統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 91-104

特集「統計基礎理論」
［研究ノート］

高次マルコフ連鎖における
離散確率分布について

統計数理研究所　内　田　雅　之

（受付 1998 年 10 月 5 日；改訂 1998 年 11 月 18 日）

要　旨

$X_{-m+1}, X_{-m+2},\ldots, X_0, X_1, X_2,\ldots$ を時間一様な $\{0, 1\}$-値の m-th order Markov chain とする．このマルコフ従属列 $X_1, X_2,\ldots$ における幾何分布とオーダー k の幾何分布を求める．また，マルコフ従属列 $X_1, X_2,\ldots, X_n$ における二項分布とオーダー k の二項分布の導出を行なう．ここで，オーダー k の二項分布には次の 4 つの連の数え方を採用する．つまり，長さ k の成功連をオーバーラップしないで数える数え方，長さ k 以上の成功連を数える数え方，長さ k の成功連をオーバーラップして数える数え方，そしてちょうど長さ k の成功連を数える数え方である．そこで，上の 4 種類の数え方によるオーダー k の二項分布に対して，統一的な表現を与え，さらに，二項分布とオーダー k の二項分布との関係を明らかにする．

キーワード：幾何分布，二項分布，オーダー k の幾何分布，オーダー k の幾何分布，確率母関数，マルコフ連鎖．

1. はじめに

幾何分布や負の二項分布，ポアソン分布，対数級数分布，二項分布などの離散分布族とその一般化の研究の歴史は古く，今現在でも活発に研究され続けている (cf. Johnson et al. (1992, 1997))．通常の幾何分布の一般化として，独立で同一分布に従うベルヌーイ試行における成功連が起こるまでの待ち時間の分布に関する問題があり，De Moivre の時代まで遡るくらい昔から研究が行なわれていた．Feller (1968) はこの問題を再帰事象の理論の応用としてとらえ，長さ k の成功連がはじめて起こるまでの待ち時間の分布の確率母関数 (p.g.f.) を紹介した．Philippou et al. (1983) はその分布を order k の幾何分布と呼び，その分布の確率関数を求めた．order k の幾何分布が導出されて以来，通常の離散分布族の関係を保ったまま，order k の負の二項分布や order k のポアソン分布，order k の対数級数分布，order k の二項分布などの order k の離散分布族とその一般化の研究が盛んに行なわれている．これらの研究の背景には，start-up demonstration test とよばれる販売方式の問題 (Viveros and Balakrishnan (1993)) や，consecutive-k-out-of-n:F システムとよばれる工学システムの信頼性の問題 (Chao et al. (1995), Hirano (1994)) などの応用がある．

信頼性の問題に応用される order k の二項分布とは n 回の試行のうちに長さ k の成功連の起こる数の分布のことであるが，長さ n の $\{0,1\}$-値の系列を考えた時，長さ k の “1” の連を数える数え方はたくさんある．よく使われるのは

I．長さ k の “1” の連を重複しないで数える数え方，

II．長さ k 以上の "1" の連を数える数え方，
III．長さ k の "1" の連を重複して数える数え方，
IV．ちょうど長さ k の "1" の連を数える数え方

の4つの数え方である．例えば次のような $\{0, 1\}$-値の試行列を考える．

$$1111011100011111000011.$$

$k=3$ とした時，この系列には Type I の数え方では，長さ3の "1" の連が4つ，Type II の数え方では，長さ3の "1" の連が3つ，Type III の数え方では，長さ3の "1" の連が7つ，Type VI の数え方では，長さ3の "1" の連が1つである．

離散分布の一般化の問題としては，先に述べたように，通常の離散分布族からオーダー k の離散分布族に拡張することも一つの問題であるが，実際の現象に応用しようとする立場をとれば，独立同一分布に従う確率変数列における離散確率分布族を確率過程における離散確率分布族に拡張することも重要な問題である．

Aki and Hirano (1993) は first-order $\{0, 1\}$-値 Markov chain におけるオーダー k の幾何分布の厳密分布を求め，さらに，first-order $\{0, 1\}$-値 Markov chain における Type I の数え方によるオーダー k の二項分布の厳密分布を求めた．Hirano and Aki (1993) は first-order $\{0, 1\}$-値 Markov chain における Type II と Type III の数え方によるオーダー k の二項分布の厳密分布を導出した．

そこで，本論文では，通常の離散分布とオーダー k の離散分布をそれぞれ，以下のような高次のマルコフ連鎖における離散分布に一般化を行なう．

$X_{-m+1}, X_{-m+2}, \ldots, X_0, X_1, X_2, \ldots$ を時間一様な $\{0, 1\}$-値 m-th order Markov chain とする．即ち，$x_1, \ldots, x_m = 0, 1$ と $i = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned}
\pi_{x_1,\ldots,x_m} &= P(X_{-m+1} = x_1, X_{-m+2} = x_2, \ldots, X_0 = x_m), \\
p_{x_1,\ldots,x_m} &= P(X_i = 1 | X_{i-m} = x_1, X_{i-m+1} = x_2, \ldots, X_{i-1} = x_m), \\
&= 1 - q_{x_1,\ldots,x_m},
\end{aligned}$$

ここで $x_1, \ldots, x_m = 0, 1$ に対して $0 < p_{x_1,\ldots,x_m} < 1$ とする．

第2節では，waiting time distributions の代表的な確率分布として，上の m-th order Markov chain $X_1, X_2, \ldots$ における幾何分布とオーダー k の幾何分布の厳密分布を p.g.f.の形式で導出する．第3節では，binomial-type distributions の代表的な確率分布として m-th order Markov chain $X_1, X_2, \ldots, X_n$ における二項分布と Type I, II, III, IV の数え方によるオーダー k の二項分布の厳密分布をそれぞれ p.g.f.の母関数 (double generating function) の形式で求める．ここで，4種類のオーダー k の二項分布は統一的に求めることができる．さらに二項分布とオーダー k の二項分布の関係を明らかにする．

この論文を通して，以下を定義しておく．

$\alpha > \beta$ に対して，

$$\prod_{i=\alpha}^{\beta} g(i) = 1,$$
$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} g(i) = 0,$$

ここで，$g(i)$ はある関数である．

最後に，本論文は Uchida (1998a, 1998b) に基づいているものであるが，二項分布とオーダー k の二項分布の関係を考察した部分を新たに加筆したことにより，先の2論文に比べて，通常

の離散分布とオーダー k の離散分布の関係が見通し良くなっていると思われる．今回は，主に通常の離散分布を高次のマルコフ連鎖のもとで拡張し、さらに，それを連の分布に一般化を行なったが,連の代りに一般のパターンに拡張する問題 (Uchida (1998c)) に触れられなかったことは残念である．本論文において特に主張したいことは，本論文の結果はすべて，数式処理言語による数値的かつシンボリックな計算が可能であるということである．さらに，Stanley (1986) の本に載っているアルゴリズムなどを使用すれば，p.g.f.や double generating function の形式から確率関数を数式処理言語によって導出することも当然，可能である．つまり，厳密な確率分布の導出は「なにがなんでも explicit に求める」という時代は終り，「いかに数式処理が行なえる形式で求められるか」という時代になっているような気がしてならない．それは，確率分布論ではないとお叱りを受けるかもしれないが，このような内容の研究も計算機 (特に数式処理言語) の発達した現代における一つの確率分布論の研究ではないかと思っている．

2. Waiting time distributions

この節では，m-th order Markov chain における幾何分布とオーダー k の幾何分布を条件付確率母関数による方法を使用して導出する．

まず，m-th order Markov chain を以下のようにして first-order Markov chain に埋め込む．

長さ m の $\{0,1\}$-値の系列の集合は 2^m 個の要素からなり，それらの要素は二進数の値とみなすことができる．さらに，その二進数の値を十進数に変換する．この変換により，状態空間は $N_m = \{0, 1, 2,\ldots, 2^m-1\}$ となる．例えば，推移確率は，$m=3$ の時 p_{100} は p_4 となり，$m=4$ の時 p_{1001} は p_9 となる．また，条件付母関数法を使用するために N_m から N_m への関数 $f_i(i=0,1)$ を

$$f_i(x) = 2x + i \qquad (\mathrm{mod}\ 2^m)$$

として用意しておく．

2.1 幾何分布

τ_1 を m-th order Markov chain $X_1, X_2,\ldots$ において “1” が起こるまでの waiting time とする．任意の $x \in N_m$ に対して,. $\phi^{(x)}(t)$ を $X_{-m+1} = x_1,\ X_{-m+2} = x_2,\ldots,\ X_0 = x_m$ が与えられた時の τ_1 の条件付分布の p.g.f.とする．

任意の $x \in N_m$ に対して，

$$\phi^{(x)}(t) = p_x t + q_x t \phi^{(f_0(x))}(t)\,. \tag{2.1}$$

次に，任意の $x \in N_m$ に対して，

$$b_{x,y}(t) = 1\{x=y\} - q_x t 1\{f_0(x) = y\}$$

とおく．ここで,

$$1\{x=y\} = \begin{cases} 1, & \text{if } x = y\,, \\ 0, & \text{if } x \neq y\,. \end{cases}$$

また，次のような記号をおく．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &= (\phi^{(0)}(t),\ldots,\ \phi^{(2m-1)}(t))^T, \\ \boldsymbol{p} &= (p_0 t,\ldots,\ p_{2^m-1} t)^T, \\ B &= (b_{x,y}(t))_{x,y\in N_m}\,, \\ B^{-1} &= (c_{x,y})_{x,y\in N_m}\,, \end{aligned}$$

$$c_{x,y}=\frac{\Delta_{y,x}}{|B|},$$

ここで，$(A)^T$ はAの転置を表し，$\Delta_{x,y}$ は行列Bの(x, y)-余因子である．

この時，(2.1) は

$$B\boldsymbol{g}=\boldsymbol{p}$$

となり，これを $\boldsymbol{g}$ について解くと

$$\phi^{(x)}(t)=\sum_{i=0}^{2^m-1}\frac{\Delta_{i,x}}{|B|}p_i t=\frac{1}{|B|}\sum_{i=0}^{2^m-1}\Delta_{i,x}p_i t$$

と表される．さらに，

$$\psi(t)=|B|,$$
$$\psi^{(x)}(t)=\sum_{i=0}^{2^m-1}\Delta_{i,x}p_i t$$

とおけば，次の結果が得られる．

命題 1. 任意の $x\in N_m$ に対して，

$$\phi^{(x)}(t)=\frac{\psi^{(x)}(t)}{\psi(t)}.$$

2.2 オーダー k の幾何分布

τ_k を m-th order Markov chain $X_1, X_2,\ldots$ において長さ k の“1”の連が起こるまでの waiting time とする．任意の $x\in N_m$ に対して，$\phi_k^{(x)}(t)$ を $X_{-m+1}=x_1, X_{-m+2}=x_2,\ldots, X_0=x_m$ が与えられた時の τ_k の条件付分布の p.g.f.とする．

$i=0,1,\ldots,k-1$ に対して A_i を長さ i の “1” の連が起こり，その後に “0” が起こる事象として，Cを長さ k の“1”の連が起こる事象とする．$x\in N_m$ に対して，$\phi_k^{(x)}(t|A_i)$ と $\phi_k^{(x)}(t|C)$ をそれぞれ $A_i\cap\{X_{-m+1}=x_1, X_{-m+2}=x_2,\ldots, X_0=x_m\}$ と $C\cap\{X_{-m+1}=x_1, X_{-m+2}=x_2,\ldots, X_0=x_m\}$ が与えられた時の τ_k の条件付分布の p.g.f.とする．

$A_i,\ i=0,\ 1,\ldots,\ k-1$ とCは標本空間を分割するので，我々は次のような 2^m 個の条件付き p.g.f. の線形方程式系を持つ．

任意の $x\in N_m$ に対して，

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}\phi_k^{(x)}(t)&=\sum_{i=0}^{k-1}P(A_i)\,\phi_k^{(x)}(t|A_i)+P(C)\,\phi_k^{(x)}(t|C)\\&=q_x t\phi_k^{(f_0(x))}(t)\\&\quad+p_x t\sum_{i=1}^{m-2}\left[\prod_{j=1}^{i-1}(p_{f_1^j(x)}t)\right]q_{f_1^i(x)}t\phi_k^{(f_0\circ f_1^i(x))}(t)\\&\quad+p_x t\left[\prod_{j=1}^{m-2}(p_{f_1^j(x)}t)\right]q_{f_1^{m-1}(x)}t\phi_k^{(2^m-2)}(t)\\&\quad+p_x t\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)}t)\right]\sum_{i=m}^{k-1}(p_{2^m-1}t)^{i-m}q_{2^m-1}t\phi_k^{(2^m-2)}(t)\\&\quad+p_x t\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)}t)\right](p_{2^m-1}t)^{k-m}.\end{aligned}$$

ここで，任意の $x, y \in N_m$ と $i \in L_m = \{1, 2, \ldots, m-2\}$ に対して，以下のような記号を用意しておく．

$$
\begin{aligned}
\alpha'_{x,i}(t) &= p_x t \left[\prod_{j=1}^{i-1} (p_{f_1^j(x)} t) \right] q_{f_1^i(x)} t , \\
\beta'_x(t) &= p_x t \left[\prod_{j=1}^{m-2} (p_{f_1^j(x)} t) \right] q_{f_1^{m-1}(x)} t \\
&\quad + p_x t \left[\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)} t) \right] \sum_{i=m}^{k-1} (p_{2^m-1} t)^{i-m} q_{2^m-1} t , \\
\gamma'_x(t) &= p_x t \left[\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)} t) \right] (p_{2^m-1} t)^{k-m} , \\
a'_{x,y}(t) &= q_x t 1 \{ f_0(x) = y \} + \sum_{i \in I_{x,y}} \alpha'_{x,i}(t) + \beta'_x(t) 1 \{ y = 2^m - 2 \} , \\
I_{x,y} &= \{ i \in L_m | \, f_0 \circ f_1^i(x) = y \} , \\
b'_{x,y} &= 1 \{ x = y \} - a'_{x,y}(t) .
\end{aligned}
$$

また，次のような記号をおく．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g} &= (\phi^{(0)}(t), \ldots, \phi^{(2^m-1)}(t))^T, \\
\boldsymbol{p} &= (\gamma'_0(t), \ldots, \gamma'_{2^m-1}(t))^T, \\
B' &= (b'_{x,y}(t))_{x,y \in N_m} , \\
(B')^{-1} &= (c'_{x,y})_{x,y \in N_m} , \\
c'_{x,y} &= \frac{\Delta'_{y,x}}{|B|} ,
\end{aligned}
$$

ここで，$\Delta'_{x,y}$ は 行列 B' の (x, y)-余因子である．

その時，(2.2) は以下の表現になる．

$$
B' \boldsymbol{g} = \boldsymbol{p} .
$$

ゆえに，

$$
\phi_k^{(x)}(t) = \sum_{i=0}^{2^m-1} \frac{\Delta'_{i,x}}{|B'|} \gamma'_i(t) = \frac{1}{|B'|} \sum_{i=0}^{2^m-1} \Delta'_{i,x} \gamma'_i(t) .
$$

さらに，

$$
\begin{aligned}
\psi_k(t) &= |B'| , \\
\psi_k^{(x)}(t) &= \sum_{i=0}^{2^m-1} \Delta'_{i,x} \gamma'_i(t) \quad (\equiv \psi_k^{(x)}) ,
\end{aligned}
$$

とおけば，次の結果が得られる．

定理 1. 任意の $x \in N_m$ に対して，

$$
\phi_k^{(x)}(t) = \frac{\psi_k^{(x)}(t)}{\psi_k(t)} .
$$

3. Binomial-type distributions

$X_{-m+1}, X_{-m+2}, \ldots, X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ を時間一様な $\{0, 1\}$-値の m-th order Markov chain とす

る．この節では，この m-th order Markov chain における二項分布とオーダー k の二項分布を2節と同様に条件付確率母関数による方法を使用して導出することを行なう．ただし，この節を通して，$m \le k \le n$ とする．

3.1 二項分布

ε_1 を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ において"1"が起こる数とする．任意の $x \in N_m$ に対して，$\varphi_n^{(x)}(z)$ を $X_{-m+1} = x_1, X_{-m+2} = x_2, \ldots, X_0 = x_m$ が与えられた時の ε_1 の条件付分布の p.g.f. とする．

任意の $x \in N_m$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0^{(x)}(z) = 1\,, \\
&\varphi_n^{(x)}(z) = q_x \varphi_{n-1}^{(f_0(x))}(z) + p_x z \varphi_{n-1}^{(f_1(x))}(z)\,, \qquad \text{if} \quad n \ge 1\,.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

本来なら，漸化式 (3.1) を解けばよいのであるが，オーダー k の二項分布との比較を行なうため，以下のような漸化式にしておく．

$$
\begin{cases}
\varphi_0^{(x)}(z) = 1, \\
\varphi_n^{(x)}(z) = q_x \varphi_{n-1}^{(f_0(x))}(z) \\
\qquad\qquad + p_x z \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left[\prod_{j=1}^{i-1} (p_{f_1^j(x)} z) \right] q_{f_1^i(x)} \varphi_{n-i-1}^{(f_0 \circ f_1^i(x))}(z) \\
\qquad\qquad + p_x z \left[\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} (p_{f_1^j(x)} z) \right], \qquad \text{if} \quad 1 \le n < k\,, \\
\varphi_n^{(x)}(z) = q_x \varphi_{n-1}^{(f_0(x))}(z) + p_x z \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \left[\prod_{j=1}^{i-1} (p_{f_1^j(x)} z) \right] q_{f_1^i(x)} \varphi_{n-i-1}^{(f_0 \circ f_1^i(x))}(z) \\
\qquad\qquad + p_x z \left[\displaystyle\prod_{j=1}^{m-2} (p_{f_1^j(x)} z) \right] q_{f_1^{m-1}(x)} \varphi_{n-m}^{(2m-2)}(z) \\
\qquad\qquad + p_x z \left[\displaystyle\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)} z) \right] \displaystyle\sum_{i=m}^{n-1} (p_{2m-1} z)^{i-m} q_{2m-1} \varphi_{n-i-1}^{(2m-2)}(z) \\
\qquad\qquad + p_x z \left[\displaystyle\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)} z) \right] (p_{2m-1} z)^{n-m}, \qquad \text{if} \quad n \ge k\,.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

(3.1)，(3.2) に共通して言えることであるが，2節との決定的な違いは，条件付確率母関数による方法によって，2節では条件付確率母関数の線形方程式系が求まるのに対して，3節では条件付確率母関数の「漸化式」の線形方程式系が求まることである．

そこで，以下のような n についての母関数を用意する．

$$
\Phi^{(x)}(z, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(x)}(z) t^n.
$$

すると，$\Phi^{(x)}(z, t)$ は (3.1)，(3.2) を用いて次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(x)}(z, t) = {} & q_x t \Phi^{(f_0(x))}(z, t) + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_{x,i}(z, t)\, \Phi^{(f_0 \circ f_1^i(x))}(z, t) \\
& + \beta_x(z, t)\, \Phi^{(2m-2)}(z, t) + \gamma_x(z, t),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ここで，任意の $x, y \in N_m$ と $i \in L_m = \{1, 2, \ldots, m-2\}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\alpha_{x,i}(z, t) &= p_x z \left[\prod_{j=1}^{i-1} (p_{f_1^j(x)} z) \right] q_{f_1^i(x)} t^{i+1}, \\
\beta_x(z, t) &= p_x z \left[\prod_{j=1}^{m-2} (p_{f_1^j(x)} z) \right] q_{f_1^{m-1}(x)} t^m
\end{aligned}
$$

$$+ p_x z\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)}z)\right]\sum_{i=m}^{\infty}(p_{2^m-1}z)^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1},$$

(3.4)
$$\gamma_x(z,\ t) = p_x z\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)}z)\right]\sum_{n=k}^{\infty}(p_{2^m-1}z)^{n-m}t^n$$
$$+\sum_{n=0}^{k-1}\varphi_n^{(x)}(z,\ t)t^n - q_x t\sum_{n=0}^{k-2}\varphi_n^{(f_0(x))}(z)t^n$$
$$-p_x z\sum_{i=1}^{m-2}\left[\prod_{j=1}^{i-1}(p_{f_1^j(x)}z)\right]q_{f_1^i(x)}t^{i+1}\sum_{n=0}^{k-i-2}\varphi_n^{(f_0\circ f_1^i(x))}(z)t^n$$
$$-p_x z\left[\prod_{j=1}^{m-2}(p_{f_1^j(x)}z)\right]q_{f_1^{m-1}(x)}t^m\sum_{n=0}^{k-m-1}\varphi_n^{(2^m-2)}(z)t^n$$
$$-p_x z\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)}z)\right]\sum_{i=m}^{k-2}(p_{2^m-1}z)^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1}\sum_{n=0}^{k-i-2}\varphi_n^{(2^m-2)}(z)t^n.$$

さらに，任意の $x,\ y\in N_m$ に対して，

$$a_{x,y}(z,\ t) = q_x t1\{f_0(x)=y\} + \sum_{i\in I_{x,y}}\alpha_{x,i}(z,\ t) + \beta_x(z,\ t)1\{y=2^m-2\},$$
$$I_{x,y} = \{i\in L_m|\, f_0\circ f_1^i(x)=y\},$$

(3.5)
$$b_{x,y}(z,\ t) = 1\{x=y\} - a_{x,y}(z,\ t)$$

としておく．

特に，

$$b_{x,2^m-2}(z,\ t) = \Xi_x(z,\ t) - \Gamma_x(z)\sum_{i=m}^{\infty}(p_{2^m-1}z)^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1},$$

ここで，

$$\Gamma_x(z) = p_x z\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)}z)\right],$$
$$\Xi_x(z,\ t) = 1\{x=2^m-2\} - q_x t1\{f_0(x)=2^m-2\} - \sum_{i\in I_{x,2^m-2}}\alpha_{x,i}(z,\ t)$$
$$-p_x z\left[\prod_{j=1}^{m-2}(p_{f_1^j(x)}z)\right]q_{f_1^{m-1}(x)}t^m.$$

また，次のような記号をおく．

$$\boldsymbol{g} = (\Phi^{(0)}(z,\ t),\ldots,\ \Phi^{(2^m-1)}(z,\ t))^T,$$
$$\boldsymbol{p} = (\gamma_0'(z,\ t),\ldots,\ \gamma_{2^m-1}'(z,\ t))^T,$$
$$B = (b_{x,y}(z,\ t))_{x,y\in N_m},$$
$$B^{-1} = (c_{x,y})_{x,y\in N_m},$$
$$c_{x,y} = \frac{\Delta_{y,x}(z,\ t)}{|B|},$$

ここで，$\Delta_{x,y}(z,\ t)$ は行列 B の $(x,\ y)$-余因子である．

その時，(3.3) は以下の表現になる．

$$B\boldsymbol{g} = \boldsymbol{p}.$$

ゆえに，

$$\Phi^{(x)}(z,\ t) = \sum_{i=0}^{2^m-1}\frac{\Delta_{i,x}(z,\ t)}{|B|}\gamma_i(z,\ t) = \frac{1}{|B|}\sum_{i=0}^{2^m-1}\Delta_{i,x}(z,\ t)\gamma_i(z,\ t).$$

そして，

$$\Psi(z,\ t)=|B|\,,$$
$$\Psi^{(x)}(z,\ t)=\sum_{i=0}^{2^m-1}\Delta_{i,x}(z,\ t)\,\gamma_i(z,\ t)$$

とおけば，次の結果が得られる．

命題 2. 任意の $x \in N_m$ に対して，

$$\Phi^{(x)}(z,\ t)=\frac{\Psi^{(x)}(z,\ t)}{\Psi(z,\ t)}\,.$$

3.2 オーダー k の二項分布

μ，ν，ξ，η をそれぞれ，Type I，II，III，IV の数え方による m-th order Markov chain の下で，n 回目の試行までに起こる長さ k の "1" の連の数とする．

任意の $x \in N_m$ に対して，$\varphi_{n1}^{(x)}(z)$，$\varphi_{n2}^{(x)}(z)$，$\varphi_{n3}^{(x)}(z)$，$\varphi_{n4}^{(x)}(z)$ をそれぞれ，$X_{-m+1}=x_1, X_{-m+2}=x_2,\dots, X_0=x_m$ が与えられた時の μ，ν，ξ，η の条件付分布の p.g.f. とする．

この時，任意の $x \in N_m$ と各 $s=1$，2，3，4 に対して以下のように漸化式が求まる．

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,s}^{(x)}(z) &= 1\,, \qquad \text{if } 0 \le n < k\,,\\
\varphi_{n,s}^{(x)}(z) &= q_x \varphi_{n-1,s}^{(f_0(x))}(z)\\
&\quad + p_x \sum_{i=1}^{m-2}\left[\prod_{j=1}^{i-1}(p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^i(x)}\varphi_{n-i-1,s}^{(f_0\circ f_1^i(x))}(z)\\
&\quad + p_x \left[\prod_{j=1}^{m-2}(p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^{m-1}(x)}\varphi_{n-m,s}^{(2^m-2)}(z)\\
&\quad + p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)})\right] \sum_{i=m}^{k-1}(p_{2^m-1})^{i-m}\, q_{2^m-1}\varphi_{n-i-1,s}^{(2^m-2)}(z)\\
&\quad + p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)})\right] \sum_{i=k}^{n-1}(p_{2^m-1})^{i-m}\, q_{2^m-1}\xi_{i,s}\varphi_{n-i-1,s}^{(2^m-2)}(z)\\
&\quad + p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)})\right] (p_{2^m-1})^{n-m}\,\xi_{n,s}\,, \qquad \text{if } n \ge k\,,
\end{aligned}$$

ここで，

$$\xi_{i,s}=\begin{cases} z^{[i/k]}, & \text{if } s=1\,,\\ z\,, & \text{if } s=2\,,\\ z^{i-k+1}, & \text{if } s=3\,,\\ z1\{i=k\}+1\{i\neq k\}\,, & \text{if } s=4\,. \end{cases}$$

さらに，

$$\Phi_s^{(x)}(z,\ t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,s}^{(x)}(z)\,t^n$$

とすると，任意の $x \in N_m$ に対して，以下の線形方程式系が求まる．

$$\begin{aligned}
\text{(3.6)}\qquad \Phi_s^{(x)}(z,\ t) &= q_x t\Phi_s^{(f_0(x))}(z,\ t)+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha''_{x,i}(t)\,\Phi_s^{(f_0\circ f_1^i(x))}(z,\ t)\\
&\quad+\beta''_x(z,\ t)\,\Phi_s^{(2^m-2)}(z,\ t)+\gamma''_x(z,\ t),
\end{aligned}$$

ここで，任意の $x \in N_m$ と $i \in L_m$ に対して，

$$\alpha''_{x,i}(t) = p_x \left[\prod_{j=1}^{i-1} (p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^i(x)} t^{i+1},$$

$$\begin{aligned}\beta''_x(z,\ t) = p_x &\left[\prod_{j=1}^{m-2} (p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^{m-1}(x)} t^m \\ &+ p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)})\right] \sum_{i=m}^{k-1} (p_{2^m-1})^{i-m}\, q_{2^m-1} t^{i+1} \\ &+ p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)})\right] \sum_{i=k}^{\infty} (p_{2^m-1})^{i-m}\, q_{2^m-1} t^{i+1} \xi_{i,s}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma''_x(z,\ t) = p_x &\left[\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)})\right] t^m \sum_{n=k}^{\infty} (p_{2^m-1})^{n-m}\, t^{n-m} \xi_{n,s} \\ &+ \sum_{n=0}^{k-1} t^n - q_x t \sum_{n=0}^{k-2} t^n \\ &- p_x \sum_{i=1}^{m-2} \left[\prod_{j=1}^{i-1} (p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^i(x)} t^{i+1} \sum_{n=0}^{k-i-2} t^n \\ &- p_x \left[\prod_{j=1}^{m-2} (p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^{m-1}(x)} t^m \sum_{n=0}^{k-m-1} t^n \\ &- p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1} (p_{f_1^j(x)})\right] \sum_{i=m}^{k-2} (p_{2^m-1})^{i-m}\, q_{2^m-1} t^{i+1} \sum_{n=0}^{k-i-2} t^n.\end{aligned} \tag{3.7}$$

次に，任意の $x, y \in N_m$ に対して，

$$\begin{aligned}\alpha''_{x,y}(z,\ t) &= q_x t 1\{f_0(x) = y\} + \sum_{i \in I_{x,y}} \alpha''_{x,i}(t) + \beta''_x(z,\ t) 1\{y = 2^m - 2\}\,, \\ I_{x,y} &= \{i \in L_m |\ f_0 \circ f_1^i(x) = y\}\,, \\ b''_{x,y}(z,\ t) &= 1\{x = y\} - \alpha''_{x,y}(z,\ t)\end{aligned} \tag{3.8}$$

とおく．

また，次のような記号をおく．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g} &= (\Phi^{(0)}(z,\ t), \ldots,\ \Phi^{(2^m-1)}(z,\ t))^T, \\ \boldsymbol{p} &= (\gamma'_0(z,\ t), \ldots,\ \gamma'_{2^m-1}(z,\ t))^T, \\ B'' &= (b''_{x,y}(z,\ t))_{x,y \in N_m}\,, \\ (B'')^{-1} &= (c''_{x,y})_{x,y \in N_m}\,, \\ c''_{x,y} &= \frac{\Delta''_{y,x}}{|B''|}\,,\end{aligned}$$

ここで $\Delta''_{x,y}$ は行列 B'' の $(x,\ y)$-余因子である．

この時，(3.6) は以下の表現になる．

$$B''\boldsymbol{g} = \boldsymbol{p}\,.$$

ゆえに，

$$\Phi_s^{(x)}(z,\ t) = \sum_{i=0}^{2^m-1} \frac{\Delta''_{i,x}}{|B''|} \gamma''_i = \frac{1}{|B''|} \sum_{i=0}^{2^m-1} \Delta''_{i,x} \gamma''_i.$$

任意の $x \in N_m$ に対して，

$$\begin{aligned}\Psi_s(z,\ t) &= |B''|\,, \\ \Psi_s^{(x)}(z,\ t) &= \sum_{i=0}^{2^m-1} \Delta''_{i,x} \gamma''_i \equiv \Psi_s^{(x)}\end{aligned}$$

とおくと，

$$\Psi_s^{(x)}=\begin{vmatrix} b''_{00}(z,t) & \cdots & b''_{0,x-1}(z,t) & \gamma''_0(z,t) & b''_{0,x+1}(z,t) & \cdots & b''_{0,2^m-1}(z,t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b''_{2^m-1,0}(z,t) & \cdots & b''_{2^m-1,x-1}(z,t) & \gamma''_{2^m-1}(z,t) & b''_{2^m-1,x+1}(z,t) & \cdots & b''_{2^m-1,2^m-1}(z,t) \end{vmatrix}$$

である．

特に，以下に注意する．

$$\begin{aligned}(3.9)\qquad b''_{x,2^m-2}(z,t) &= \Xi''_x(t)-\Gamma''_x\sum_{i=m}^{k-1}(p_{2^m-1})^{i-m}\,q_{2^m-1}t^{i+1} \\ &\quad -\Gamma''_x\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}\,q_{2^m-1}t^{i+1}\xi_{i,s} \\ &= \Xi_x(1,t)-\Gamma_x(1)\sum_{i=m}^{k-1}(p_{2^m-1})^{i-m}\,q_{2^m-1}t^{i+1} \\ &\quad -\Gamma_x(1)\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}\,q_{2^m-1}t^{i+1}\xi_{i,s}\,,\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\Gamma''_x &= p_x\left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)})\right]=\Gamma_x(1)\,, \\ \Xi''_x(t) &= 1\{x=2^m-2\}-q_xt1\{f_0(x)=2^m-2\}-\sum_{i\in I_{x,2^m-2}}\alpha''_{x,i}(t) \\ &\quad -p_x\left[\prod_{j=1}^{m-2}(p_{f_1^j(x)})\right]q_{f_1^{m-1}(x)}t^m, \\ &= \Xi_x(1,t)\,.\end{aligned}$$

$y\neq 2^m-2$ の時，(3.5) と (3.8) から

$$(3.10)\qquad b''_{x,y}(z,t)=b_{x,y}(1,t).$$

(3.9) と (3.10) から

$$\begin{aligned}(3.11)\qquad \Psi_s(z,t) &= \begin{vmatrix} b''_{00}(z,t) & \cdots & b''_0(z,t) & \cdots & b''_{0,2^m-2}(z,t) & b''_{0,2^m-1}(z,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b''_{2^m-1,0}(z,t) & \cdots & b''_{2^m-1}(z,t) & \cdots & b''_{2^m-1,2^m-2}(z,t) & b''_{2^m-1,2^m-1}(z,t) \end{vmatrix} \\ &= \Psi(1,t)+\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}\,q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s}) \\ &\quad \times\begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & b_0(1,t) & \cdots & \Gamma_0(1) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & b_{2^m-1}(1,t) & \cdots & \Gamma_{2^m-1}(1) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(3.4) と (3.7) から

$$(3.12)\qquad \gamma''_x(z,t)-A_x=\xi_{n,s}(\gamma_x(1,t)-A_x)\,,$$

ここで，

$$A_x=\sum_{n=0}^{k-1}t^n-q_xt\sum_{n=0}^{k-2}t^n$$

$$
\begin{aligned}
&-p_x \sum_{i=1}^{m-2}\left[\prod_{j=1}^{i-1}(p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^i(x)} t^{i+1} \sum_{n=0}^{k-i-2} t^n \\
&-p_x \left[\prod_{j=1}^{m-2}(p_{f_1^j(x)})\right] q_{f_1^{m-1}(x)} t^m \sum_{n=0}^{k-m-1} t^n \\
&-p_x \left[\prod_{j=1}^{m-1}(p_{f_1^j(x)})\right] \sum_{i=m}^{k-1}(p_{2^m-1})^{i-m} q_{2^m-1} t^{i+1} \sum_{n=0}^{k-i-2} t^n .
\end{aligned}
$$

$x=2^m-2$ の時，(3.10) と (3.12) から

$$
\begin{aligned}
(3.13)\qquad \Psi_s^{(2^m-2)} &= \begin{vmatrix} b''_{00}(z,t) & \cdots & b''_{0,2^m-3}(z,t) & \gamma''_0(z,t) & b''_{0,2^m-1}(z,t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b''_{2^m-1,0}(z,t) & \cdots & b''_{2^m-1,2^m-3}(z,t) & \gamma''_{2^m-1}(z,t) & b''_{2^m-1,2^m-1}(z,t) \end{vmatrix} \\
&= \xi_{n,s}\Psi^{(2^m-2)}(1,t) \\
&\quad + (1-\xi_{n,s}) \begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & b_{0,2^m-3}(1,t) & A_0 & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & b_{2^m-1,2^m-3}(1,t) & A_{2^m-1} & b_{2^m-1,2^m-1}(z,t) \end{vmatrix}, \\
&= \xi_{n,s}\Psi^{(2^m-2)}(1,t) + (1-\xi_{n,s}) \sum_{i=0}^{2^m-1} \Delta_{i,2^m-2}(1,t) A_i .
\end{aligned}
$$

一方，$x \neq 2^m-2$ の時，(3.9)，(3.10) そして (3.12) から

$$
\begin{aligned}
(3.14)\qquad \Psi_s^{(x)} &= \begin{vmatrix} b''_{00}(z,t) & \cdots & \gamma''_0(z,t) & \cdots & b''_{0,2^m-2}(z,t) & b''_{0,2^m-1}(z,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b''_{2^m-1,0}(z,t) & \cdots & \gamma''_{2^m-1}(z,t) & \cdots & b''_{2^m-1,2^m-2}(z,t) & b''_{2^m-1,2^m-1}(z,t) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & \gamma''_0(z,t) & \cdots & \Xi_0(1,t) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & \gamma''_{2^m-1}(z,t) & \cdots & \Xi_{2^m-1}(1,t) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix} \\
&\quad - \sum_{i=m}^{k-1}(p_{2^m-1}t)^{i-m} q_{2^m-1} t^{i+1} \\
&\quad \times \begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & \gamma''_0(z,t) & \cdots & \Gamma_0(1) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & \gamma''_{2^m-1}(z,t) & \cdots & \Gamma_{2^m-1}(1) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix} \\
&\quad - \sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1}t)^{i-m} q_{2^m-1} t^{i+1} \xi_{i,s} \\
&\quad \times \begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & \gamma''_0(z,t) & \cdots & \Gamma_0(1) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & \gamma''_{2^m-1}(z,t) & \cdots & \Gamma_{2^m-1}(1,t) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix} \\
&= \xi_{n,s}\Psi^{(x)}(1,t) \\
&\quad + (1-\xi_{n,s}) \begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & A_0 & \cdots & b_{0,2^m-2}(1,t) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & A_{2^m-1} & \cdots & b_{2^m-1,2^m-2}(1,t) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m} q_{2^m-1} t^{i+1}(1-\xi_{i,s})
\end{aligned}
$$

$$\times\begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & \gamma_0''(z,t) & \cdots & \Gamma_0(1,t) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & \gamma_{2^m-1}''(z,t) & \cdots & \Gamma_{2^m-1}(1,t) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix}$$

$$= \xi_{n,s}\Psi^{(x)}(1,t) + (1-\xi_{n,s})\sum_{i=0}^{2m-1}\Delta_{i,x}(1,t)A_i$$
$$+\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s})$$
$$\times\begin{vmatrix} b_{00}(1,t) & \cdots & A_0 & \cdots & \Gamma_0(1) & b_{0,2^m-1}(1,t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{2^m-1,0}(1,t) & \cdots & A_{2^m-1} & \cdots & \Gamma_{2^m-1}(1) & b_{2^m-1,2^m-1}(1,t) \end{vmatrix}.$$

さらに，行列Dを以下のように定義しておく．

$$D = (d_{x,y}(1,t))_{x,y\in N_m},$$

ここで，

$$d_{x,y}(1,t) = b_{x,y}(1,t), \qquad \text{if} \quad y \neq 2^m-2,$$
$$d_{x,2^m-2}(1,t) = \Gamma_x(1), \qquad \text{if} \quad y = 2^m-2.$$

すると，(3.14) から

$$\Psi_s^{(x)}(z,t) = \xi_{n,s}\Psi^{(x)}(1,t) + (1-\xi_{n,s})\sum_{i=0}^{2m-1}\Delta_{i,x}(1,t)A_i$$
$$+\left[\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s})\right]\sum_{i=0}^{2m-1}\delta_{i,x}(1,t)A_i, \tag{3.15}$$

ここで，$\delta_{x,y}(1,t)$は行列Dの(x,y)-余因子である．

(3.13) と (3.15) より，任意の$x\in N_m$に対して，

$$\Psi_s^{(x)}(z,t) = \xi_{n,s}\Psi^{(x)}(1,t) + (1-\xi_{n,s})\sum_{i=0}^{2m-1}\Delta_{i,x}(1,t)A_i$$
$$+1\{x\neq 2^m-2\}\left[\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s})\right]\sum_{i=0}^{2m-1}\delta_{i,x}(1,t)A_i.$$

また，(3.11) から

$$\Psi_s(z,t) = \Psi(1,t) + \sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s})|D|.$$

よって，次の結果を得る．

定理 2. 任意の$x\in N_m$と各$s=1,2,3,4$に対して，

$$\Phi_s^{(x)}(z,t) = \frac{\Psi_s^{(x)}(z,t)}{\Psi_s(z,t)},$$

ここで，$x\neq 2^m-2$に対して，

$$\Psi_s^{(x)}(z,t) = \xi_{n,s}\Psi^{(x)}(1,t) + (1-\xi_{n,s})\sum_{i=0}^{2m-1}\Delta_{i,x}(1,t)A_i$$
$$+\left[\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s})\right]\sum_{i=0}^{2m-1}\delta_{i,x}(1,t)A_i,$$

$$\Psi_s^{(2^m-2)}(z,\ t)=\xi_{n,s}\Psi^{(x)}(z,\ t)+(1-\xi_{n,s})\sum_{i=0}^{2^m-1}\Delta_{i,x}(1,\ t)\,A_i\,,$$

$$\Psi_s(z,\ t)=\Psi(1,\ t)+\sum_{i=k}^{\infty}(p_{2^m-1})^{i-m}\,q_{2^m-1}t^{i+1}(1-\xi_{i,s})\,|D|\,.$$

参考文献

Aki, S. and Hirano, K. (1993). Discrete distributions related to succession events in a two-state Markov chain, *Statistical Sciences and Data Analysis*; *Proceedings of the Third Pacific Area Statistical Conference* (eds. K. Matusita, M. L. Puri and T. Hayakawa), 467-474, VSP International Science Publishers, Zeist.

Chao, M. T., Fu, J. C. and Koutras, M. V. (1995). A survey of the reliability studies of consecutive-k-out-of-n: F systems and its related systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 120-127.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed., Wiley, New York.

Hirano, K. (1994). Consecutive-k-out-of-n: F systems, *Proc. Inst. Statist. Math.*, **42**, 45-61 (in Japanese).

Hirano, K. and Aki, S. (1993). On number of occurrences of success runs of specified length in a two-state Markov chain, *Statist. Sinica*, **3**, 313-320.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Kemp, A. W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*, 2nd ed., Wiley, New York.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*, Wiley, New York.

Philippou, A. N., Georghiou, C. and Philippou, G. N. (1983). A generalized geometric distribution and some of its properties, *Statist. Probab. Lett.*, **1**, 171-175.

Stanley, R. P. (1986). *Enumerative Combinatorics*, Vol. I, Wadsworth & Brooks/Cole, California.

Uchida, M. (1998a). Joint distributions of numbers of success-runs until the first consecutive k successes in a higher-order two-state Markov chain, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **50**, 203-222.

Uchida, M. (1998b). On number of occurrences of success runs of specified length in a higher-order two-state Markov chain, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **50**, 587-601.

Uchida, M. (1998c). On generating functions of waiting time problems for sequence patterns of discrete random variables, *Ann. Inst. Statist. Math.* **50**, 655-671.

Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1993). Statistical inference from start-up demonstration test data, *Journal of Quality Technology*, **25**, 119-130.

Discrete Distribution Theory in a Higher-order Markov Chain

Masayuki Uchida

(The Institute of Statistical Mathematics)

Let $X_{-m+1}, X_{-m+2}, \dots, X_0, X_1, X_2, \dots$ be a time-homogeneous $\{0, 1\}$-valued m-th order Markov chain. Distribution of the numbers of trials until the first success, i.e., geometric distribution, in the sequence $X_1, X_2, \dots$ is studied. Geometric distribution of order k in the sequence $X_1, X_2, \dots$ is also obtained. The probability distribution of number of "1", i.e., binomial distribution, in the sequence $X_1, X_2, \dots, X_n$ is studied. The probability distributions of number of runs of "1" of exact length k ($k \geq m$) in the sequence $X_1, X_2, \dots, X_n$ are also considered. There are some ways of counting numbers of runs with length k. This paper studies the distributions based on four ways of counting numbers of runs, i.e., the number of non-overlapping runs of length k, the number of runs with length greater than or equal to k, the number of overlapping runs of length k and the number of runs of length exactly k. We obtain the above four kinds of binomial distributions of order k by using the unified expressions and make the relation between the binomial distribution and the binomial distributions of order k clear.

Key words: Geometric distribution, binomial distribution, geometric distribution of order k, binomial distribution of order k, probability generating function, Markov chain.