

# マルコフ切り換え確率的トレンドモデルを用いた TOPIX のトレーディング戦略

袴田 守一<sup>†</sup>

( 受付 2002 年 2 月 28 日 ; 改訂 2002 年 8 月 22 日 )

## 要 旨

本稿は、金融資産価格変動の 2 つの特性である“トレンド傾斜の変化”と“不均一分散”に焦点をあてる。これらの特性をモデル化するために、マルコフ切り換え確率的トレンド(MS-SC/ARCH)モデルを提案し、トレーディング戦略のツールとしての MS-SC/ARCH モデルの有効性を評価する。MS-SC/ARCH モデルは、トレンド傾斜の変化とボラティリティにかかわる 2 つの状態から構成されている。時系列の状態間遷移は、1 階-2 状態のマルコフ切り換え過程に依存する。東証株価指数 (TOPIX) を使った実証分析では、トレーディング戦略にとって有益なトレンド傾斜の推定に成功し、MS-SC/ARCH モデルを利用したトレーディング戦略は、他のいくつかの戦略よりも良好なパフォーマンスを得ることができた。

キーワード：ARCH, 不均一分散, マルコフ切り換え, TOPIX, トレーディング戦略, トレンドの傾斜.

## 1. まえがき

実際の為替, 株式, 商品等の金融市場において, 金融資産トレーディングに携わる実務家の人々は“伝統的なテクニカル分析(以下, テクニカル分析)を重要な分析手法として利用している。Taylor (1992) はロンドンの外国為替ディーラーの 90% 以上が, 彼らのトレーディングにかかわる意思決定の過程でテクニカル分析を用いていることを報告している。テクニカル分析の最も重要かつ基本的な考え方の一つは, 「資産価格はトレンドの回りで動く」というものである。この考え方にもとづけば, 資産価格自体の変動もさることながら, トレンドをどのように推定するかが第一の問題になる。テクニカル分析の枠組みの中での“トレンド”という場合は, 資産価格変動の局所的な山と谷を結ぶ直線を指すのが一般的である。また, ここで得られた“トレンドの傾斜”は, 実際のトレーディングにおいて重要な役割を果たす。すなわち, トレンドの傾斜が正(負)である間は, 資産価格が多少ともトレンド回りで変動したとしても, その資産の買い持ち(売り持ち)ポジションを持続させるのである。テクニカル分析では, この不観測のトレンドを推定するいくつかの方法が提案されている。しかし, いずれのトレンド推定のための手法も一貫した科学的な客観基準によるものではなく, 金融市場での経験に基づく直感に依存するところが大きい。すなわち, 同一の手法を用いたとしても誰もが実際のトレーディングで効果的なトレンドを得ることができるとは限らないのである。テクニカル分析についての詳しい説明は Murphy (1986) が行っている。

<sup>†</sup> 総合研究大学院大学 数物科学研究科統計科学専攻: 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7; hakamata@ism.ac.jp

本稿の第一の目的は、金融時系列データのトレンドを推定するために、非線形・非ガウス確率モデルである “stochastic trend model with Markov switching slope change and ARCH” (MS-SC/ARCH) を提案することである。第二の目的としては、この MS-SC/ARCH モデルによって推定されたトレンドとトレンドの傾斜が実際の金融市場でのトレーディング戦略のツールとして有効なものかどうかを、東証株価指数 (TOPIX) を用いて検証することである。

非線形・非ガウス時系列の特性を表現するために、これまでも多くの研究が行われてきた。Harrison and Stevens (1976), Harvey and Todd (1983) はランダムウォーク過程に従うトレンド成分とトレンド傾斜成分を含むような構造的時系列モデルを提案した。Kitagawa and Gersch (1996) は非正規分布を含めたいくつかのタイプの確率的トレンドモデルをまとめている。また、Hamilton (1989) は未知の状態変化を含む時系列を分析するために、計量経済分析にマルコフ切り換えモデルを導入し、景気変動の分析に適用した。Kim (1994) は Hamilton モデルを線形状態空間モデルに拡張した。Cai (1994), Hamilton and Susmel (1994) はマルコフ切り換えモデルを用いて金融データの不均一分散性をモデル化した。マルコフ切り換えモデルは Kim and Nelson (1999) に詳細にまとめられている。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節で、MS-SC/ARCH モデルを説明する。第 3 節では、MS-SC/ARCH モデルのための状態推定とパラメータ推定の方法を説明する。第 4 節では、MS-SC/ARCH モデルを利用したトレーディング戦略を説明し、第 5 節で、実際の株価指数データ (TOPIX) によるこのトレーディング戦略の有効性の検証を行う。第 6 節はあとがきにあてる。

## 2. モデル

時系列  $y_n$  を観測される金融資産価格、またはその適当な変換値としたときに、MS-SC/ARCH モデルの観測モデルは

$$(2.1) \quad y_n = t_n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n | \Psi_{n-1} \sim N(0, h_n),$$

$$(2.2) \quad h_n = \gamma_0(1 - S_n) + \gamma_1 S_n + \alpha \varepsilon_{n-1}^2, \quad \gamma_1 > \gamma_0 > 0, \quad \alpha \geq 0,$$

と記述される。ここで、 $t_n$  はトレンド成分とし、トレンド回りの変動  $\varepsilon_n$  は ARCH 過程に従う。潜在変数  $S_n \in \{0, 1\}$  は、1 階-2 状態のマルコフ過程に従い、この  $S_n$  に依存して時系列プロセスの状態 (“regime”) が切り換わる。 $S_n = 0$  のとき、時系列プロセスは ARCH 定数  $\gamma_0$  をもつ低ボラティリティ状態、 $S_n = 1$  のとき、ARCH 定数  $\gamma_1$  の高ボラティリティ状態にあるとすることができる。また、MS-SC/ARCH モデルのシステムモデルは

$$(2.3) \quad t_n = t_{n-1} + \Delta t_n + v_n, \quad v_n \sim N(0, \tau^2),$$

$$(2.4) \quad \Delta t_n = \Delta t_{n-1} + w_n, \quad w_n \sim N(0, v_1^2 S_n).$$

と記述される。トレンド成分  $t_n$  は  $\Delta t_n$  をドリフトとし、正規白色雑音  $v_n$  をもつランダムウォーク過程に従う。 $\Delta t_n$  はトレンド傾斜成分と見なすことができ、 $S_n$  に依存してその過程が 2 つの時系列プロセスの間を遷移する。 $S_n = 0$  は  $\Delta t_n$  は確定的に決まり、トレンド傾斜に変化がない状態を表す。一方、 $S_n = 1$  は正規白色雑音  $w_n$  をもつランダムウォーク過程に従い、トレンド傾斜が変化するような状態を表す。MS-SC/ARCH モデルでは、上述したようなボラティリティの状態遷移とトレンド傾斜の変化が、共通の潜在変数  $S_n$  とその状態遷移確率

$$(2.5) \quad p_{ij} = \Pr(S_n = j | S_{n-1} = i), \quad i, j = 0, 1,$$

に依存して、同時に起こることを仮定している。ただし、式 (2.5) で  $i = 0, 1$  について、 $\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1$  とする。この状態遷移確率  $p_{ij}$  は時間について一定であるとし、次のような  $(2 \times 2)$  の状態遷移



図 1. 東証株価指数 (TOPIX) : 1986/1-2001/12.

確率行列

$$(2.6) \quad P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{00} & p_{11} \end{pmatrix} .$$

として、まとめて表現することができる。

式 (2.1) から (2.6) で説明した MS-SC/ARCH モデルでは、トレンドの傾斜が定数と確率変動の 2 つの状態間で切り換わる。これはテクニカル分析の中で重要な役割を果たす “トレンド” の考え方——すなわち、金融資産価格は区間ごとに一定の傾斜をもったトレンドに沿って動く傾向があり、かつそのトレンドには持続性がある——を近似したものである。図 1 は後の実証分析で用いる TOPIX の時系列推移である。この図 1 から、上述したような局所的に一定傾斜をもつトレンドの存在が示唆される。また、MS-SC/ARCH モデルでは、時系列プロセスの高ボラティリティ状態への遷移は、同時にトレンドの傾斜変化をともなうものとしている。このような仮定は、実際のトレーディングにおいて（低ボラティリティ状態のもとで）実務家が多少の金融資産価格の変動があったとしても、トレンドの傾斜予測や投資ポジションの修正を逐次的に行わず、低ボラティリティから高ボラティリティへの状態変化といった金融市場の不確実性が増大するような状況の下で、それらを修正する傾向があること、を考慮したものである。

3. 状態推定とパラメータ推定

$x_n \equiv (t_n, \Delta t_n, \varepsilon_n)^T$  を  $(3 \times 1)$  の状態ベクトルと定義する。式 (2.1) から (2.4) は、潜在変数  $S_n$  が与えられた条件のもとで、次のように状態空間を表現することができる。

$$(3.1) \quad x_n = Fx_{n-1} + G\omega_n,$$

$$(3.2) \quad y_n = Hx_n,$$

ただし、 $\Psi_{n-1}$  を  $n - 1$  期までに利用可能な情報としたときに、式 (3.1) のシステムノイズは

$$(3.3) \quad \omega_n | \Psi_{n-1} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_1^2 S_n & 0 \\ 0 & 0 & h_n \end{bmatrix} \right) .$$

となる．また， $F, G$  と  $H$  はそれぞれ次のように定義される．

$$(3.4) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このように，いったん線形状態空間モデルとして MS-SC/ARCH モデルが表現できると，カルマンフィルタのアルゴリズムを用いて，状態とパラメータの推定を行うことができる．Kim (1994) はマルコフ切り換え構造をもつ状態空間モデルのフィルタを，Harvey et al. (1992) は不均一分散構造をもつ状態空間モデルのフィルタをそれぞれ提案した．MS-SC/ARCH モデルのためのフィルタは，これら 2 つのアルゴリズムを組み合わせることで導出することができる．

まず最初に，潜在変数  $S_n = j$  と  $S_{n-1} = i$  が所与の条件のもとで，状態ベクトル  $x_n$  のためのフィルタは，次のように記述できる．

状態ベクトル  $x_n$  のフィルタ

[ 一期先予測 ]

$$(3.5) \quad x_{n|n-1}^{(i,j)} = Fx_{n-1|n-1}^{(i)},$$

$$(3.6) \quad \omega_{n|n-1}^{(i,j)} = F\omega_{n-1|n-1}^{(i)}F^T + GQ^{(j)}G^T,$$

ただし，

$$(3.7) \quad x_{n|n-1}^{(i,j)} = E[x_n | S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_{n-1}],$$

$$(3.8) \quad \omega_{n|n-1}^{(i,j)} = E[(x_n - x_{n|n-1})(x_n - x_{n|n-1})^T | S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_{n-1}],$$

$$(3.9) \quad Q^{(j)} = E[\omega_n, \omega_n^T | \Psi_{n-1}].$$

[ フィルタ ]

$$(3.10) \quad K_n^{(i,j)} = \omega_{n|n-1}^{(i,j)}H^T(H\omega_{n|n-1}^{(i,j)}H^T)^{-1},$$

$$(3.11) \quad x_{n|n}^{(i,j)} = x_{n|n-1}^{(i,j)} + K_n^{(i,j)}(y_n - Hx_{n|n-1}^{(i,j)}),$$

$$(3.12) \quad \omega_{n|n}^{(i,j)} = (I - K_n^{(i,j)}H)\omega_{n|n-1}^{(i,j)},$$

ただし，

$$(3.13) \quad x_{n|n}^{(i,j)} = E[x_n | S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_n],$$

$$(3.14) \quad \omega_{n|n}^{(i,j)} = E[(x_n - x_{n|n})(x_n - x_{n|n})^T | S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_n].$$

しかし，式(3.6)を求めるためには，過去の不観測ショック  $\varepsilon_{n-1}^2$  を含む式(2.2)を計算する必要があり，このままでは，上述のカルマンフィルタは実行できなくなってしまう．Harvey et al. (1992) は，条件付き期待値

$$(3.15) \quad h_n = \gamma_0(1 - S_n) + \gamma_1 S_n + \alpha E[\varepsilon_{n-1}^2 | \Psi_{n-1}],$$

で置き換えることによって，不観測ショック  $\varepsilon_{n-1}^2$  を近似する方法を提案した．この定式化のもとで， $E[\varepsilon_{n-1}^2 | \Psi_{n-1}]$  の計算は簡単である．なぜならば，

$$(3.16) \quad \varepsilon_{n-1} = E[\varepsilon_{n-1} | \Psi_{n-1}] + (\varepsilon_{n-1} - E[\varepsilon_{n-1} | \Psi_{n-1}]),$$

は既知であり，

$$(3.17) \quad E[\varepsilon_{n-1}^2 | \Psi_{n-1}] = E[E[\varepsilon_{n-1} | \Psi_{n-1}]^2] + E[(\varepsilon_{n-1} - E[\varepsilon_{n-1} | \Psi_{n-1}])^2],$$

が得られるからである。ただし， $E[\varepsilon_{n-1}|\Psi_{n-1}]$  は  $x_{n-1|n-1}$  から， $E[(\varepsilon_{n-1} - E(\varepsilon_{n-1}|\Psi_{n-1}))^2]$  は  $\omega_{n-1|n-1}$  からそれぞれ得られる。

ここで，式(3.5)から式(3.17)の状態ベクトル  $x_n$  のフィルタから， $y_n$  の条件付き予測分布

$$(3.18) \quad f(y_n|S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_n}} \exp \left[ -\frac{(y_n - Hx_{n|n-1}^{(i,j)})^2}{2r_n} \right],$$

が求められる。ただし，式(3.8)の一期先予測分布から  $r_n = H\omega_{n|n-1}^{(i,j)}H_n^T$  とする。

ここまでの状態ベクトル  $x_n$  のフィルタでは， $x_n$  と  $y_n$  にかかわる分布は  $S_n = j$  と  $S_{n-1} = i$  の条件付き分布として表されている。したがって，同時に潜在変数  $S_n$  を次のようなフィルタを用いて，逐次推定しなくてはならない。

潜在変数  $S_n$  のフィルタ

[ 一期先予測 ]

$$(3.19) \quad \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_{n-1}) = \Pr(S_n = j|S_{n-1} = i) \Pr(S_{n-1} = i|\Psi_{n-1}),$$

$$(3.20) \quad \Pr(S_n = j|\Psi_{n-1}) = \sum_{i=0}^1 \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_{n-1}).$$

[ フィルタ ]

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_n) &= \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_{n-1}, y_n) \\ &= \frac{f(y_n|S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_{n-1}) \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_{n-1})}{f(y_n|\Psi_{n-1})}, \end{aligned}$$

$$(3.22) \quad \Pr(S_n = j|\Psi_n) = \sum_{i=0}^1 \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_n)$$

ただし，式(3.18)と(3.19)から

$$(3.23) \quad \begin{aligned} f(y_n|\Psi_{n-1}) &= \sum_{j=0}^1 f(y_n|S_n = j, \Psi_{n-1}) \Pr(S_n = j|\Psi_{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 f(y_n|S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_{n-1}) \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_{n-1}). \end{aligned}$$

ここまでに述べた2つの“状態ベクトル  $x_n$ ”と“潜在変数  $S_n$ ”のためのフィルタを実行していく過程で，正規分布成分数が急増してしまうという問題が発生する。このような問題に対処するために，Harrison and Stevens(1976)によって提案された近似計算手法

$$(3.24) \quad x_{n|n}^{(j)} = \frac{\sum_{i=0}^1 \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_n) x_{n|n}^{(i,j)}}{\Pr(S_n = j|\Psi_n)},$$

$$(3.25) \quad w_{n|n}^{(j)} = \frac{\sum_{i=0}^1 \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i|\Psi_n) [w_{n|n}^{(i,j)} + (x_{n|n}^{(j)} - x_{n|n}^{(i,j)})(x_{n|n}^{(j)} - x_{n|n}^{(i,j)})^T]}{\Pr(S_n = j|\Psi_n)}$$

を用いて，各再帰過程で状態ベクトル  $x_n$  の分布を限られた数の正規分布で近似していく。Kim(1994)，Kitagawa(1994)は近似計算による誤差が小さく，この方法が有効な近似計算方法であることを報告している。また，パラメータや状態ベクトルの正確な計算を行うためには，非線

形フィルタ(Kitagawa(1987))やマルコフ連鎖モンテカルロ法(Albert and Chib(1993))を用いることができる。

以上のような式(3.5)から(3.25)の一連のフィルタアルゴリズムの実行によって、未知パラメータ  $\theta$  の(近似)対数尤度

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad L(\theta) &= \sum_{n=1}^N \log f(y_n | \Psi_{n-1}) \\
 &= \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \log f(y_n, S_n = j, S_{n-1} = i | \Psi_{n-1}) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \log f(y_n | S_n = j, S_{n-1} = i, \Psi_{n-1}) \right. \\
 &\quad \left. \times \Pr(S_n = j, S_{n-1} = i | \Psi_{n-1}) \right]
 \end{aligned}$$

が求められる。この未知パラメータ  $\theta$  を求めるために、EM アルゴリズム(Hamilton(1994))などの方法も提案されているが、本稿では計算の簡単さを考慮して、最尤法によるパラメータの推定を行う。

#### 4. トレーディング戦略

この節では、MS-SC/ARCH モデルを利用したトレーディング戦略(以下、MS-SC/ARCH 戦略)を考える。MS-SC/ARCH 戦略による「売り」あるいは「買い」の売買シグナルに従って、TOPIX に対するトレーディングの意思決定が行われるものとする。MS-SC/ARCH 戦略で「買い」「売り」シグナルが出たときに、TOPIX を買い持ち(売り持ち)にする。そして、同一の「買い」「売り」の売買シグナルが続く間は、そのまま TOPIX の買い持ち(売り持ち)ポジションを継続させる。その後、反対の「売り」「買い」の売買シグナルが出された時点で、それまでの投資ポジションを閉じて、それとは反対の売り持ち(買い持ち)ポジションを新たにつくる。 $n$  期の売買シグナル  $\psi_n$  は、MS-SC/ARCH モデルによるトレンド傾斜成分の一期先予測値  $\Delta t_{n+1|n}$  に従って次のように定義される。

$$(4.1) \quad \psi_n = \begin{cases} 1 & \Delta t_{n+1|n} \geq 0 \\ -1 & \Delta t_{n+1|n} < 0. \end{cases}$$

ここで、式(2.5)(3.5)(3.22)から、 $\Delta t_{n+1|n}$  を第 2 要素として含む状態ベクトル  $x_n$  の一期先予測は

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad x_{n+1|n} &= \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^1 \Pr(S_{n+1} = k, S_n = j | \Psi_n) x_{n+1|n}^{(j,k)} \\
 &= \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^1 \Pr(S_{n+1} = k | S_n = j) \Pr(S_n = j | \Psi_n) F x_{n|n}^{(j)}.
 \end{aligned}$$

によって求められる。この MS-SC/ARCH 戦略は、テクニカル分析のトレンド追随型戦略の考え方に近く、トレンドとトレンド傾斜の推定と予測が本トレーディング戦略の重要要素となっている。

MS-SC/ARCH 戦略の収益性は、 $n$  期のトレーディング収益率  $\psi_n r_{n+1}$  と、累積トレーディ

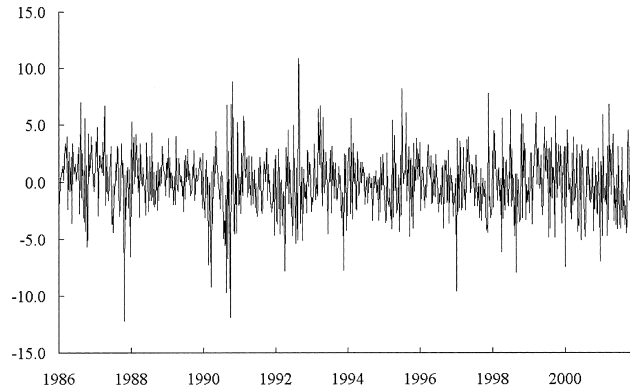


図 2. 東証株価指数( TOPIX )の対数収益率: 1986/1–2001/12.

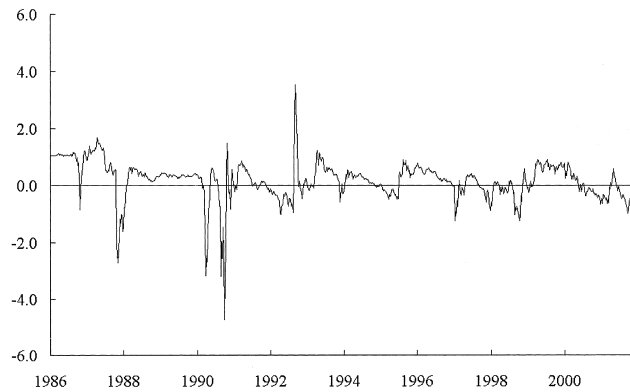


図 3. MS-SC/ARCH モデルによる  $\Delta t_{n|n}$ : 1986/1–2001/12.

ング収益率  $\sum_{n=1}^{N-1} \psi_n r_{n+1}$  によって評価される。ただし、 $r_{n+1}$  は  $n$  期から  $n+1$  期にかけての TOPIX ( $z_n$ ) の対数リターン  $r_{n+1} = \log(z_{n+1}) - \log(z_n)$  とする。

## 5. 実証分析

### 5.1 データ

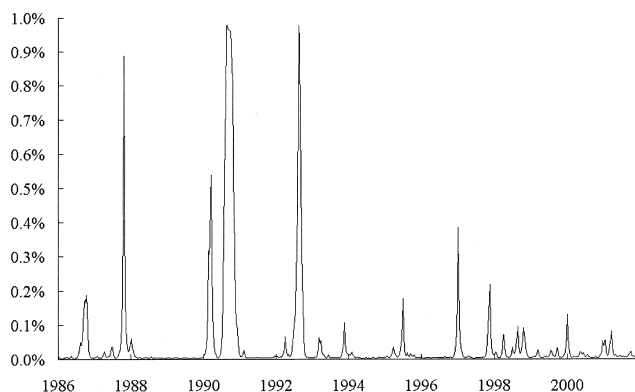
実証分析では、1986年1月から2001年12月までの週次の TOPIX を使用する。この全期間のサンプル数は 835 である。図 1 は TOPIX の原系列データ、図 2 は TOPIX の対数収益率系列である。以下の MS-SC/ARCH モデルのパラメータ推定のために、観測値  $y_n$  として TOPIX を対数変換し 100 倍した値を用いる。

### 5.2 推定結果

図 3 は推定されたトレンド傾斜のフィルタ  $\Delta t_{n|n}$  である。正あるいは負の同一方向へのトレンドがしばらくの間持続して現れていることが分かる。表 1 は全サンプル期間(1986/1–2001/12)の TOPIX データを使った MS-SC/ARCH モデルのパラメータ推定値と関連する統計量を示している。ただし、不均一分散を含む金融時系列データを取り扱う際には、特にその大きな変動

表 1. MS-SC/ARCH モデルのパラメータ推定 .

	MS-SC/ARCH		帰無仮説 $H_0^1$		帰無仮説 $H_0^2$	
	推定値	(標準誤差)	推定値	(標準誤差)	推定値	(標準誤差)
$\tau$	2.314	(0.125)	2.747	(0.078)	2.326	(0.079)
$\gamma_0$	0.039	(0.055)	0.000	(0.000)	0.036	(0.034)
$\gamma_1$	4.167	(3.909)	0.418	(0.540)		
$\alpha$	0.895	(0.115)	0.998	(0.014)	0.965	(0.048)
$p_{00}$	0.993	(0.005)	0.991	(0.010)	0.999	(0.000)
$p_{11}$	0.796	(0.125)	0.843	(0.111)	0.001	(0.013)
対数尤度	-1999.81		-2062.32		-2004.49	
尤度比統計量					9.35	
$p$ 値					0.002	
AIC	4011.63		4136.65		4018.98	

図 4. MS-SC/ARCH モデルによる  $S_n = 1$  の定常状態確率: 1986/1-2001/12.

をトレンド回りの変動として捉えるか、それともトレンド傾斜の変化として捉えるかによって、推定結果が変わる場合があることが考えられる。そこで、実際のパラメータおよびトレンド推定にあたっては、トレンド傾斜の取りうる範囲を現実的な既知の値として事前に設定することによって、より安定した結果を得ることが可能となる。本稿の実証分析では、1986-2001年の各年間についての TOPIX の高値と安値の対数変化率の範囲が  $[-1.78\%, 1.61\%]$  であることから、式(2.4)の白色雑音  $w_n$  の分散を  $v_1^2 = 2.00$  の所与として、未知パラメータ  $\theta = \{\tau^2, \sigma^2, p_{00}, p_{11}\}$  を最尤法によって推定している(全ての最尤推定値は GAUSS プログラムの OPTMUM プロシジャーを用いて計算されている。また、これらの最尤推定値および関連する標準誤差の計算には、数値微分が使われている。)

この推定結果から、次のことがわかる。トレンド成分  $t_n$  は、 $N(0, 2.314)$  の正規白色雑音をもつ時変ドリフト  $\Delta t_n$  付きのランダムウォークモデルに従う。トレンド成分  $t_n$  回りの変動  $\varepsilon_n$  は、ARCH 定数項  $0.039$  ( $S_n = 0$ ) と  $4.167$  ( $S_n = 1$ )、ARCH 係数  $0.895$  の 2 状態の ARCH 過程に従う。この ARCH 過程の推定値から、 $S_n = 0$  が“トレンド傾斜不変 - 低ボラティリティ状態”、 $S_n = 1$  が“トレンド傾斜変化 - 高ボラティリティ状態”をそれぞれが示していることが分かる。同一状態への状態遷移確率  $p_{00}$  と  $p_{11}$  はそれぞれ  $0.993$  と  $0.796$  であり、どちらの状態



もある程度の状態持続性を持っており、 $S_n = 0$ の方がよりその状態持続性が大きい。 $S_n = 0$ と $S_n = 1$ の期待状態持続期間は、それぞれ143.2週と4.9週となる。ただし、期待状態持続期間は、 $\frac{1}{1-p_{ij}}$ によって計算される。このことは $S_n = 1$ の定常状態確率の推移を示す図4からもはっきり分かる。また、サンプル期間の前半は、ボラティリティ増大を伴うトレンド傾斜の変化が多く起こっているのに対し、その後半はトレンド傾斜の変化が比較的緩やかになっていることが分かる。

次に、MS-SC/ARCHモデルにおいてマルコフ過程に従って状態遷移が起こっているか否かの検定を行う。マルコフ切り換えモデルの状態数の検定では、帰無仮説( $\gamma_0 = \gamma_1, v_1 = 0$ )のもとで $p_{00}$ と $p_{11}$ が同定できないことから、尤度比統計量の漸近分布が通常のカイ2乗分布に従わない。これらの問題に対処するために、Garcia(1998)、Hansen(1992, 1996)によって、グリッドサーチにもとづく検定方法が提案されているが、計算負担が大きくなってしまふ。したがって、本稿ではトレンド傾斜とボラティリティのどちらか一方だけが切り換わる次のような2つの帰無仮説についての仮説検定を行う。すなわち、ボラティリティのみが切り換わる( $\gamma_0 < \gamma_1$ )と仮定し、トレンド傾斜が切り換わらない場合の帰無仮説

$$(5.1) \quad H_0^1: v_1 = 0,$$

もう1つとして、反対にトレンド傾斜のみが切り換わる( $v_1 > 0$ )と仮定し、ボラティリティが切り換わらない場合の帰無仮説

$$(5.2) \quad H_0^2: \gamma_0 = \gamma_1,$$

をそれぞれ考える。これらの帰無仮説のもとでは、全てのパラメータは同定可能であり、尤度比統計量の漸近分布がカイ2乗分布に従う。表1は帰無仮説 $H_0^1$ モデルと $H_0^2$ モデルのパラメータ推定値と関連する統計量を示している。式(5.1)の帰無仮説 $H_0^1$ については、推定されるパラメータ数がMS-SC/ARCHモデルと同じであるために、対数尤度の値を直接比較することが可能であり、帰無仮説 $H_0^1$ についての対数尤度は-2062.32とMS-SC/ARCHモデルの-1999.81から悪化している。また、式(5.2)の帰無仮説 $H_0^2$ を検定するための尤度比統計量(自由度=1)の値は9.35となり、1%有意水準で帰無仮説 $H_0^2$ は棄却される結果となった。さらに、情報量基準AICによるモデル比較においても、MS-SC/ARCHモデルが最小AICモデルとして選択されている。

### 5.3 MS-SC/ARCH戦略の収益性

MS-SC/ARCH戦略の収益性検証のために、1986年1月から1991年12月(313サンプル)をフォーメーション期間として、未知パラメータ $\theta = \{\tau^2, \sigma^2, p_{00}, p_{11}\}$ の推定を行う(ただし、前節と同様に $v_1^2 = 2.00$ とする)。ここで、求められたパラメータ $\theta$ を所与として、1992年1月から2001年12月(522サンプル)のシミュレーション期間のTOPIXに、前節で説明したMS-SC/ARCH戦略を適用する。図5はパラメータ $\theta$ を所与として、第3節で説明したフィルタアルゴリズムによって得られたシミュレーション期間におけるトレンド傾斜成分の一期先予測値 $\Delta t_{n+1|n}$ の推移である。

表2はMS-SC/ARCH戦略と、次のようなMS-SC/ARCHモデルを単純化したモデルにもとづくトレーディング戦略を用いた場合のトレーディング収益率の統計量をまとめたものである。

- モデル1. ボラティリティを一定とした場合、
- モデル2. ボラティリティを切り換えない単純なARCHモデルで定式化した場合、
- モデル3. テンデント傾斜が常にランダムウォークに従って確率的に変動する場合。

MS-SC/ARCH戦略の累積トレーディング収益率は95.704%(平均: 0.183%)で、他の3つのモデ

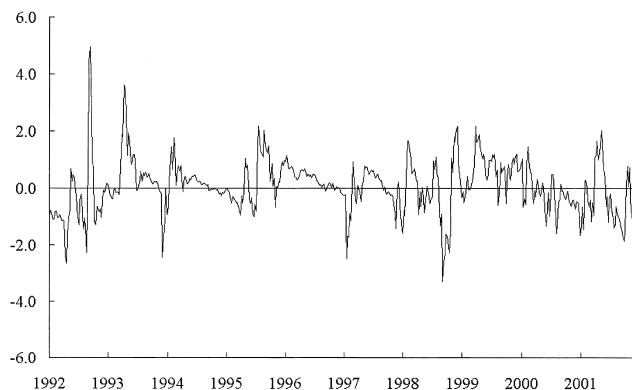


図 5. MS-SC/ARCH モデルによる  $\Delta t_n|n-1$ : 1992/1-2001/12.

表 2. トレーディング収益率の基本統計量 .

	MS-SC/ARCH	モデル 1	モデル 2	モデル 3
累積	95.704	57.728	70.266	64.069
平均	0.183	0.111	0.135	0.123
標準偏差	2.681	2.685	2.684	2.684
歪度	-0.092	-0.321	-0.049	-0.074
尖度	0.924	0.947	0.905	0.908
下側 1%点	-6.311	-7.289	-6.311	-6.311
下側 5%点	-4.043	-4.323	-4.254	-4.323

ル戦略の累積トレーディング収益率(モデル 1=57.728%(平均: 0.111%), モデル 2=70.266%(平均: 0.135%), モデル 3=64.069%(平均: 0.123%))よりも大きな値となっている。また, それぞれの戦略のトレーディング収益率分布の下側 1%, 5%点を見ると, MS-SC/ARCH 戦略は他のモデル戦略よりもいずれの分位点においてもマイナス幅は同じか小さくなっている。したがって, この分位点比較は MS-SC/ARCH 戦略が相対的により大きな損失を被る可能性が低いことを示唆している。ここで, 所与とした  $v_1^2 = 2.00$  の値を変えた場合, トレーディング収益率への影響があるか否かを簡単に見ておく。  $v_1^2 = 1.00$  と  $v_1^2 = 3.00$  を所与とした MS-SC/ARCH 戦略の累積トレーディング収益率は, それぞれ 82.83%(平均: 0.159%), 76.25%(平均: 0.146%) となった。これらは上述の MS-SC/ARCH モデルを単純化したモデル 1-3 の結果をいずれも上回っており,  $v_1^2$  の値の設定に依存して, MS-SC/ARCH 戦略の収益性が大きく影響を受けているようなことはないと考えられる。

図 6 は代表的なテクニカル分析である移動平均法を使ったトレーディング戦略(以下, 移動平均戦略)との収益性の比較を行ったものである。ここで,  $z_n$  を  $n$  期の TOPIX,  $m$  を移動平均期間とした場合,  $m$  期間移動平均戦略にもとづく  $n$  期の売買シグナルは

$$(5.3) \quad \psi_n^m = \begin{cases} 1 & z_n \geq \frac{\sum_{i=0}^{m-1} z_{n-i}}{m}, \\ -1 & z_n < \frac{\sum_{i=0}^{m-1} z_{n-i}}{m}. \end{cases}$$

(5.4)

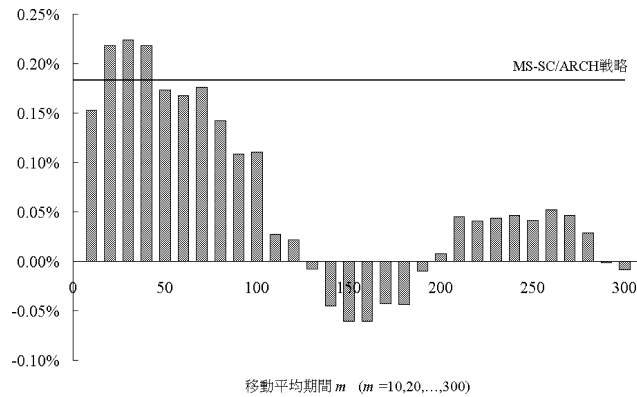


図 6. m 期間移動平均戦略による平均トレーディング収益率: 1992/1–2001/12.

表 3. MS-SC/ARCH 戦略の収益性評価 .

年	年間累積 トレーディング収益率 (%)	売買頻度
1992	28.57	5
1993	20.16	5
1994	-2.04	6
1995	23.13	5
1996	-1.16	5
1997	15.18	10
1998	-3.14	10
1999	16.69	7
2000	-17.49	11
2001	15.79	6
全期間	95.70	70

と定義される．図 6 の同じシミュレーション期間による平均トレーディング収益率の比較からも分かる通り，移動平均戦略は移動平均期間の設定によってその収益性が大きく左右される傾向があり，ときにはマイナスになることもある．横線で示された MS-SC/ARCH 戦略の平均トレーディング収益率の水準は，移動平均期間  $m = 20, 30, 40$  の移動平均戦略には劣るものの，アウトサンプル期間のシミュレーションにもかかわらず，全ての移動平均期間 ( $m = 10, 20, \dots, 290, 300$ ) の平均トレーディング収益率の中では，その収益性は相対的に高位にあると言える．

表 3 は MS-SC/ARCH 戦略の年毎の収益率と売買頻度を示している．2000 年の収益率悪化はあるものの，それ以外のシミュレーション期間については，大きくマイナスに収益率が振れることもなく安定したパフォーマンスを上げていると言える．図 7 に示した MS-SC/ARCH 戦略の累積収益率の推移を見ても，期間を通して右肩上がりを示している．売買頻度についても，同一ポジション持続期間は平均 7.46 週間となっており，ランダムウォークモデルに見られるような売買頻度の増大が避けられ，実務面からも現実的な戦略となっている．

以上のような収益性検証のためのアウトサンプル・シミュレーションのトレーディング戦略比較によっても分かる通り，“トレーディング”の観点から，MS-SC/ARCH モデルはトレンド



図7. MS-SC/ARCH 戦略による累積トレーディング収益率: 1992/1-2001/12.

傾斜の推定と予測に成功し、モデルにもとづく MS-SC/ARCH 戦略は TOPIX のトレーディング戦略として有効な方法であると言える。

## 6. あとがき

本稿では、1 階-2 状態のマルコフ過程に従ってトレンド傾斜とトレンド回りの変動である ARCH 過程が切り換わる MS-SC/ARCH モデルを提案した。この MS-SC/ARCH モデルは、しばらくの間、一定の傾斜を持つトレンドが持続するような時系列のトレンドとトレンド傾斜の推定に適している。実証分析では、TOPIX を用いて実際のトレーディング戦略のツールとして、MS-SC/ARCH モデルによって求められたトレンド傾斜が、トレーディング戦略の収益性の観点から有効であるという結果を得た。

## 謝 辞

本稿執筆にあたり、重要な助言をして頂いた査読者の皆様、統計数理研究所の北川源四郎教授に深く感謝します。

## 参 考 文 献

- Albert, J. and Chib, S. (1993). Bayes inference via Gibbs sampling of autoregressive time series subject to Markov mean and variance shifts, *J. Bus. Econom. Statist.*, **11**, 1-15.
- Cai, J. (1994). A Markov model of switching-regime ARCH, *J. Bus. Econom. Statist.*, **12**, 309-316.
- Garcia, R. (1998). Asymptotic null distribution of the likelihood ratio statistics, *Internat. Econom. Rev.*, **39**, 763-788.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *J. Econometrics*, **57**, 357-384.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Hamilton, J. D. and Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroscedasticity and changes in regime, *J. Econometrics*, **64**, 307-333.
- Hansen, B. E. (1992). The likelihood ratio test under nonstandard conditions: Testing the Markov

- switching model of GNP, *Journal of Applied Econometrics*, **7**, S61–S82.
- Hansen, B. E. (1996). Inference when a nuisance parameter is not identified under the null hypothesis, *Econometrica*, **64**, 413–430.
- Harrison, P. J. and Stevens, C. F. (1976). Bayesian forecasting, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **38**, 205–247.
- Harvey, A. C. and Todd, P. H. J. (1983). Forecasting economic time series with structural and Box-Jenkins models: A case study, *J. Bus. Econom. Statist.*, **1**, 299–315.
- Harvey, A., Ruiz, E. and Sentana, E. (1992). Unobserved component time series models with ARCH disturbances, *J. Econometrics*, **52**, 129–157.
- Kim, C. J. (1994). Dynamic linear models with Markov-switching, *J. Econometrics*, **60**, 1–22.
- Kim, C. J. and Nelson, C. R. (1999). *State-space Models with Regime Switching*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 1032–1063.
- Kitagawa, G. (1994). The two-filter formula for smoothing and an implementation of the Gaussian-sum smoother, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **46**, 605–623.
- Kitagawa, G. and Gersch, W. (1996). *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, Springer, New York.
- Murphy, J. J. (1986). *Technical Analysis of the Futures Markets*, New York Institute of Finance, New York.
- Taylor, M. P. (1992). The use of technical analysis in the foreign exchange market, *Journal of International Money and Finance*, **11**, 304–314.

## Trading Strategy of TOPIX by Using Markov Switching Stochastic Trend Model

Morikazu Hakamata

(Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies)

This paper focuses on two characteristics of financial asset price movement: trend slope change and heteroscedasticity. To capture these characteristics, we propose a stochastic trend model with Markov switching slope change and ARCH (MS-SC/ARCH), and evaluate the usefulness of the MS-SC/ARCH model for the trading strategy. This model consists of a no-slope change and low volatility regime, and a slope change and high volatility regime. The time series shifts between two regimes according to the first-order Markov switching process. In the empirical analysis using TOPIX, we estimate of the effective trend slope for trading, and obtain superior performance over some other trading strategies by using the trading strategy based on the MS-SC/ARCH model.