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ から $\theta\in\Theta=(\alpha,\beta)$ を推定したい．いっぽう，パラメータ ϵ は**既知の**パラメータであり，$\epsilon\downarrow 0$ の状況での漸近理論について考える．ϵ を既知としてよいのは，連続な観測 $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ のもとでは，拡散係数は，たとえばパスの 2 次変動によって，本質的に完全に決まってしまうという事情による．これに対して，離散的な観測 $\{X_{t_i}\}_{i=0,\dots,n}$ のみを用いてパラメータ θ の推定を考える場合は ϵ の推定の問題が意味をもつが，この問題に関してはここでは議論しない．いずれにしても，推定量の構成は連続観測の場合が基本であり，離散観測の場合は，多くの場合，その変形として得られる．

確率微分方程式 (4.1) の解 X によって誘導される連続関数空間 $C([0,\ T])$ 上の確率測度 P_θ は，V が正のとき，互いに絶対連続で，P_θ の P_{θ_0} に関する Radon-Nikodym の微分は

$$(4.2)\qquad \frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} = \exp\Big(\int_0^T \epsilon^{-2} V(X_t)^{-2}[V_0(X_t,\theta) - V_0(X_t,\theta_0)]\,dX_t - \frac{1}{2}\int_0^T \epsilon^{-2} V(X_t)^{-2}[V_0(X_t,\theta)^2 - V_0(X_t,\theta_0)^2]\,dt\Big)$$

で与えられる．たとえば最尤推定量 $\hat{\theta}_\epsilon$ は，適当に固定されたレファレンス測度 P_{θ_0} に関する密度 (4.2) を θ に関して最大にするようにとられる．以下，$\hat{\theta}_\epsilon$ は尤度関数の最大値が Θ に存在するときはその最大点の 1 つとし，そうでないときは任意に決めた系列とする．この任意性は漸近展開を考えるときは漸近的に影響しない．

このモデルに関しては 1 次の精密な漸近論が知られている (Kutoyants (1984))．真のパラメータの値を θ_0 で表す．尤度比確率場

$$u \mapsto Z_\epsilon(u) = \frac{dP_{\theta_0+\epsilon u}}{dP_{\theta_0}}(X)$$

は自然に $C_0 := \{f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \lim_{|u|\to\infty} f(u) = 0\}$ に拡張され，X_t^0 を真値 θ_0, $\epsilon = 0$ に対する (4.1) の解とするとき，分離条件：任意の $\theta_0 \in \Theta$ に対して，ある $a > 0$ が存在して，

$$\int_0^T V(X_t)^{-2}[V_0(X_t^0,\theta) - V_0(X_t^0,\theta_0)]^2\,dt \ge a|\theta - \theta_0|^2 \qquad \text{for } \theta \in \Theta$$

と係数のパラメータに関する微分可能性等の正則条件のもとで，

Theorem 4.1. (Kutoyants (1984))

(a) (尤度比確率場の弱収束)

$$\mathcal{L}\{Z_\epsilon | P_{\theta_0}\} \Rightarrow \mathcal{L}\{Z\} \qquad (\epsilon \downarrow 0).$$

ここで，

$$Z(u) = \exp\Big(u\Delta - \frac{1}{2} I(\theta_0)\, u^2\Big),$$
$$\Delta \sim N(0, I(\theta_0)),$$
$$I(\theta_0) = \int_0^T V(X_t^0)^{-2}(\partial_\theta V_0)(X_t^0,\theta_0)^2\,dt.$$

(b) (一致性) 任意の $\delta > 0$ に対して，正数 c, C が存在して，

$$P_{\theta_0}[|\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0| > \delta] \le Ce^{-c(\delta/\epsilon)^2}.$$

(c) (漸近正規性)

$$\epsilon^{-1}(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0) \to^d N(0, I(\theta_0)^{-1}) \qquad (\epsilon \downarrow 0).$$

(d) (期待値の収束) 任意の高々多項式の増大の連続関数 f に対して，

$$E_{\theta_0}[f(\epsilon^{-1}(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0))] \to E[f(\Delta)] \qquad (\epsilon \downarrow 0).$$

Bayes 推定量に対しても同様の性質が示される．

つぎに最尤推定量の分布の漸近展開について述べよう．このために，Malliavin 解析とくに Watanabe (1987) による一般化 Wiener 汎関数の漸近展開の方法に関してまず説明をする．

E を Hilbert 空間とする．E-値 (一般化) Wiener 汎関数の族 $\{F_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$ に対して，$D_p^s(E)$ にお

いて，$F_\epsilon=O(\epsilon^k)$ $(\epsilon\downarrow 0)$ であるとは

$$\|F_\epsilon\|_{p,s}=O(\epsilon^k) \qquad (\epsilon\downarrow 0)$$

であることをいう．滑らかな E-値 Wiener 汎関数の族 $\{F_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}\subset D^\infty(E)=\bigcap_{s>0}\bigcap_{p\in(1,\infty)} D_p^s(E)$ が $D^\infty(E)$ において漸近展開

$$F_\epsilon\sim f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\cdots$$

をもつとは，$f_0, f_1, f_2,\ldots\in D^\infty(E)$ であり，任意の $p>1$, $s>0$, $k\in\boldsymbol{N}$ に対して，$D_p^s(E)$ において，

$$F_\epsilon-(f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\cdots+\epsilon^{k-1}f_{k-1})=O(\epsilon^k)$$

となることをいう．また，

$$\tilde{D}^{-\infty}(E)=\bigcup_{s>0}\bigcap_{p\in(1,\infty)} D_p^s(E)$$

とおくとき，E-値一般化 Wiener 汎関数の族 $\{F_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}\subset\tilde{D}^{-\infty}(E)$ が $\tilde{D}^{-\infty}(E)$ において漸近展開

$$F_\epsilon\sim f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\cdots$$

をもつとは，任意の $k\in\boldsymbol{N}$ に対して，ある $s>0$ が存在して，任意の $p>1$ に対して，$f_0, f_1, f_2,\ldots\in D_p^{-s}(E)$ であり，$D_p^{-s}(E)$において，

$$F_\epsilon-(f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\cdots+\epsilon^{k-1}f_{k-1})=O(\epsilon^k)$$

となることをいう．

つぎの結果は我々の議論において基本的である (Takanobu and Watanabe (1993), Yoshida (1992))．$\psi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は滑らかな関数で，$\psi(x)=1\,(|x|\le 1/2)$, $\psi(x)=0\,(|x|>1)$ をみたすものとする．

Theorem 4.2. 滑らかな Wiener 汎関数の族 $\{F_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}\subset D^\infty(\boldsymbol{R}^d)$, $\{\xi_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}\subset D^\infty$ と Schwartz 超関数の族 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して次の仮定が成り立つとせよ：

(i) 任意の $p>1$ に対して，

$$\sup_{\epsilon\in(0,1]} E[1_{\{|\xi_\epsilon|\le 1\}}(\det\sigma_{F_\epsilon})^{-p}]<\infty\,.$$

(ii) 列 $\{F_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$ は $D^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ において漸近展開をもつ：

$$F_\epsilon\sim f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\cdots$$

(iii) 列 $\{\xi_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$ は D^∞ において $O(1)$ である．

(iv) 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して，

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\epsilon^{-n}P\left[|\xi_\epsilon|>\frac{1}{2}\right]=0\,.$$

(v) 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して，$m\in\boldsymbol{Z}_+$ が存在して，$A^{-m}T_\lambda\in C_b^n(\boldsymbol{R}^d)$ かつ

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sum_{|\mathbf{n}|\le n}\|\partial^{\mathbf{n}}A^{-m}T_\lambda\|_\infty<\infty\,.$$

ここで，$\mathbf{n} \in \mathbf{Z}_+^d$ はマルチインデックス．

このとき，合成関数 $\psi(\xi_\epsilon) T_\lambda(F_\epsilon)$ は $\tilde{D}^{-\infty}$ の元として意味をもち，$\tilde{D}^{-\infty}$ における漸近展開

$$\psi(\xi_\epsilon) T_\lambda(F_\epsilon) \sim \Phi_{\lambda,0} + \epsilon \Phi_{\lambda,1} + \epsilon^2 \Phi_{\lambda,2} + \cdots$$

をもつ．この展開は $\lambda \in \Lambda$ に関して一様であり，$\Phi_{\lambda,0}, \Phi_{\lambda,1}, \Phi_{\lambda,2}, \cdots \in \tilde{D}^{-\infty}$ は形式的 Taylor 展開

$$\begin{aligned} T_\lambda(f_0 + [\epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \cdots]) &= \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{\mathbf{n}!} \partial^{\mathbf{n}} T_\lambda(f_0) [\epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \cdots]^{\mathbf{n}} \\ &= \Phi_{\lambda,0} + \epsilon \Phi_{\lambda,1} + \epsilon^2 \Phi_{\lambda,2} + \cdots \end{aligned}$$

で決められる．

拡散モデル (4.1) の最尤推定量に関しては，あるトランケーション汎関数 ψ_ϵ が存在して，$\psi_\epsilon \epsilon^{-1}(\hat{\theta} - \theta_0) \in D^\infty$ が定義され，D^∞ における漸近展開

$$\psi_\epsilon \epsilon^{-1}(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0) \sim f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \cdots$$

を持つことがいえる．ここで，汎関数 $f_0, f_1, f_2, \ldots \in D^\infty$ は多重 Wiener 積分を使って表現され，確率微分方程式 (4.1) の係数と初期値によって記述される．汎関数 ψ_ϵ は，大偏差確率の評価から，漸近展開に影響しない事象を除いて 1 に等しい．$\psi_\epsilon \epsilon^{-1}(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0)$ が Malliavin の意味で滑らかな汎関数であることは Banach 空間に値をとる Wiener 汎関数の概念と一種の陰関数定理によって証明することができる (Yoshida (1993b, 1996b))．汎関数

$$F_\epsilon = \psi_\epsilon \epsilon^{-1}(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0)$$

の Malliavin 共分散の，あるトランケーション $\psi(\xi_\epsilon)$ のもとでの，一様非退化性もいえて，T_λ として定義関数 1_A ($A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$) とすることにより，上述の定理より最尤推定量の分布の漸近展開を得る：

Theorem 4.3. (Yoshida (1992)) 最尤推定量 $\hat{\theta}_\epsilon$ の分布はつぎの漸近展開をもつ：

$$P[\epsilon^{-1}(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0) \in A] \sim \int_A p_0(z)\, dz + \epsilon \int_A p_1(z)\, dz + \epsilon^2 \int_A p_2(z)\, dz + \cdots.$$

ここで，$p_i \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ であり，とくに，p_0 は $N(0, I(\theta_0)^{-1})$ の密度関数，p_1 は (3 次の奇多項式) $\cdot p_0$ の形である．この展開は $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ に関して一様に成り立つ．

この定理において p_1 を具体的に書き下すことができて，尤度比の漸近展開とあわせて最尤推定量の赤平–竹内の意味の 2 次有効性が証明される (Yoshida (1992))．また，Bayes 推定量に対しても同様の結果が得られる (Yoshida (1993a))．そのとき推定量の可積分性が必要になるが，再び Ibragimov-Has'minskii-Kutoyants の大偏差理論が援用される．

この節の方法の副産物として，小さな拡散過程のデリバティブの評価の問題に対しても漸近展開公式が得られ，よい近似であることが確認されている．

5. 再び Stein 統計量

前節では，Malliavin 解析の応用として，無限次元空間上で定義された統計量である，小さな拡散過程に対する最尤推定量の漸近展開について考えた．本節では，有限次元空間上の確率変

数への応用として，再びStein統計量について考える．言うまでもなく，Malliavin解析は無限次元空間上の解析学であって，有限次元空間上の統計量に対しては，有限次元空間上の超関数論を利用することが考えられる．しかしながら，Malliavin解析による結果が，次元の有限，無限をとわず，問題を統一的に扱えることを示すために，有限次元正規母集団に対するStein推定量の漸近展開が，Malliavin解析を用いて導かれることを説明する．詳細は，Sakamoto and Yoshida (1996)，Sakamoto et al. (1998) を参照されたい．

まず，Wiener汎関数とSchwartz超関数の合成に対するTaylor展開について説明する．適当な滑らかさを持つWiener汎関数Fと任意のSchwartz超関数$T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d)$の合成は，$T$の(3.8)の意味での近似列$T_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$と，適当に選んだ汎関数$\psi$を用いて，

$$(\psi\cdot T)\circ F = \lim \psi T_n(F), \quad \text{in } D_p^{-2m}$$

と定義するのであった．Fが，2つのWiener汎関数F_0とRに分解されるとき，すなわち，$F = F_0 + R$と表されるとき，$(\psi\cdot T)\circ F$のF_0の周りでのTaylor展開を考えたい．Tの代わりに，近似列T_nをもちいると，通常のTaylorの定理より

$$(\psi\cdot T_n)\circ F = \sum_{|\mathbf{n}|\leq K-1} \frac{1}{\mathbf{n}!} \psi\partial^{\mathbf{n}} T_n(F_0) R^{\mathbf{n}} + \rho_{n,K}$$

が得られる．ただし，

$$\rho_{n,K} = \sum_{|\mathbf{n}|=K} \frac{K}{\mathbf{n}!} \int_0^1 (1-u)^{K-1} (\partial^{\mathbf{n}} T_n)(F_u)\, du R^{\mathbf{n}}.$$

この近似列T_nの展開から，極限操作をすると，つぎのような$(\psi\cdot T)\circ F$の展開を得る．

Theorem 5.1. 次の条件が成り立つと仮定する：

(i) $T \in \tilde{C}^{K,-2m}(\boldsymbol{R}^d)$;

(ii) $F = F_0 + R$ for some $F_0,\ R \in \cap_{p>1} D_p^{2m+1}(\boldsymbol{R}^d)$;

(iii) $\psi \in \cup_{p>1} D_p^{2m}$;

(iv) ある$q>1$に対して，

$$(5.1) \qquad i \leq 2m,\quad i+j \leq 4m,\quad i,j \in \mathbf{Z}^+ \Rightarrow \sup_{0\leq u\leq 1} \|(\det \sigma_{F_u})^{-j} D^i\psi\|_q < \infty.$$

ただし，$F_u = F_0 + uR$.

このとき，$q > p > 1$を満たすpに対して，合成汎関数$(\psi\cdot T)\circ F$と$(\psi R^{\mathbf{n}}\cdot\partial^{\mathbf{n}} T)\circ F_0 (|\mathbf{n}| \leq K)$が，$D_p^{-2m}$の元として定義できて，任意の$G \in D_{p'}^{2m}$と$1/p + 1/p' = 1$を満たす$p' > 1$に対して，

$${}_{D_p^{-2m}}\langle(\psi\cdot T)\circ F,\ G\rangle_{D_{p'}^{2m}} = \sum_{|\mathbf{n}|\leq K-1} \frac{1}{\mathbf{n}!}\, {}_{D_p^{-2m}}\langle(R^{\mathbf{n}}\psi\cdot\partial^{\mathbf{n}} T)\circ F_0,\ G\rangle_{D_{p'}^{2m}} + r_K^G(T)$$

が成り立つ．ただし，$\mathbf{n}! = n_1!\cdots n_d!$で，剰余項$r_K^G(T)$は次のように評価される：

$$|r_K^G(T)| \leq \sum_{|\mathbf{n}|=K} \frac{K}{\mathbf{n}!} \|A^{-m}\partial^{\mathbf{n}} T\|_\infty \int_0^1 (1-u)^{K-1} \|\Psi_{2m}^{F_u}(\ \cdot\ ; R^{\mathbf{n}}\psi G)\|_1 du.$$

定理の条件(i)において，$\tilde{C}^{k,-2m}$は，つぎのように定義される超関数の部分集合族である．

$$\tilde{C}^{k,-2m}(\boldsymbol{R}^d) = \Big\{ T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d);\ |\mathbf{n}| \leq k \text{ なる任意の } \mathbf{n} \text{ に対して，} A^{-m}\partial^{\mathbf{n}} T \in \hat{C}(\boldsymbol{R}^d),$$

$$T_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d) \text{ が存在して } \lim_{n\to\infty} \sum_{|\mathbf{n}|\le k} \|A^{-m}(\partial^{\mathbf{n}} T_n - \partial^{\mathbf{n}} T)\|_\infty = 0 \Big\}$$

この定理で，超関数Tを Borel 集合の定義関数に置き換えると，汎関数 $F = F_0 + R$ の分布の展開を得る．

Theorem 5.2. $m > (d+K)/2$ を満たす自然数 K, m, d に対して，Wiener 汎関数 F, ψ が，Theorem 5.1 の条件(ii), (iii), (iv)と

$$j \le 4m, \quad j \in \mathbf{Z}^+ \Rightarrow (\det\, \sigma_{F_0})^{-j} \in \cup_{q>1} \boldsymbol{L}_q$$

を満たすと仮定する．このとき，Wiener 汎関数 F_0 の分布は密度 $p_{F_0}(x)$ を持ち，さらに任意の Borel 集合 $B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ に対して，

$$P[F \in B] = \sum_{|\mathbf{n}|\le K-1} \frac{1}{\mathbf{n}!} \int_B (-\partial_x)^{\mathbf{n}} \{E[R^{\mathbf{n}} | F_0 = x]\, p_{F_0}(x)\}\, dx + \tilde{r}_K(1_B) \tag{5.2}$$

が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_K(1_B)| \le\ & |r_K^1(1_B)| + E[|\psi - 1|] \\ & + \sum_{|\mathbf{n}|\le K-1} \frac{1}{\mathbf{n}!} \|A^{-m}\partial^{\mathbf{n}} 1_B\|_\infty \|\Psi_{2m}^{F_0}(\,\cdot\,;(\psi-1)R^{\mathbf{n}})\|_1 . \end{aligned} \tag{5.3}$$

この展開の，有限次元空間上で定義された統計量への典型的な応用として，正規確率変数の尺度混合がある (Sakamoto and Yoshida (1996))．

さて，本題である Stein 推定量の漸近展開にもどろう．第 1 節と同様，p 変量正規分布 $N(\theta, \sigma^2 I_p)$ に従う n 個の観測 $X_1,\ldots, X_n$ に基づく，位置母数 θ の推定について考える．ただし，第 1 節より一般的な設定として，σ^2 も未知であると仮定する．このときも，$p \ge 3$ ならば，標本平均 $\bar{X}$ は 2 次損失に関して非許容的であることが知られているが，$\bar{X}$ を改善する推定量として，

$$JS_a = \left(1 - \frac{c_n(p-2)}{n(c_n+2)} \frac{S^2}{|\bar{X}|^2 + a}\right) \bar{X}$$

なる James-Stein 型の推定量を考えよう．ここで，$c_n = p(n-1)$,

$$S^2 = \frac{1}{c_n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (X_i^j - \bar{X}^j)^2, \qquad X_i = (X_i^1,\ldots, X_i^p), \qquad \bar{X}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^j$$

であり，a は正の定数である．この JS_a が $\bar{X}$ を改善することも，第 1 節と同様，Stein の等式により証明できる．

いま，

$$\bar{Z} = \sqrt{n}(\bar{X} - \theta), \qquad g_a(x) = \frac{1}{|x|^2 + a} x, \qquad \tilde{c} = \frac{c_n(p-2)}{(c_n+2)}$$

と定義すると，

$$\sqrt{n}(JS_a - \theta) = \bar{Z} - \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{c} S^2 g_a(\bar{X})$$

と表せる．$\bar{X}$ と独立で $\sigma^2 \chi^2_{c_n}/c_n$ に従う確率変数を ξ_n とおくと，任意の Borel 集合 $B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^p)$ の定義関数

$$1_B(x)=\begin{cases}1 & (x\in B)\\ 0 & (x\notin B)\end{cases}$$

に対して，以下の形式的な漸近展開が導ける．

$$\begin{aligned}P[\sqrt{n}(JS_a-\theta)\in B]&=E\Big[1_B\Big(\bar{Z}-\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{c}S^2g_a(\bar{X})\Big)\Big]\\&=\sum_{|\mathbf{n}|\le K-1}\frac{1}{\mathbf{n}!}E\Big[\partial^{\mathbf{n}}1_B(\bar{Z})\Big(-\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{c}S^2g_a(\bar{X})\Big)^{\mathbf{n}}\Big]+O(n^{-K/2})\\&=\sum_{|\mathbf{n}|\le K-1}\frac{1}{\mathbf{n}!}\Big(-\frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}\Big)^{|\mathbf{n}|}E[\xi^{|\mathbf{n}|}]\\&\quad\times\sigma^{-p}\int_{R^p}\partial^{\mathbf{n}}1_B(z)\,g_a(z/\sqrt{n}+\theta)^{\mathbf{n}}\,\phi(z/\sigma)\,dz+O(n^{-K/2})\\&=\sum_{|\mathbf{n}|\le K-1}\frac{1}{\mathbf{n}!}\Big(\frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}\Big)^{|\mathbf{n}|}E[\xi^{|\mathbf{n}|}]\\&\quad\times\sigma^{-p}\int_B\partial^{\mathbf{n}}\{g_a(z/\sqrt{n}+\theta)^{\mathbf{n}}\,\phi(z/\sigma)\}\,dz+O(n^{-K/2}).\end{aligned}$$

この展開はあくまでも形式的であるが，その漸近展開の正当性は Theorem 5.2 より導ける．実際，Wiener 空間 (W,H,P) に対して，H の正規直交系 $h_1,\dots,h_p,h_{p+1},\dots,h_{p+c_n}$ を選ぶと，$(\bar{Z},S^2)$ の分布は，多項式汎関数

$$\Big(\sigma([h_1](w),\dots,[h_p](w)),\ \frac{\sigma^2}{c_n}\sum_{i=p+1}^{p+c_n}([h_i](w))^2\Big)$$

の分布と等しく，適当に選んだ汎関数 ψ に対して，Theorem 5.2 を適用すると展開の剰余項が上の形式的な展開のそれと一致することがわかる．この例のように，正規母集団のもとでの多変量解析における多くの統計量は，$[h_1](w),\dots,[h_m](w)$ の関数とみなせ，Theorem 5.2 を応用すると，正規母集団における多くの統計量の漸近展開が得られるものと思われる．

つぎに，James-Stein 型推定量を用いた信頼領域の漸近展開について考えよう．p 変量正規分布 $N(\theta,I_p)$ に従う観測 X に対して，

$$\delta_{a,b}(X)=\Big(1-\frac{b}{a+b+|X|^2}\Big)X$$

により定義される James-Stein 型推定量を考えよう．ここで，a，b は正の定数である．この推定量を中心にした信頼領域を

$$C(X)=\{\theta\,;\,|\theta-\delta_{a,b}(X)|<c\}$$

とおくことにする．これに対して，自然な信頼領域は

$$C_0(X)=\{\theta\,;\,|\,\theta-X|<c\}$$

である．この信頼領域 $C_0(X)$ の $p=1,2$ における許容性は，Joshi (1969) により証明された．また，Joshi (1967) は，$p\ge 3$ のとき，$C(X)$ が $C_0(X)$ を改善することを示し，$C_0(X)$ の非許容性を導いた．ここでは，Malliavin 解析の応用として，$C(X)$ の被覆確率の展開公式を求めるが，その結果として Joshi (1967) と同様の結果も証明できる．

まず，$C(X)$ の被覆確率は，

$$P[\theta \in C(X)] = \int_{R^p} 1_{B_{c(0)}}(z - bg(z+\theta))\,\phi(z)\,dz$$

と書き換えられることに注意しよう．ここで，

$$B_c(y) = \{z\,;\,|z-y| < c\}, \qquad g(x) = \frac{1}{a+b+|x|^2}\,x\,.$$

いま，ある Wiener 空間上の Wiener 汎関数 F_0, R を

$$F_0 = ([h_1](w), \ldots, [h_p](w)), \qquad R = -\,bg(F_0+\theta)$$

と定義すると，

$$P[\theta \in C(X)] = P[F_0 + R \in B_c(0)]$$

となることがわかる．この F_0, R に対して，Theorem 5.2 を適用すると，つぎの展開が得られる．

Lemma 5.1.

(5.4) $$P[F_0 + R \in B_c(y)] = \sum_{|\mathbf{n}| \le K-1} \frac{1}{\mathbf{n}!} \int_{B_c(y)} (\partial_z)^{\mathbf{n}} \{(bg(z+\theta))^{\mathbf{n}}\,\phi(z)\}\,dz + \tilde{r}_K(y,c)\,.$$

ただし，剰余項 $\tilde{r}_K(y,c)$ は，ある多項式 $P^{(1)}_{p,K}(\xi_1, \xi_2)$ を用いて

$$|\tilde{r}_K(y,c)| \le P^{(1)}_{p,K}(a^{-1/2}, b)\left\{\left(\frac{b}{\sqrt{a+b+|\theta|^2}}\right)^K + \sqrt{P\left[\frac{2bp^2}{a+b+|Z+\theta|^2} \ge \frac{1}{2}\right]}\right\}$$

と評価される．

この展開より，James-Stein 型推定量 $\delta_{a,b}(X)$ による信頼領域 $C(X)$ の被覆確率の展開を得る．

Theorem 5.3.

$$\begin{aligned} P[\theta \in C(X)] = {} & P[\theta \in C_0(X)] \\ & + \frac{b(1-\alpha-h(c))}{a+b+|\theta|^2}\left(p - 2 - \frac{b}{2} + \frac{(b+4)(a+b)}{2(a+b+|\theta|^2)}\right) \\ & + r(a,b,c,p,\theta)\,. \end{aligned}$$

ただし，$\alpha = 1 - P[\theta \in C_0(X)]$，$h(c) = (1/p)\int_{|z|<c} |z|^2\,\phi(z)\,dz$ で，剰余項 $r(a,b,c,p,\theta)$ は，ある正の定数 a_0, b_0 と θ と独立な $C>0$ に対して，

$$|r(a,b,c,p,\theta)| \le C(a+b+|\theta|^2)^{-3/2}, \qquad \text{for any } a \ge a_0, \quad b \le b_0, \quad \theta \in \boldsymbol{R}^d$$

と評価できる．

この展開から，$p \ge 3$, $0 < b < 2(p-2)$ のとき，a を適当に選ぶと，信頼領域 $C(X)$ の被覆確率は，自然な信頼領域 $C_0(X)$ の被覆確率より大きくなることが導かれ，したがって，$p \ge 3$ のとき，信頼領域 $C_0(X)$ が非許容的であることが示せる．

予測問題に関しても同様に，James-Stein 型推定量 $\delta_{a,b}(X)$ を中心とする予測域の被覆確率の展開が求められる．予測の対象となる将来の観測を Y とし，Y は X とは独立に，p 変量正規

分布 $N(\theta, I_p)$ に従うものとする．Y に対する自然な予測域は，

$$S_0(X) = \{y\,;\,|y - X| < c\}$$

である．$p = 1, 2$ のとき，この予測域が許容的であることは，Takada (1995a, 1995b) により示された．一方，James-Stein 型推定量 $\delta_{a,b}(X)$ を用いた予測域として，

$$S(X) = \{y\,;\,|y - \delta_{a,b}(X)| < c\}$$

を考えよう．この予測域の被覆確率は，

$$P[Y \in S(X)] = \int_{R^p}\int_{R^p} 1_{B_{c}(w)}(z - bg(z+\theta))\,\phi(z)\,\phi(w)\,dzdw$$

と書き直せる．したがって，Lemma 5.1 を使うと，次の展開を得る．

Theorem 5.4. (a) $\nu_1(a, b, c, \theta)$ と $h(c)$, α を次のように定義する．

$$\nu_1(a, b, c, \theta) = \int_{\|w-z\|<c}\int_0^1 \sum_{i,j}^{p} z_j \frac{\partial^2 g_i}{\partial z_i \partial z_j}(\theta + uz)\,du\phi(z)\,\phi(w)\,dzdw$$
$$- \int_{\|w-z\|<c}\int_0^1 (1-u) \sum_{i,j,k}^{p} z_i z_j z_k \frac{\partial^2 g_i}{\partial z_j \partial z_k}(\theta + uz)\,du\phi(z)\,\phi(w)\,dzdw\,,$$
$$h(c) = 1 - \alpha - \frac{c^p e^{-c^2/4}}{p2^p\Gamma(p/2)}, \qquad \alpha = 1 - P[Y \in S_0(X)]\,.$$

このとき，$4bp^2 < a + b$ ならば，

$$P_\theta[Y \in S(X)] = 1 - \alpha + \frac{b}{a+b+\|\theta\|^2}\Bigg[\{1-\alpha-h(c)\}\left\{p - \frac{2\|\theta\|^2}{a+b+\|\theta\|^2}\right\}$$
$$+ (a+b+\|\theta\|^2)\,\nu_1(a, b, c, \theta) + r^{(1)}(a, b, c, p, \theta)\Bigg].$$

ただし，すべての係数が正のある多項式 $P_{p,2}^{(1)}(\xi_1, \xi_2)$ に対して，

$$|r^{(1)}(a, b, c, p, \theta)| \leq bP_{p,2}^{(1)}(a^{-1/2}, b)\,.$$

さらに，β_a を

$$\beta_a = \int_{\|w-z\|<c}\left(1 + \frac{\|z\|}{\sqrt{a}}\right)^2\left(1 + \frac{\|z\|^2}{2}\right)\|z\|\,\phi(z)\,\phi(w)\,dzdw\,,$$

と定義すると，$|(a+b+\|\theta\|^2)\,\nu_1(a, b, c, \theta)| \leq 7p\sqrt{p}\,\beta_a/\sqrt{a}$ が成り立つ．

(b) $4bp^2 < a + b$ のとき，

$$P_\theta[Y \in S(X)] = 1 - \alpha + \frac{b}{a+b+\|\theta\|^2}\Bigg[\{1-\alpha-h(c)\}$$
$$\times\left\{p - \frac{2\|\theta\|^2}{a+b+\|\theta\|^2} - \frac{b\|\theta\|^2}{2(a+b+\|\theta\|^2)}\right\} + r^{(2)}(a, b, c, p, \theta)\Bigg].$$

ここで，すべての係数が正のある多項式 $P_p^{(2)}(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$|r^{(2)}(a, b, c, p, \theta)| \leq a^{-1/2}P_p^{(2)}(a^{-1/2}, b)\,.$$

(c) $\|\theta\| \to \infty$ の時，

$$P_\theta[Y \in S(X)] = 1 - \alpha + \frac{b}{\|\theta\|^2}\{1 - \alpha - h(c)\}\left\{p - 2 - \frac{b}{2}\right\} + O(\|\theta\|^{-3}).$$

この結果，$p \geq 3$ のとき，a, b を適当に選ぶと，$S(X)$ の被覆確率が $S_0(X)$ のそれより大きくなること，すなわち，$S_0(X)$ による予測は非許容的であることがわかる．また，(c)より，$b \leq 2(p-2)$ が，$S(X)$ が $S_0(X)$ を改善するための必要条件であることもわかる．

6. 最近の発展

マルチンゲールの漸近展開とエルゴード的な拡散過程に対する推定量への応用に関しては，Yoshida (1997)，Sakamoto and Yoshida (1998a)，ジャンプのある一般のマルチンゲールの漸近展開は Yoshida (1996a) により導かれた．ミキシング条件が成り立つ場合はより効率的に漸近展開を導くことが可能である．ただし，連続時間確率過程の汎関数を扱うためには無限次元解析的な方法 (Malliavin 解析) が依然有効である (Kusuoka and Yoshida (1997))．また，同論文では拡散過程に対してミキシング条件が成り立つための十分条件も与えている．統計的応用としてはミキシング過程の汎関数の分布の 3 次の漸近展開が Sakamoto and Yoshida (1998b)，Sakamoto (1998) で導かれている．また，定常分布の積分で表現される汎関数の推定量に関しては，Kutoyants and Yoshida (1998) がその漸近展開を求めた．ミキシング過程の汎関数の漸近展開の視点によると，確率過程に AIC, TIC, GIC 等の情報量規準が一般化され，さらに，これらの論拠である平均値不偏性以外に，たとえば，2 次漸近中央値不偏性にもとづいて別の情報量規準 (MUIC) が構成できる (Uchida and Yoshida (1998))．

参 考 文 献

Ibragimov, I.A. and Has'minskii, R.Z. (1981). *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*, Springer, New York.

Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed., North- Holland/Kodansha, Tokyo.

Joshi, V.M. (1967). Inadmissibility of the usual confidence sets for the mean of a multivariate normal population, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1868-1875.

Joshi, V.M. (1969). Admissibility of the usual confidence sets for the mean of a univariate or bivariate normal population, *Ann. Math. Statist.*, **40**, 1042-1067.

Krée, M. and Krée, P. (1983). Continue de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener, *Comptes Rendus des Séances de L'académie des Sciences Paris*, **296**, 833-836.

Kusuoka, S. and Yoshida, N. (1997). Malliavin calculus, strong mixing, and expansion of diffusion functionals (preprint).

Kutoyants, Yu. A. (1984). *Parameter Estimation for Stochastic Processes* (translated by B.L.S. Prakasa Rao), Herdermann, Berlin.

Kutoyants, Yu. A. and Yoshida, N. (1998). On moment estimation for diffusion process (in preparation).

Meyer, P.A. (1983). Quelques resultats analytiques sur le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie, *Theory and Applications of Random Fields, Proc. IFIP-WG 7/1 Working Conference* (ed. G. Kallianpur), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **49**, 201-214, Springer, Berlin.

Sakamoto, Y. (1998). Higher order asymptotic expansions for functionals of mixing processes, Asymptotic distribution theory for stochastic processes, ISM Cooperative Research Report, No. 111, 43-77, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Sakamoto, Y. and Yoshida, N. (1996). Expansion of perturbed random variables based on generalized Wiener functionals, *J. Multivariate Anal.*, **59**(1), 34-59.

Sakamoto, Y. and Yoshida, N. (1998a). Asymptotic expansion of M-estimator over Wiener space, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **1**, 85–103.

Sakamoto, Y. and Yoshida, N. (1998b). Third order asymptotic expansion for diffusion process, Theory of statistical analysis and its applications, ISM Cooperative Research Report, No. 107, 53–60, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Sakamoto, Y., Takada, Y. and Yoshida, N. (1998). Expansions of the coverage probabilities of prediction region based on a shrinkage estimator (submitted).

Sugita, H. (1985). Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus, *J. Math. Kyoto Univ.*, **25**, 31–48.

Takada, Y. (1995a). Admissibility of prediction intervals, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **47**, 119–128.

Takada, Y. (1995b). Admissibility of prediction region in two-dimensional normal distribution, *Kumamoto J. Math.*, 8, 171–178.

Takanobu, S. and Watanabe, S. (1993). Asymptotic expansion formulas of the Schilder type for a class of conditional Wiener functional integrations, *Asymptotic Problems in Probability Theory: Wiener Functionals and Asymptotics (eds. K.D. Elworthy and N. Ikeda), Proceedings, the Taniguchi International Symposium, Sanda and Kyoto 1990*, 194–241, Longman, Harlow, U.K.

Uchida, M. and Yoshida, N. (1998). Information criteria in model selection for stochastic processes, Research Memo., No. 709, The Institute of Statistical Mathmatics, Tokyo.

Watanabe, S. (1983). Malliavin's calculus in terms of generalized Wiener functionals, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **49**, Springer, Berlin.

Watanabe, S. (1987). Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels, *Ann. Probab.*, **15**, 1–39.

Yoshida, N. (1992). Asymptotic expansions for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe, *Probab. Theory Related Fields*, **92**, 275–311.

Yoshida, N. (1993a). Asymptotic expansion of Bayes estimators for small diffusions, *Probab. Theory Related Fields*, **95**, 429–450.

Yoshida, N. (1993b). Banach space valued functionals and smoothness of M-estimators, Research Memo., No. 494, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Yoshida, N. (1996a). Asymptotic expansion for martingales with jumps and Malliavin calculus, Research Memo., No. 601, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Yoshida, N. (1996b). Asymptotic expansions for perturbed systems on Wiener space: Maximum likelihood estimators, *J. Multivariate Anal.*, **57**, 1–36.

Yoshida, N. (1997). Malliavin calculus and asymptotic expansion for martingales, *Probab. Theory Related Fields*, **109**, 301–342.

Malliavin Calculus and Statistical Asymptotic Theory[†]

Yuji Sakamoto
(Nagoya University)

Nakahiro Yoshida
(University of Tokyo)

When we derive asymptotic expansions of random variables, the smoothness of their distributions becomes a subject of discussion. In the case where the random variables are functionals of continuous-time stochastic processes, we need an infinite dimensional analysis for the study of their analytic properties, and the Malliavin calculus provides the key to the problem of the smoothness of their distributions. In the Malliavin calculus, the integration-by-parts formula plays an important role. We will first mold it for the finite dimensional case from a well-known identity, and will illustrate significance of the smoothness of the distribution in the derivation of asymptotic expansion on a finite dimensional space, with the relation to the integration-by-parts formula. Next, we will introduce the foundation of the Malliavin calculus, and will explain the theory of asymptotic expansions of the generalized Wiener functionals and their applications to the statistics. Moreover it will be shown that expansion formulas for the shrinkage estimators also follow from such a general theory as above.

Key words: Stein's identity, integration-by-parts formula, Sobolev space, generalized Wiener functional, diffusion process, shrinkage estimator.

[†] This research was in part supported by Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists from the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, and by the ISM Cooperative Research Program (98-ISM. CRP-A4), (98-ISM. CRP-A7).