

銘柄間の価格連動性を考慮した社債価格モデル に基づく信用リスク情報の推定 ——倒産確率の期間構造と回収率の推定——

津田 博史[†]

(受付 2002 年 2 月 27 日; 改訂 2002 年 5 月 28 日)

要 旨

今日、上場企業の倒産が増え、信用リスク(credit risk)が顕在化しつつある。企業が資金の調達のために発行した社債の市場価格には、信用リスクが反映されてきている。本稿では、普通社債の価格に焦点を当て、新しい社債価格モデルを提案し、それを社債価格データに適用して、格付け毎の倒産確率のインプライドな期間構造、期待損失額の推定や価格モデルとしての有効性を示す。本稿で説明する社債価格モデルは、社債価格の変動を把握するための実践的方法として、統計的モデル・アプローチに基づいたものである。統計的モデル・アプローチは、ファイナンス理論を基礎としつつも、現実に観察される現象(金融資産の価格変動)の特性を客観的に把握し、そして、その観察・把握した結果と整合的な計量モデルを推定し、その計量モデルを通して理論的類推・説明を行うといった帰納的な推論方法を意味する。この社債価格モデルを通して、格付け毎の回収率や同じ格付け内の業種毎の倒産確率の期間構造を推定することができる。実際の社債価格データにモデルを適用することで、倒産確率の期間構造に関して有意義な知見が得られた。

キーワード：社債、確率的割引関数、期待損失額、倒産確率の期間構造、一般化最小 2 乗法。

1. はじめに

2001 年 9 月経営破綻により大手スーパー、マイカルの社債約 3,500 億円が債務不履行(デフォルト)に陥った。わが国で日本企業が発行した社債のデフォルトでは、最大規模となった。このように最近では、バブル崩壊に続く戦後最大の不況の中、企業の信用リスク(credit risk)が顕在化しつつある。金融機関において信用リスクが改めて認識され、信用リスク管理能力の強化を図ることが喫緊の課題となっている。その解決策として、数値による客観的評価が可能という観点から、数学的モデルや統計的モデル・分析方法に基づく金融工学が信用リスク領域においても発展してきている。

信用リスクは、基本的に契約が約定どおり実行されないリスクである。社債の信用リスクは、利子延滞や元本の返済不能である。従って、社債の市場価格には、信用リスクが反映される。最近においては社債価格をモデル化する上で、「金利」のデリバティブとしてモデル化される

[†] ニッセイ基礎研究所 金融研究部門：〒100-0006 東京都千代田区有楽町 1-1-1

場合が多い。この背景としては、市場が完全・完備性が成立する理想的な状況を前提にするものの、数学的に理論展開しやすく、また、実際のマネー市場との関係から、金利基準での把握の仕方が一般化しているためである。

しかしながら、実際に債券市場で存在しているのは価格であり、また、社債市場は、そのような理想的な状況ではなく、市場における社債価格をモデル化するには、ファイナンス理論を基礎としつつも現実的な対応が必要となる。実務世界で指摘されるように、実際の現象から乖離したモデルは、机上の空論となる。つまり、Mark to the reality に沿った価格モデルが必要とされる。

そこで、社債価格の変動を把握するための実践的方法として、統計的モデル・アプローチ (Financial Econometric Method と呼ばれる) が重要であると考えられる。統計的モデル・アプローチは、ファイナンス理論を基礎としつつも、現実に観察される現象(金融資産の価格変動)の特性を客観的に把握し、そして、その観察・把握した結果と整合的な計量モデルを推定し、その計量モデルを通して理論的類推・説明を行うといった帰納的な推論方法を意味している。

一般に金融資産の価格変動は、複雑かつ確率的な現象と考えられるが、計量分析によりそれらの特性を完全に把握することは困難であり、実際に適用する計量モデルも近似的なものとならざるを得ないが、近似的なモデルであっても、有意義な情報や、さらに利益を獲得する可能性が得られるのである。

そこで、本稿では、株価が低迷する中、企業の貴重な資金調達手段として、ここ数年、発行額が増大しているとともに、投資家の投資対象資産として重要性が高まってきている社債に焦点を当て、統計的モデル・アプローチを基礎とした新しい社債価格モデルを提案し、そして、それを現実の社債価格データに適用して、市場でインプライドされている倒産確率の期間構造の推定や価格モデルとしての有効性を実証的に示す。なお、本稿では、社債の中で転換社債、新株引受権付社債、変動利付き債券などを対象としていない。

2. 債券とは

債券とは、発行者が資金を調達するために発行する有価証券であり、その発行者のタイプにより種類が分かれている。すなわち、一般に国内で発行されている債券は、公共体等が発行する公共債、民間企業が発行する民間債、そして、外国政府や外国機関が発行する国外債に大きく分類される。さらに、公共債は国債、地方債、政府機関債に、民間債は金融債、普通社債、転換社債、新株引受権付社債などに分類される。2001年12月末には、公社債合計で約664兆円の債券残高(現存額)があったが、その内訳は、公共債が7割で、特にその中でも国債が約9割を占めている。普通社債の発行残高は、2001年12月末時点で国債と比べて約8分の1程度であるが、バブル崩壊以後の株価の低迷や超低金利、規制緩和を背景に、社債の発行が増大してきている。

3. 債券価格

3.1 伝統的な債券価格モデル

一般に債券は、一定の期間間隔で事前に定めた利息(クーポンと呼ばれる)、及び、償還時点で元本(額面金額100円)を支払うことを約束した債務証書である。そして、債券は、クーポンの有無で割引債と利付債に分かれる。いま、現時点を t とし、第 i 債券のキャッシュ・フローの発生する時点は、銘柄 i に依存するが、それらを

$$(3.1) \quad (t <) \quad t_{i1} < t_{i2} < \dots < t_{iM(i)}$$

とし、各キャッシュ・フローの発生する時点を現時点 t からみた期間で、

$$(3.2) \quad s_{ij} = t_{ij} - t \quad (j = 0, \dots, M(i)), \quad t_{i0} = t, \quad s_{i0} = 0$$

のように表現する．ここで $t_{iM(i)} = t + s_{iM(i)}$ は第 i 債券の満期時点であり、 $s_{iM(i)}$ は、現時点 t からみた償還期間となる．年 2 回クーポン c が支払われる第 i 利付債の場合、各キャッシュ・フローは、

$$(3.3) \quad C_i(s_{i1}) = C_i(s_{i2}) = \dots = C_i(s_{iM(i)-1}) = 0.5c, \quad C_i(s_{iM(i)}) = 100 + 0.5c$$

である．債券価格モデルの基本的な概念は、将来時点で発生する各キャッシュ・フロー $C_i(s_{ij})$ をその期間に対応した割引率で割り引いた現在価値の合計として価格評価する、キャッシュ・フロー割引関数型モデルである．従って、 t 時点における i 銘柄の債券の理論価格モデルを求めるには、将来の各期間 s_{ij} で発生するクーポンなどのキャッシュ・フロー $C_i(s_{ij})$ に対する割引率のモデル、つまり、割引関数モデルが必要である．これまで、数多くの割引関数モデルが提唱されてきているが、従来のモデルの基本的な考え方は、 s_{ij} 年後に発生するキャッシュ・フローは、銘柄 i によらず市場共通の確定的な割引率 $D^*(s_{ij})$ で割り引かれると定義されている．すなわち、従来のアプローチでは、将来の $t + s_{ij}$ 時点におけるすべての債券に共通な非確率的割引率の割引関数を想定し、現時点 t における第 i 債券の理論的債券価格 $P_i^*(0)$ を、

$$(3.4) \quad \begin{aligned} P_i^*(0) &= C_i(s_{i1})D^*(s_{i1}) + \dots + C_i(s_{iM(i)})D^*(s_{iM(i)}) \\ &= \sum_{j=1}^{M(i)} C_i(s_{ij})D^*(s_{ij}) \end{aligned}$$

で表す．また、割引率 $D^*(s_{ij})$ は、非確率的スポット・レート $r(s_{ij})$ を用いて、

$$(3.5) \quad D^*(s_{ij}) = (1 + r(s_{ij}))^{-s_{ij}} \approx \exp(-s_{ij}r(s_{ij}))$$

である．実際の第 i 債券価格 $P_i(0)$ の変動を説明するために、式 (3.4) に誤差項 ε_i を加えて、

$$(3.6) \quad P_i(0) = \sum_{j=1}^{M(i)} C_i(s_{ij})D^*(s_{ij}) + \varepsilon_i$$

と表現し、 N 個の価格データから N 個の銘柄に共通な割引関数 $D^*(s)$ を推定していた．誤差項 ε_i は多くの場合、

1. $E(\varepsilon_i) = 0$
2. $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$
3. ε_i と ε_u は無相関: $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_u) = 0$

といった最小 2 乗法の標準条件を仮定する．この条件のもとでは、 N 個の銘柄の債券価格は、その期待価格が同じである限り、2 次モーメントまでの確率変動は同じである．そしてまた、 N 個の銘柄の債券価格は、償還期間やクーポン・レートなど様々な銘柄属性の影響を受けずに、銘柄間で独立に変動することを意味している．

しかし、実際に観察される市場価格は、償還期間に近い銘柄間ほど価格連動性が高い．また、仮に信用リスクが非常に小さくても、社債よりも国債の価格の方が通常高くなる．投資家の銘柄選好の背景には、信用リスクのみならず市場の流動性とも関係がある．すなわち、投資家は必ずしも満期まで保有するのではなく、途中で売却する際の換金容易性としての流動性も銘柄選好の理由となる．ALM の観点から、投資期間に対応した償還期間の債券が選好対象となること

が多い。現実の世界では、各投資家の投資スタンス、投資期間、予想方法は、極めて多様であり、多くの銘柄が存在し、外的環境の変化は不確実性を伴う。従って、将来の $t + s_{ij}$ 時点で発生するキャッシュ・フローの割引率は不確実であり、割引率自体が確率的であると考えられる。

3.2 割引率が確率的な債券価格モデル

社債は、通常の国債と比べ、信用リスク(デフォルトの可能性)があることにより、将来に発生するキャッシュ・フローが不確実である点で大きく異なる。社債の市場価格には、利子延滞や元本の返済不能などのデフォルトリスクが反映される。同じクーポンと償還期間をもつ国債と社債の相違点は、金融商品としては信用リスクのみであるが、実際の市場価格には、信用リスク以外に流動性リスク(取引量により価格が影響されるリスク)やその他の要因によるリスクが反映される。

まず、信用リスクの無い国債などの債券価格モデルについて定式化する。債券を将来の特定時点で一定のキャッシュ・フローをもたらす証券と考える。 t 時点の市場では N 銘柄取引されており、 t 時点を現在時点と考える。この時、第 i 債券について t 時点で観測できる要素は、

1. t 時点の第 i 債券の市場価格: $P_i(0)$
2. クーポン、償還時の額面単価を含めたキャッシュ・フロー関数(キャッシュ・フローの発生時点を、期間の関数と考える): C_i
3. クーポン・レート、償還期間などの銘柄属性: $Z_i = \{z_{iv} : v = 1, \dots, q\}$

である。第 i 債券の t 時点での価格変動構造を表すために、割引関数 $D(s)$ の確率過程のモデルを仮定する必要がある。特に、長期国債のような利付債に対する割引関数モデルを定式化する場合、銘柄ごとにキャッシュ・フローの発生時点が異なる点を考慮する必要がある。それを明確に示すために、 t 時点からみた第 i 債券の第 j キャッシュ・フローの発生時点を(3.2)式で示したように、

$$(3.7) \quad s_{ij} = t_{ij} - t \quad (j = 1, \dots, M(i) : i = 1, \dots, N)$$

と表現する。そして、分析対象の N 銘柄すべてのキャッシュ・フローの発生時点をまとめて小さい順に並べたものを、

$$(3.8) \quad s_{a1} < s_{a2} < \dots < s_{aM}, \quad s_{aM} = \max\{s_{1M(1)}, \dots, s_{NM(N)}\}$$

で示す。ここで、 s_{am} の a は、 N 銘柄すべてのキャッシュ・フローの発生時点を表す。第 i 債券の $t + s_{am}$ 時点で発生するキャッシュ・フローは、

$$(3.9) \quad C_i(s_{am}) \quad (m = 1, \dots, M : i = 1, \dots, N)$$

で表現されるが、 $t + s_{am} = t + s_{ij}$ 時点以外では $C_i(s_{am}) = 0$ となる。この $0 \leq s \leq s_{aM}$ で定義されたキャッシュ・フロー関数 $C_i(s)$ の中に、償還時点の額面 100 円も含まれていると仮定する。第 i 債券の t 時点の市場価格 $P_i(0)$ は、既に述べたように基本的には将来のキャッシュ・フローを現在価値に評価するキャッシュ・フロー割引関数型モデル

$$(3.10) \quad P_i(0) = \sum_{m=1}^M C_i(s_{am})D(s_{am})$$

であるが、実際の市場価格は、様々な要因によって変動し、確率変数の実現値とみなされる。従って、信用リスクのない将来のキャッシュ・フロー $C_i(s_{am})$ が確定的な国債などの債券を考える場合、確率変数である市場価格との関係で、割引率が確率変数と考えられる。すなわち、市

場価格の実現は、その背後にある確率的な割引率 $D(s_{am})$ の実現と同等である。しかし (3.10) 式の左辺の確率変数である債券価格は、1 個に対して右辺には将来のキャッシュ・フローに対応して割引率が M 個あり、債券価格と割引率は、1 対 1 対応していない。従って、債券価格に対して割引関数 $D(s)$ の確率過程が対応する。

$$(3.11) \quad \mathcal{D} = \{D(s) : 0 \leq s \leq s_{aM}\}$$

を考え、 $D(s_{am})$ は、この確率過程の $s = s_{am} (m = 1, \dots, M)$ に対応した値となる。すなわち、債券価格が市場で実現することは、割引関数の確率過程の 1 つのパスが実現したとみる。従って、第 i 債券の t 時点での価格変動構造を推定するには、割引率を期間の関数と考えた割引関数の確率過程を表した割引関数モデルが必要である。

そこで、第 i 債券の t 時点の市場価格 $P_i(0)$ は、(3.10) 式より、

$$(3.12) \quad \begin{aligned} P_i(0) &= C_i' D \\ &= C_i' \bar{D} + C_i' (D - \bar{D}) \\ &= C_i' \bar{D} + C_i' \Delta \\ &= C_i' \bar{D} + \eta_i \end{aligned}$$

と表現する。但し、

$$(3.13) \quad C_i = (C_i(s_{a1}), \dots, C_i(s_{aM}))', \quad D = (D(s_{a1}), \dots, D(s_{aM}))'$$

である。ここで、

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \bar{D} &= E(D) = (E[D(s_{a1})], \dots, E[D(s_{aM})])' \\ &= (\bar{D}(s_{a1}), \dots, \bar{D}(s_{aM}))', \end{aligned}$$

$$(3.15) \quad \eta_i = C_i' \Delta,$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \Delta &= D - \bar{D} \\ &= (D(s_{a1}) - \bar{D}(s_{a1}), \dots, D(s_{aM}) - \bar{D}(s_{aM}))' \\ &= (\Delta(s_{a1}), \dots, \Delta(s_{aM}))' \end{aligned}$$

である。(3.12) 式の η_i は、市場価格 $P_i(0)$ において確率的割引率に関する部分である。市場価格 $P_i(0)$ の実現値は、0 から s_{aM} 期間の割引関数のパスが実現したことに対応する。ここで、 $\Delta(s) : 0 \leq s \leq s_{aM}$ は、確率的割引関数 $D(s)$ の平均 $\bar{D}(s)$ からの乖離部分、すなわち、割引関数の確率的部分であり、 $\Delta(s_{am})$ は、 $s = s_{am} (m = 1, \dots, M)$ に対応した値である。

平均割引関数 $\bar{D}(s)$ として、McCulloch (1971, 1975) や Elton and Gruber (1981) のように多項式や指数スプライン関数などを仮定できるが、本稿では、平均割引関数として、以下を仮定する。

$$(3.17) \quad \bar{D}(s) = 1 + \sum_{j=1}^P \delta_j s^j$$

ここで、未知パラメータ δ_j は、銘柄全てに対して共通である。なお、Kariya and Tsuda (1994) では、割引率が個別銘柄の属性 z_{iv} に依存して異なる、すなわち、 $D(s) \rightarrow D_i(s)$ と考え、平均

割引関数として,

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \bar{D}_i(s) &= 1 + \sum_{j=1}^p \delta_j(z_i) s^j \quad (i = 1, \dots, N), \\ \delta_j(z_i) &= \delta_{j0} + \delta_{j1} z_{i1} + \dots + \delta_{jq} z_{iq} \quad (j = 1, \dots, p) \end{aligned}$$

を仮定している. ここで, p 次の多項式の係数は, q 個の銘柄属性に依存する関数である.

次に, 割引関数 $D(s)$ の確率部分に係数 η_i の価格変動の定式化にあたって, 現実に観察される次のような債券価格変動特性を考慮している.

1. 償還期間 $s_{iM(i)}$ が短くなると債券価格 $P_i(0)$ の変動が小さくなること.
2. 銘柄間の償還期間差が小さいものほど連動性が高いこと.

つまり, 各銘柄の η_i の分散が償還時点に近づくにつれて小さくなること, また, 各銘柄間の償還期間差が大きいものほど, η_i の連動性が低くなることを考慮している. 具体的には, η_i に対して, 次の分散共分散構造を仮定する.

$$(3.19) \quad \text{Cov}(\eta_i, \eta_u) = \sigma_A^2 \mathbf{A} = \sigma_A^2 a_{iu} \mathbf{C}'_i \Phi_{iu} \mathbf{C}_u$$

ここで, a_{iu} に関して,

$$(3.20) \quad \begin{aligned} a_{iu} &= s_{M(i)} \quad (i = u) \\ &= \rho \min(s_{M(i)}, s_{M(u)}) \exp(-|s_{M(i)} - s_{M(u)}|) \quad (i \neq u) \end{aligned}$$

を仮定する. また, キャッシュ・フローが発生する 2 時点間に関して, 期間が長いほど割引関数の相関が小さくなるように, Φ_{iu} に関して次式を仮定する.

$$(3.21) \quad \Phi_{iu} = (\phi_{iu-jr}) = (\exp(-|s_{aj} - s_{ar}|))$$

ここで, ϕ_{iu-jr} は, $t + s_{aj}$ と $t + s_{ar}$ 時点に発生するキャッシュ・フローを割り引く割引率の共分散に対応する.

3.3 信用リスクの有る社債価格モデル

次に, 利子延滞や元本の返済不能など将来に発生するキャッシュ・フローに不確実性がある, すなわち, 信用リスクがある社債の価格モデルを定式化する. 我が国では, 現時点では割引社債は存在せず, すべて利付債である (3.12) で示した債券価格モデルは, 将来に発生するキャッシュ・フローが確定的であったのに対し, 社債価格モデルでは割引率と同様にキャッシュ・フローも確率変数となる. 企業が発行した第 i 社債の現時点 t からみた将来の第 j キャッシュ・フロー発生時点, すなわち, $t + s_{ij}$ 時点までに倒産する確率 (倒産確率) は, 発行企業の格付け k に依存するとして,

$$(3.22) \quad h_i(s_{ij}; k) \quad (k = 1, \dots, K)$$

とし, 第 i 社債の発行企業が $t + s_{ij-1}$ 時点と $t + s_{ij}$ 時点の間に倒産した場合, 元本の回収は $t + s_{ij}$ 時点で行われると仮定する. 回収率 $\gamma(k(i))$ は, 将来の回収時点 $t + s_{ij}$ や同じ格付けでも企業が違えば異なると考えられるが, ここでは企業の格付 k にも依存すると仮定する.

従って, k 格付の第 i 企業発行の社債のキャッシュ・フロー関数 $\tilde{C}_i(s_{ij})$ は,

$$(3.23) \quad \tilde{C}_i(s_{ij}) = C_i(s_{ij})[1 - h_i(s_{ij})] + 100\gamma(k(i))[h_i(s_{ij}) - h_i(s_{ij-1})]$$

となる．上式の第 1 項の $[1 - h_i(s_{ij})]$ は， $t + s_{ij}$ 時点までにこの企業が倒産しない確率であり，第 2 項の $[h_i(s_{ij}) - h_i(s_{ij-1})]$ は，この企業が $t + s_{ij-1}$ 時点と $t + s_{ij}$ 時点の間に倒産する確率である．この式を以下のように，将来に発生するキャッシュ・フローが確定的である部分 $C_i(s_{ij})$ と期待損失額 $L_i(s_{ij})$ の部分に分離した形に変形すると，

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_i(s_{ij}) &= C_i(s_{ij}) - \{C_i(s_{ij})h_i(s_{ij}) - 100\gamma(k(i))[h_i(s_{ij}) - h_i(s_{ij-1})]\} \\
 (3.24) \quad &= C_i(s_{ij}) - L_i(s_{ij}) \\
 L_i(s_{ij}) &= C_i(s_{ij})h_i(s_{ij}) - 100\gamma(k(i))[h_i(s_{ij}) - h_i(s_{ij-1})]
 \end{aligned}$$

となる．社債発行企業の倒産生起プロセス，回収率プロセス，割引率プロセスはそれぞれ独立とし (3.8) 式と同様に分析対象の N 銘柄すべてのキャッシュ・フロー発生時点を考慮して，各キャッシュ・フロー関数 $\tilde{C}_i(s), C_i(s)$ ，期待損失額 $L_i(s)$ ，割引率 $D(s)$ を $0 \leq s \leq s_{am}$ で定義された関数とする．従って，信用リスクの有る第 i 社債の t 時点の市場価格 $P_i(0)$ は，

$$(3.25) \quad P_i(0) = \sum_{m=1}^M \tilde{C}_i(s_{am})D(s_{am})$$

と表現できる．但し， $s_{am} = s_{ij}$ のとき以外は，キャッシュ・フロー関数 $\tilde{C}_i(s_{am}) = 0$ である．(3.25) 式から (3.12) 式に対応して，信用リスクの有る第 i 社債の t 時点での市場価格 $P_i(0)$ は，

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad P_i(0) &= \tilde{C}'_i D \\
 &= C'_i D - L'_i D \\
 &= C'_i(\bar{D} + \Delta) - L'_i(\bar{D} + \Delta) \\
 &= C'_i \bar{D} + \eta_i - L'_i \bar{D} - \omega_i
 \end{aligned}$$

と表現される．但し，

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad \tilde{C}_i &= (\tilde{C}_i(s_{a1}), \dots, \tilde{C}_i(s_{am}))', \quad L_i = (L_i(s_{a1}), \dots, L_i(s_{am}))', \\
 C_i &= (C_i(s_{a1}), \dots, C_i(s_{am}))', \quad D = (D(s_{a1}), \dots, D(s_{am}))'
 \end{aligned}$$

である．ここで， $\bar{D} = E(D)$ ， $\eta_i = C'_i \Delta$ ， $\omega_i = L'_i \Delta$ ， $\Delta = D - \bar{D}$ である (3.26) 式の平均割引関数 $\bar{D}(s)$ は (3.17) 式を仮定し，確定的キャッシュ・フロー $C_i(s_{am})$ に関する η_i の価格変動の分散共分散構造は (3.19) 式で定式化されるが，期待損失額 $L_i(s_{am})$ に関する ω_i の分散共分散構造の定式化にあたっては，

1. 償還期間 $s_{iM(i)}$ が短くなると期待損失額 L_i の変動が小さくなること，
2. 銘柄間の償還期間差が小さいものほど連動性が高いこと，

を仮定する．つまり，各銘柄の ω_i の分散が償還時点に近づくにつれて小さくなること，また，各銘柄間の償還期間差が大きいものほど， ω_i の連動性が低くなることを考慮している．具体的には， ω_i に対して，次の分散共分散構造を仮定する．

$$(3.28) \quad \text{Cov}(\omega_i, \omega_u) = \sigma_B^2 b_{iu} L'_i \Phi_{iu} L_u = \sigma_B^2 B$$

ここで， b_{iu} に関して，

$$\begin{aligned}
 (3.29) \quad b_{iu} &= s_{M(i)} \quad (i = u) \\
 &= \rho^* \min(s_{M(i)}, s_{M(u)}) \exp(-|s_{M(i)} - s_{M(u)}|) \quad (i \neq u)
 \end{aligned}$$

を仮定する．また，期待損失額の 2 時点間に関して，期間が長いほど割引関数の相関が小さくなるように， Φ_{iu} に関して次式を仮定する．

$$(3.30) \quad \Phi_{iu} = (\phi_{iu \cdot jr}) = (\exp(-|s_{aj} - s_{ar}|))$$

ここで， $\phi_{iu \cdot jr}$ は， s_{aj} と s_{ar} 時点間の期待損失額を割引く割引率の共分散に対応する (3.28) 式の定式化で重要な点は，倒産確率が小さくなるにつれて，期待損失額が小さくなり，信用リスクがない債券の価格変動に近づく構造となっていることと，同一企業が発行した債券でも償還期間が長い長期債の方がより大きな分散をもつという構造が自然に導入されている点である．なお， η_i と ω_i の共分散は， $\text{Cov}(\eta_i, \omega_i) = 0$ を仮定する．

わが国では社債を発行している企業の倒産件数が現時点では少なく，倒産確率をデータとして直接入手できないため，倒産確率を得るには何らかの倒産確率を表現したモデルを考える必要がある．ここでは，同じ格付けの企業でも，業種，財務体質により倒産確率が異なることから，企業が t 時点から s_{ij} 期間内に倒産する確率を定式化するにあたり，社債発行企業の業種や財務指標，格付けなどの属性 z_{iv} を考慮した関数として，以下の p 次の多項式を考える．

$$(3.31) \quad \begin{aligned} h_i(s) &= \zeta_1(z_i)s + \cdots + \zeta_p(z_i)s^p \quad (i = 1, \dots, N), \\ \zeta_l(z_i) &= \zeta_{l1}z_{i1} + \cdots + \zeta_{lq}z_{iq} \quad (l = 1, \dots, p). \end{aligned}$$

(3.31) 式の未知パラメータ $\zeta_{11}, \dots, \zeta_{lq}$ は，銘柄すべてに対して共通である．以上の定式化により，社債価格モデルは (3.26) 式から

$$(3.32) \quad P_i(0) = C'_i \bar{D} - L'_i \bar{D} + \varepsilon_i$$

と表現される．ここで， $\varepsilon_i = \eta_i - \omega_i$ である．社債価格の確率の変動部分の平均と分散共分散は，

$$(3.33) \quad E(\varepsilon_i) = 0, \quad \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_u) = \sigma^2(A + B) = \sigma^2 \Sigma$$

である (3.32) 式と (3.33) 式で表現された社債価格モデルを SCBCSM (Straight Coupon Bond Cross-Sectional Market) モデルと呼ぶことにする．

4. モデルのパラメータの推定

4.1 平均割引関数の推定方法

(3.32) 式の SCBCSM モデルを求めるには，まず，信用リスクが無い将来に発生するキャッシュ・フローが確定的である債券の価格データから (3.17) 式の平均割引関数 $\bar{D}(s)$ を求める必要がある (3.12) 式の将来に発生するキャッシュ・フローが確定的である債券価格モデルは，次式のように，

$$(4.1) \quad y = X\beta + \eta$$

と表現できる．ここで，

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y &= (y_1, \dots, y_N)', \quad y_i = P_i(0) - \sum_{m=1}^M C_i(s_{am}), \quad \beta = (\delta_1, \dots, \delta_p), \\ X &= (x_1, \dots, x_N)', \quad x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})', \quad x_{ir} = \sum_{m=1}^M s_{am}^r C_i(s_{am}), \\ \eta &= (\eta_1, \dots, \eta_N)', \quad \text{Cov}(\eta) = \sigma_A^2 A \end{aligned}$$

である。この時、

$$(4.3) \quad (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{A}(\rho)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

を $\boldsymbol{\beta}$ と ρ に関して最小にすることで、一般化最小 2 乗推定量

$$(4.4) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}' \mathbf{A}(\hat{\rho})^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{A}(\hat{\rho})^{-1} \mathbf{y}$$

を得る。 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_p)$ と $\hat{\rho}$ が得られたことにより、平均割引関数 $\bar{D}(s)$ と η_i の分散共分散構造を決める \mathbf{A} が求まる。

4.2 倒産確率関数と回収率の推定方法

次に、信用リスクがある社債価格データから (3.32) 式と (3.33) 式の SCBCSM モデルにおける未知パラメータ $(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{1q}), \gamma(k(i)), \rho^*$ を求めるには (4.1) 式と同様に (3.32) 式を

$$(4.5) \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\varepsilon}$$

と表現する。ここで、

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}^* &= (y_1^*, \dots, y_N^*)', & y_i^* &= P_i(0) - \sum_{m=1}^M C_i(s_{am}) \bar{D}(s_{am}), \\ \boldsymbol{\beta}^* &= (\zeta_1', \dots, \zeta_p')', & \zeta_l &= (\zeta_{l1}, \dots, \zeta_{lq})', \\ \mathbf{X}^* &= (\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_N^*)', & \mathbf{x}_i^* &= (\mathbf{x}_{i1}^*, \dots, \mathbf{x}_{ip}^*)', & \mathbf{x}_{ir}^* &= (x_{i1r}^*, \dots, x_{iqr}^*)', \\ \mathbf{x}_{i1r}^* &= - \sum_{m=1}^M z_{iv} [C_i(s_{am}) s_{am}^r - 100\gamma(k(i)) \{s_{am}^r - s_{am-1}^r\}] \bar{D}(s_{am}), \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)', & \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \sigma^2 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \end{aligned}$$

である。なお (4.6) 式における平均割引関数 $\bar{D}(s_{am})$ に関して、将来の同時点で発生するキャッシュ・フローを割引く割引率は同じであるという無裁定条件を仮定することにより (4.1) 式で求めた平均割引関数 $\bar{D}(s)$ を用いることができる。さらに、 η_i の分散共分散構造 \mathbf{A} も (4.1) 式で求めた \mathbf{A} に一致すると仮定する。従って、この時、 $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^*, \gamma(k(i)), \rho^*)$ とすると、

$$(4.7) \quad (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*(\gamma(k(i))) \boldsymbol{\beta}^*)' \{\mathbf{A} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\}^{-1} (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*(\gamma(k(i))) \boldsymbol{\beta}^*)$$

を $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^*, \gamma(k(i)), \rho^*)$ に関して最小にすることで、一般化最小 2 乗推定量

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* &= [\mathbf{X}^*(\hat{\gamma}(k(i)))' \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1} \mathbf{X}^*(\hat{\gamma}(k(i)))]^{-1} \mathbf{X}^*(\hat{\gamma}(k(i)))' \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1} \mathbf{y}^* \\ \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{A} + \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned}$$

を得る。なお (3.17) 式の平均割引関数における次数や (3.31) 式の倒産確率関数における次数を AIC (Akaike's Information Criterion) でもって決めることができる。例えば、倒産確率関数における次数を決める上で (4.5) 式のモデルの対数尤度は、

$$(4.9) \quad \begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \{\mathbf{A} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\}| \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*(\gamma(k(i))) \boldsymbol{\beta}^*)' [\sigma^2 \{\mathbf{A} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\}]^{-1} (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*(\gamma(k(i))) \boldsymbol{\beta}^*) \end{aligned}$$

である。対数尤度を最大化することで、未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を求めることができる。従って、 σ^2 の最尤推定値は、

$$(4.10) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*(\gamma(k(i))) \boldsymbol{\beta}^*)' \{\mathbf{A} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\}^{-1} (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*(\gamma(k(i))) \boldsymbol{\beta}^*)$$

で得られ、一般化最小 2 乗推定量と同値である。 $\hat{\sigma}^2$ を(4.9)式に代入すると最大対数尤度は、

$$(4.11) \quad l(\hat{\theta}) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\hat{\sigma}^2 \{A + B(\hat{\theta})\}| - \frac{N}{2}$$

となる(4.5)式モデルの AIC は、

$$(4.12) \quad AIC = N \log 2\pi + \log |\hat{\sigma}^2 \{A + B(\hat{\theta})\}| + N + 2(\text{モデルのパラメータ数})$$

となる。

5. 実証分析

次に、わが国の社債市場に SCBCSM モデルを適用した実証分析結果を示す。わが国では、1995 年 12 月までは社債が発行できる企業が適債基準によって一定水準の財務比率を有するか、あるいは、一定水準の格付を取得することができるなどの企業に限定されていたため、データ数が少なく、格付けも BBB 格相当以上に限定されていたことから、1996 年 12 月から 2001 年 12 月の期間で市場取引のあった長期国債・社債の月次データを分析対象とした。国債の価格データに関しては、1996 年 12 月から 1998 年 11 月までは東京証券取引所が公表するデータを、1998 年 12 月以降は日本証券業協会が公表する店頭基準気配データを使用した。また、社債の価格データは日本証券業協会が公表する店頭基準気配データである。長期国債・社債の両価格データとも月末値である。但し、電力債、ガス会社、金融関連会社(銀行・証券・保険・その他金融)の発行する社債、及び、残存年数 10 年以上の銘柄を分析対象から除外した。格付けデータに関しては、国内格付け会社(日本格付投資情報センターと日本格付研究所)から付与されている格付けの中で、最も低い格付けを当該債券の格付けとして採用した。分析対象の社債銘柄

表 1. 東証業種分類の各業種の銘柄数の時間的推移。

業種	199701	199801	199901	200001	200101
水産・農林	0	2	2	2	2
鉱業	0	0	0	0	0
建設	47	49	54	54	51
食料品	15	25	48	51	61
繊維	20	20	33	33	29
パルプ・紙	11	18	28	29	27
化学	26	56	89	96	105
医薬	5	4	8	7	6
石油・石炭製品	9	12	18	24	31
ゴム製品	3	3	12	13	14
ガラス・土石製	5	8	24	26	31
鉄鋼	39	49	80	86	84
非鉄製品	31	42	60	58	52
金属製品	10	14	15	14	12
機械	25	35	63	67	70
電気機器	52	82	137	137	134
輸送用機器	36	56	82	86	84
精密機器	12	18	21	24	21
その他製造業	3	5	13	16	15
陸運	36	55	75	81	90
海運	6	13	16	17	16
空運	3	4	7	12	12
倉庫・運輸関連	1	1	7	8	10
通信	1	1	11	16	18
卸売	52	66	90	110	105
小売	46	60	82	91	95
不動産	20	31	42	50	51
サービス	12	17	26	30	32
合計	526	746	1143	1238	1258

表 2. 格付け毎の銘柄数の時間的推移 .

格付	199701	199801	199901	200001	200101
AAA	4	2	8	8	6
AA+	40	58	19	21	20
AA	66	103	79	48	51
AA-	87	95	124	101	105
A+	44	86	164	167	152
A	91	138	208	206	219
A-	117	174	289	323	278
BBB+	33	29	88	121	144
BBB	27	35	85	114	164
BBB-	17	11	46	63	67
BB+	0	6	12	29	18
BB	0	6	11	18	15
BB-	0	3	5	5	6
B+	0	0	0	7	8
B	0	0	0	7	5
B-	0	0	4	0	0
CCC+	0	0	1	0	0
合計	526	746	1143	1238	1258

の特徴として、東証業種分類でみた銘柄数の時間的推移は、表 1 に示すとおりであり、また、格付け分類でみた銘柄数の時間的推移は、表 2 に示すとおりである。最近になるにつれて銘柄数は、全体として増加傾向にあるが、格付けが低下した銘柄が増えている。

5.1 モデルを推定する上での条件

まず (3.32) 式で表した社債価格モデルを推定するにあたり (3.17) 式の平均割引関数 $\bar{D}(s)$ を求める必要があるが、本稿でも Kariya and Tsuda(1994)と同様に、以下の 2 次多項式を仮定する。なお、Kariya and Tsuda(1994)では、式(3.18)で示した銘柄属性 i に依存した平均割引関数 $\bar{D}_i(s)$ を仮定し、銘柄属性としてクーポン・レートと償還期間を用いている。

$$(5.1) \quad \bar{D}(s) = 1 + \delta_1 s + \delta_2 s^2$$

平均割引関数 $\bar{D}(s)$ の未知パラメータに関しては (4.1) 式を用いて、信用リスクの無い国債データから推定した。なお、国債も国によっては信用リスクがあるが、日本の国債には信用リスクが無いと考える。なお、同じ銘柄属性の債券間においてのみ無裁定条件(部分無裁定)が成立していると考え、Kariya and Tsuda(1994)と同様に、クーポン・レートと償還期間などの銘柄属性に依存した平均割引関数 $\bar{D}_i(s)$ を仮定することもできる。

(4.1) 式に関して一般化最小 2 乗法により推定した平均割引関数 $\bar{D}(s)$ のパラメータ $\hat{\delta}_j$ は、1996 年 12 月から 2001 年 12 月の期間でのそれぞれの平均値が、 $\hat{\delta}_1 = -0.0026$, $\hat{\delta}_2 = -0.0015$ である (3.20) 式の η_i の共分散構造のパラメータ $\hat{\rho}$ の同期間の平均値は、 $\hat{\rho} = 0.819$ である。推定したパラメータ $\hat{\delta}_j$ のうち、 $\hat{\delta}_1$ は、割引曲線の直線的な傾きに、また、 $\hat{\delta}_2$ は、割引曲線の曲率に影響を与えるパラメータである。

次に、式(4.5)を用いて一般化最小 2 乗法により社債データから倒産確率関数 $h_i(s)$ や回収率 $\gamma(k(i))$ 、期待損失額の確率的な変動 ω_i の共分散構造に含まれる未知パラメータを推定した。倒産確率関数を定式化するにあたり、社債発行企業の業種や財務指標、格付けを考慮した関数を考えることができるが、本稿では、社債発行企業の業種のみを考慮した以下の 2 次の多項式を仮定した結果を示す。なお、倒産確率関数に関してもっと高次の多項式も考えられるが、余り高次になると未知パラメータの数も増え、推定するのが大変になると共に、データに対する当てはまり度合いが過ぎて、かえって倒産確率の信頼性が低下する危険性がある。

表 3. 6 業種分類 .

業種コード・名称	東証業種分類
1 市況系	水産・農林、鉱業、食料品、繊維、パルプ・紙、化学、医薬、石油・石炭製品、ゴム製品、ガラス・土石製品、鉄鋼、非鉄金属、金属製品
2 建設不動産系	建設、不動産
3 加工系	機械、電気機器、輸送用機器、精密機器、その他製造業
4 運輸系	陸運、海運、空運、倉庫・運輸関連
5 流通系	卸売、小売、サービス
6 通信系	通信

$$(5.2) \quad \begin{aligned} h_i(s) &= \zeta_1(z_i)s + \zeta_2(z_i)s^2 \quad (i = 1, \dots, N), \\ \zeta_l(z_i) &= \zeta_{l1}z_{i1} + \dots + \zeta_{l6}z_{i6} \quad (l = 1, 2). \end{aligned}$$

社債発行企業の業種分類に関しては、東京証券取引所の業種分類に基づき、表 3 に示すように 6 業種に大きく分類し、業種コードとは別に個別銘柄の属性 z_{iv} として、属する業種に 1、属さなければ 0 とした。そして、倒産確率関数 $h_i(s)$ や回収率 $\gamma(k(i))$ 、社債価格間の相関パラメータ ρ^* を求める上で、格付け毎の銘柄グループを分析対象としたが、銘柄数が 5 銘柄以下の業種グループは分析対象から除外した。なお、分析対象とする銘柄グループの最長償還期間を 10 年としていることから、各モデル推定時点 t から 10 年の期間内において倒産確率 $h_i(s)$ が 1 を超えない条件の下で回収率 $\gamma(k(i))$ や倒産確率関数 $h_i(s)$ のパラメータを推定した。今後、わが国においても倒産確率に関する実証データが整備され、倒産確率の適正水準を把握できた際に、倒産確率の適正水準の条件下で倒産確率関数 $h_i(s)$ のパラメータを推定するならば、倒産確率の絶対水準に関しても有意義な情報を得ることが可能であると考えられる。

5.2 SCBCSM モデルの推定

図 1 は、推定した格付け毎の回収率 $\hat{\gamma}(k(i))$ の 1996 年 12 月から 2001 年 12 月の期間での平均値を示す。一般化最小 2 乗法により回収率 $\hat{\gamma}(k(i))$ を求める際、その刻み幅を 0.1 とし (0,1) の数値間で求めた。回収率 $\gamma(k(i))$ は、刻み幅を細かくしても、現実的に意味がないので、この程度の刻み幅で十分と考えられる。推定した回収率 $\hat{\gamma}(k(i))$ は、図より格付けが低くなる (AAA → BB) につれて低下傾向にあることがわかる。実際のところ、日本市場においては社債発行企業の倒産件数が増え始めたのは最近のことであり、現実の回収率のデータが不十分である。推定した回収率 $\hat{\gamma}(k(i))$ の数値自体は、各モデル推定時点 t から 10 年の期間内において倒産確率 $h_i(s)$ が 1 を超えない条件の下で推定した値であり、現実の値と異なると考えられるが、投資家の信用リスクをインプライドしたものであることから、数値そのものよりも格付け間の相対的な差や推定した時点間の水準の違いが信用リスクの情報として重要である。なお、期待損失額間の相関パラメータ ρ^* の殆どが 0 であり、たまに、0.1 ~ 0.5 の値をとった。

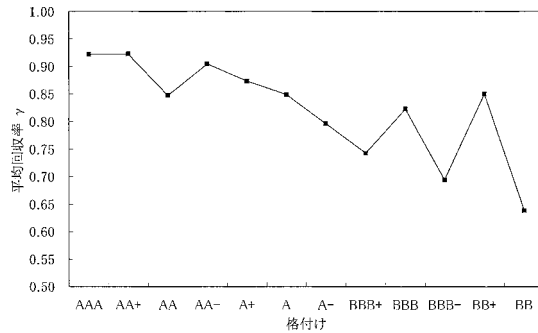


図 1. 格付け毎の回収率 $\hat{\gamma}(k(i))$ の平均値 .

表 4. 倒産確率関数 $h_i(s)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2$ の各時点の値とその t 値 .

期間	加工系業種					
	ζ_1			ζ_2		
	AA	A	BBB	AA	A	BBB
199612	0.0716 (2.46)	0.1214 (3.31)	0.0489 (2.11)	-0.0059 (-0.99)	-0.0090 (-0.83)	0.0023 (0.50)
199712	0.0138 (1.84)	0.0159 (1.27)	0.0936 (4.12)	0.0048 (3.62)	0.0028 (1.35)	0.0037 (0.64)
199812	0.0042 (0.57)	0.0650 (4.08)	0.0591 (3.49)	0.0042 (3.74)	-0.0015 (-0.58)	0.0004 (0.14)
199912	0.0228 (2.31)	0.0354 (3.05)	0.0668 (5.75)	0.0004 (0.25)	-0.0011 (-0.58)	0.0002 (0.09)
200012	0.0115 (1.92)	0.0434 (2.83)	0.0450 (3.38)	0.0017 (1.61)	-0.0006 (-0.23)	0.0016 (0.63)
200112	0.0056 (4.63)	0.0195 (1.07)	0.0211 (1.44)	-0.0008 (-2.97)	0.0016 (0.53)	-0.0014 (-0.48)

表 5. 倒産確率関数 $h_i(s)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2$ の各時点の値とその t 値 .

期間	A 格付け									
	ζ_1					ζ_2				
	市況	建設不動産	加工	運輸	流通	市況	建設不動産	加工	運輸	流通
199612	0.0701 (1.80)	0.0554 (1.39)	0.1214 (3.31)	0.0533 (1.67)	0.0744 (2.17)	0.0002 (0.02)	0.0001 (0.01)	-0.0090 (-0.83)	0.0037 (0.38)	-0.0012 (-0.12)
199712	0.0179 (1.40)	0.0418 (3.00)	0.0159 (1.27)	0.0115 (0.92)	0.0353 (2.82)	0.0030 (1.42)	0.0028 (1.16)	0.0028 (1.35)	0.0035 (1.76)	0.0025 (1.21)
199812	0.0701 (4.45)	0.0990 (5.95)	0.0650 (4.08)	0.0585 (3.92)	0.1029 (6.24)	-0.0015 (-0.59)	-0.0024 (-0.88)	-0.0015 (-0.58)	0.0006 (0.26)	-0.0030 (-0.99)
199912	0.0419 (3.81)	0.0789 (5.75)	0.0354 (3.05)	0.0416 (3.55)	0.0511 (4.44)	0.0005 (0.31)	-0.0045 (-2.15)	-0.0011 (-0.58)	-0.0011 (-0.63)	0.0009 (0.44)
200012	0.0555 (3.97)	0.1004 (5.45)	0.0434 (2.83)	0.0438 (2.70)	0.0732 (4.87)	0.0019 (0.81)	-0.0050 (-1.57)	-0.0006 (-0.23)	0.0000 (0.01)	-0.0011 (-0.38)
200112	0.0289 (1.64)	0.0449 (2.11)	0.0195 (1.07)	0.0393 (2.03)	0.0199 (1.02)	0.0022 (0.78)	-0.0009 (-0.24)	0.0016 (0.53)	0.0021 (0.70)	0.0055 (1.62)

加工系業種に関する推定した格付け毎の倒産確率関数 $h_i(s)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_j$ の値とその有意性を示す統計量の t 値を表 4 に示す . 市場の信用リスクの変化と共に , パラメータ $\hat{\zeta}_j$ も変化する

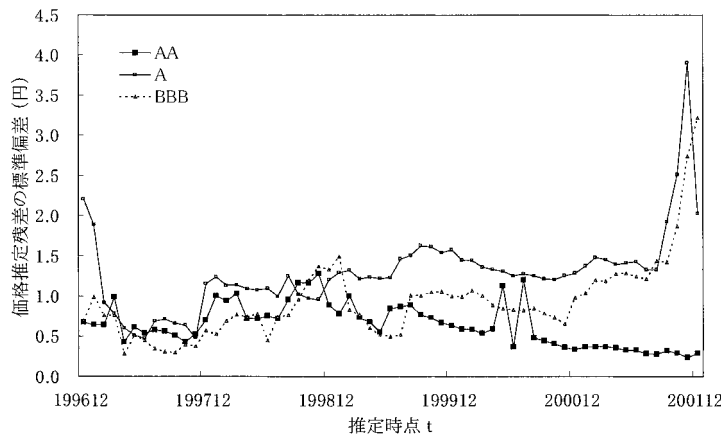


図 2. SCBCSM モデルの価格推定残差の標準偏差の時間的推移.

る．推定したパラメータ $\hat{\zeta}_j$ のうち， $\hat{\zeta}_1$ は，倒産確率関数の直線的な傾きに，また， $\hat{\zeta}_2$ は，倒産確率関数の曲率に影響を与えるパラメータである．格付けが低くなるにつれて， $\hat{\zeta}_1$ の値が概ね大きくなる傾向にある．また， $\hat{\zeta}_2$ の数値のオーダーが， $\hat{\zeta}_1$ よりも概して小さくなっている．推定したパラメータの有意性に関しては， $\hat{\zeta}_1$ の t 値の絶対値が大半 2 以上で 5% 水準で有意であるが， $\hat{\zeta}_2$ の場合は，AA 格付け以外は全ての t 値の絶対値が 2 以下であり有意性が低い．表 5 に A 格付けに関する推定した業種毎の倒産確率関数 $h_i(s)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_j$ の値とその t 値を示す．建設不動産系や流通系の業種の $\hat{\zeta}_1$ の値が他の業種よりも概ね大きくなっている．このことは，建設不動産系や流通系業種の倒産確率が他の業種よりも期間が長くなるにつれて相対的に大きくなることを示唆している．倒産確率関数に関しては次節で詳細に述べる．なお，推定したパラメータの有意性に関しては， $\hat{\zeta}_1$ の t 値の絶対値が概ね 2 以上で 5% 水準で有意であるが， $\hat{\zeta}_2$ の場合は，業種によって時期により有意性が高い場合もあるが，概して有意性が低い結果を示している．

推定した SCBCSM モデルが社債価格モデルとして有用であるかどうかをみるために，以下に定義する価格推定残差の標準偏差 v により，1996 年 12 月から 2001 年 12 月の各推定時点調べたものが図 2 である．

$$(5.3) \quad v = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i(0) - E(P_i(0)))^2 \right\}^{1/2} .$$

2001 年 12 月にかけて A 格付けと BBB 格付けの価格推定残差の標準偏差が大きくなっている．この理由としては，2001 年 9 月のマイカルの破綻や同時多発テロの発生以降，世の中の信用不安が高まってきた結果，価格が大きく変化した銘柄の数が増えたことが考えられる．さらに，本稿で採用した日本の格付け会社による各格付け銘柄グループに関して，米国の格付け評価会社である Moody's 社や Standard & Poor's 社の格付け評価をみた場合，A と BBB 格付け銘柄グループにおいて銘柄間で格付けが異なる銘柄数が，AA 格の銘柄グループよりも多いことから，個々の銘柄に対する投資家の格付け評価が分れた結果，A や BBB 格付けグループの価格の散らばりが大きくなったことが考えられる．

ここでは，倒産確率の銘柄属性として業種のみしか考慮していない割には，各格付けごとの価格推定残差の標準偏差がこの期間全体の平均で，それぞれ $\bar{v}_{AA} = 0.61$ 円 $\bar{v}_A = 1.23$ 円，

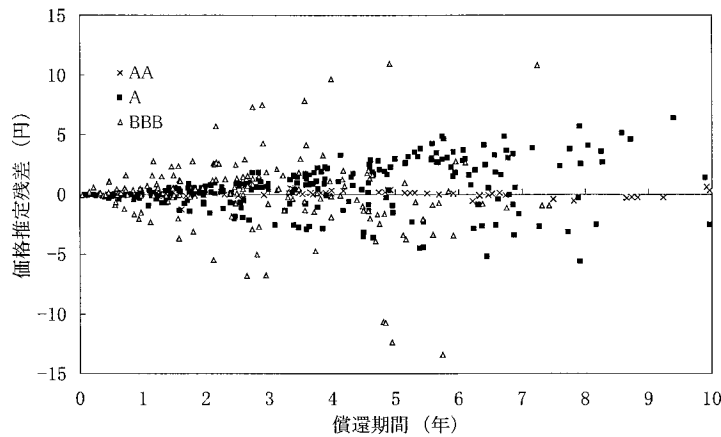


図 3. 格付け毎の価格推定残差の期間構造(2001年12月).

$\bar{v}_{BBB} = 0.89$ 円であり、社債価格モデルの推定精度としては悪くないと思われる。なお、図 3 に分析期間の中では価格推定残差の標準偏差が大きい 2001 年 12 月末時点での各格付け毎の個別債券の価格推定残差を示す。格付けが低くなるにつれて、そして、償還期間が長くなるにつれて、価格推定残差が概ね大きくなる傾向が見てとれる。銘柄間の価格差には、業種要因に加えて個々の企業の信用リスク差が反映されていることから、倒産確率関数モデルの銘柄属性に業種に加えて財務指標などを加えることで価格推定精度の向上が期待される。

5.3 倒産確率の期間構造

次に、推定した倒産確率の期間構造を示す。図 4 は、1999 年 1 月の時点で AA, A, BBB 格付け毎の倒産確率の期間構造を示したものである。 $t + s_{ij-1}$ 時点と $t + s_{ij}$ 時点間の倒産確率の期間構造を示したのが図 5 である。各図における倒産確率の水準そのものは、推定時点 t から 10 年の期間内において倒産確率が 1 以下の条件下で推定したため、実際の倒産確率とは大きく異なるものの、投資家の予想を反映したインプライドな数値であり、倒産確率の期間構造の形状や業種間の倒産確率の格差から重要な信用リスク情報が得られる。例えば、図 4 をみると、建設不動産系業種は、A 格付けと BBB 格付けで倒産確率が他の業種と比べてその差が顕著である。企業の倒産確率の大きさは、期間が長くなるにつれて大きくなるとともに、業種間でのその格差は増大する傾向にある。前節で述べたように (5.2) 式で示した倒産確率関数の 2 次のパラメータ $\hat{\zeta}_{2v}$ の有意性が総じて低いものの、格付けや業種によって倒産確率の描くラインの形状の凹凸が異なる点が興味深く、重要である。格付け間で倒産確率の水準差が余り大きくないが、この理由としては推定された倒産確率は、格付け毎の銘柄ユニバースを対象にしたインプライドな数値であり、格付け間よりも同じ格付けの業種間での相対的な格差を捉えている面が強いと考えられる。従って、格付け間での倒産確率の水準差をより明確に推定するには、各格付け毎の回収率を推定した後、全銘柄に対して改めて業種その他、格付けも属性の 1 つとして考慮した倒産確率関数を推定する方法が考えられる。

図 5 で示す $t + s_{ij-1}$ 時点と $t + s_{ij}$ 時点間の倒産確率の期間構造に関して、AA 格付けの業種の倒産確率は、時間の経過とともに増加するのに対して、それより低い A 格付け業種の倒産確率は、運輸系以外の業種で減少する。そして、BBB 格付け業種の倒産確率は、やや横ばいで、建設不動産系業種では増加している。Carty and Fons (1994) が調べた米国市場での実証

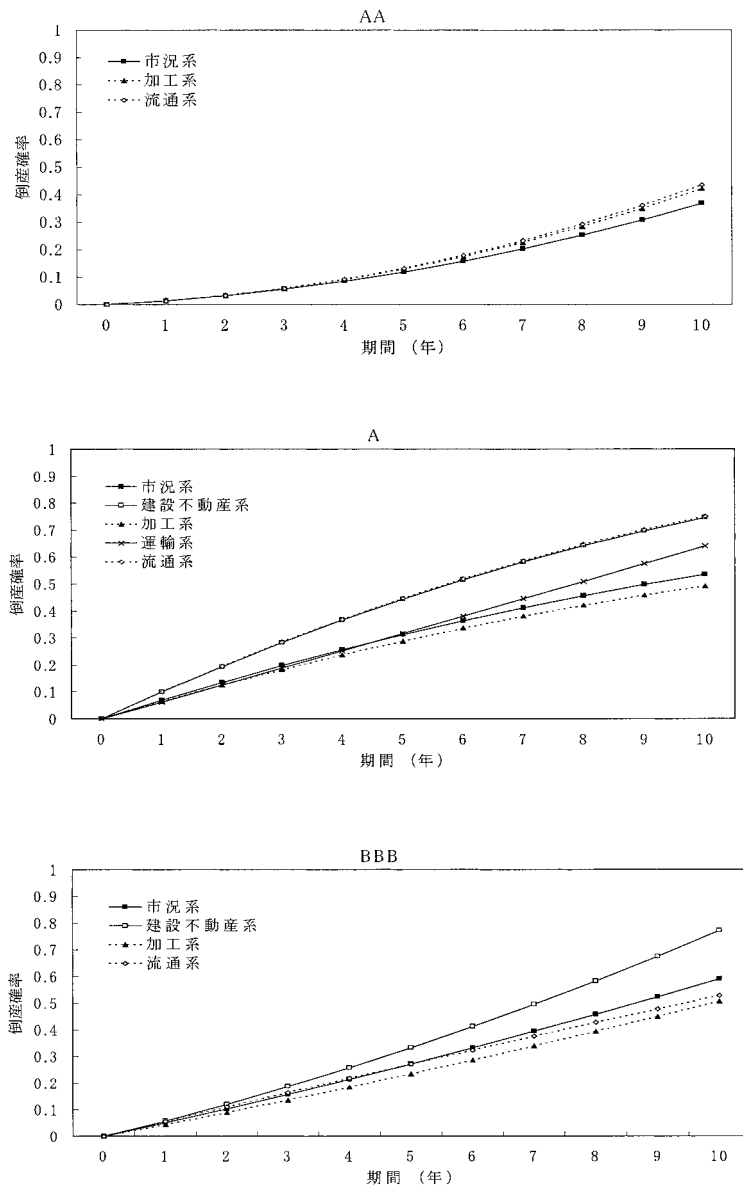


図4. 格付け毎の倒産確率の期間構造(1999年1月).

結果でも、高格付け企業のハザード率(t 時点までに生存していた企業が翌年に倒産する確率)は、時間の経過とともに増加する一方、低格付け企業のハザード率は、減少することが示されている。低い格付け企業は、その格付け評価時点で倒産確率が大きくても、その時期を乗り切るとビジネスも安定して倒産の危険性が小さくなる場合もあれば、そのままビジネスが安定せず、倒産に至る場合もある。また、高い格付け企業は、その時点では倒産確率が小さくても、常に企業間競争で勝ち抜くビジネス展開が要求され、期間が長くなるにつれて、勝ち抜いてい

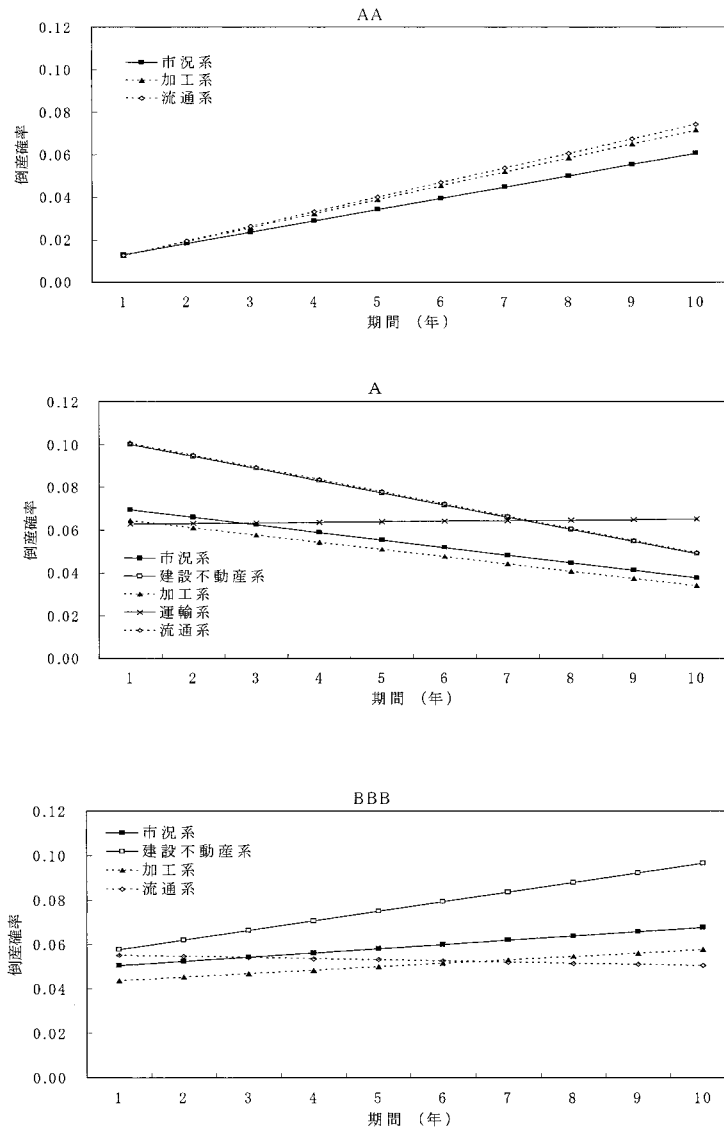


図5. 格付け毎の $t + s_{ij-1}$ 時点と $t + s_{ij}$ 時点間の倒産確率の期間構造(1999年1月).

ける可能性が低くなることから、倒産確率が上昇する傾向をもつ。ここでの $t + s_{ij-1}$ 時点と $t + s_{ij}$ 時点間の倒産確率の期間構造は、Carty and Fons(1994)が調べた個々の企業でなく、業種全体の倒産確率の期間構造であるが、業種全体を1つの企業と考えれば、類似した解釈ができよう。ただ、業種に含まれる全ての企業が倒産に至ることは通常ではありえないものの、最近の建設不動産系業種のように、数多くの企業が倒産し始めると業種としては倒産に近い状況を呈しているとも考えることもできる。

倒産確率の計測方法で株価情報に基づくアプローチがあるが、株価の場合、満期がないため、投資家が将来のどの時点で企業の倒産する危険性が高いと予想しているのかといった観点から

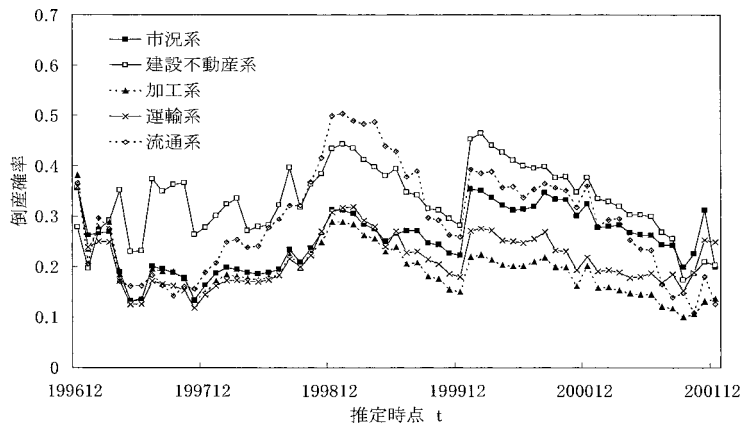


図 6. 各業種の期間 5 年の倒産確率の時間的推移(A 格付け).

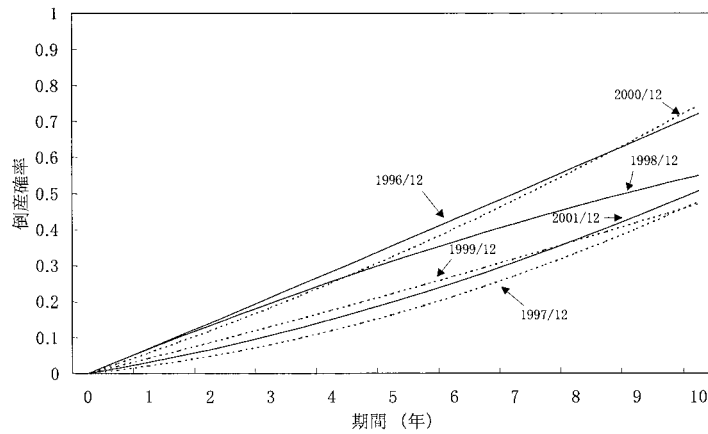


図 7. 市況系業種の倒産確率の期間構造の時間的推移(A 格付け).

の情報面が弱い。他方、社債の場合には満期があり、さらに社債発行企業が複数の償還期間の異なる銘柄を発行している場合もあるため、それらの価格から将来の倒産危険性の高い時期に関する投資家の予想についてより詳細な情報を把握することができる。倒産確率は、世の中の経済環境と共に変化する。図 6 は、A 格付けの各業種の期間 5 年の倒産確率の時間的推移を示したものである。また、図 7 は、A 格付けの市況系業種の倒産確率の期間構造の時間的推移を示したものである。

5.4 期待損失額の推定

次に、推定した格付け別の期待損失額の期間構造を示す。この期待損失額は、平均割引率で割り引かれた期待損失額の値である。さらに、単なる国債と社債間の価格差(利回りの視点で考えれば、国債と社債間のイールドスプレッド)でない点が重要である。図 8 は、2001 年 1 月末時点での AA, A, BBB 格付け毎の銘柄ユニバースに対する期待損失額の期間構造を示す。償還期間が長くなるにつれて、総じて期待損失額が増大し、そして、同じ償還期間の銘柄におい

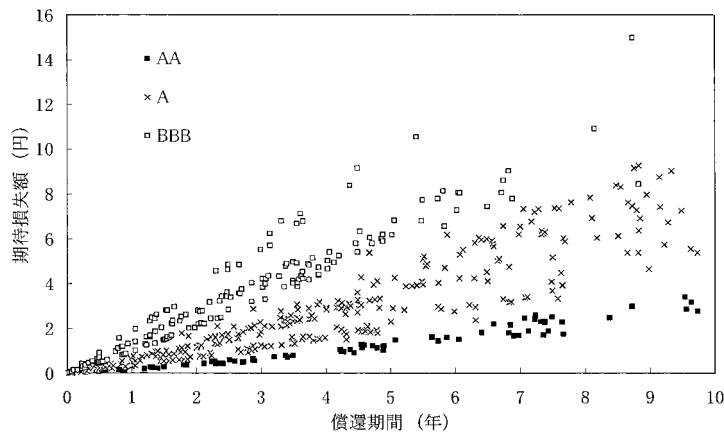


図 8. 各格付けの銘柄毎の期待損失額の分布状況(2001年1月).

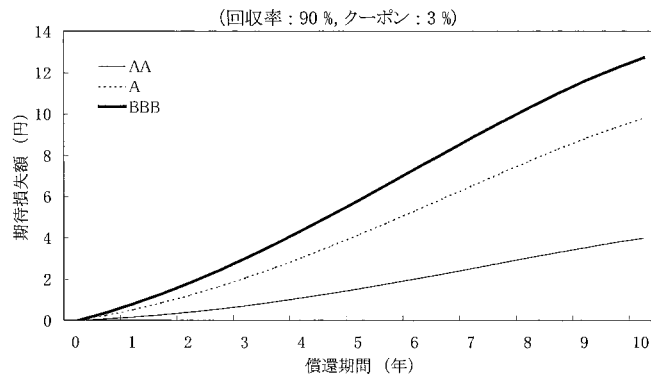


図 9. 市況系業種銘柄の格付け毎の期待損失額の期間構造(2001年1月).

て格付けが低下するにつれて期待損失額が増大している。図 9 は、クーポン・レートが 3%、回収率 90% を仮定した市況系業種に属する社債に関して、2001 年 1 月末時点での格付け毎の期待損失額の期間構造を示したものである。図 10 は、2001 年 1 月末時点で同条件での A 格付けの業種毎の期待損失額の期間構造を示したものである。同じ償還期間やクーポンを持つ債券に関して、格付け毎に期待損失額がどの程度変わるのか、また、同じ格付け内で業種によってどの程度異なるのかを把握できることは、投資の観点から貴重な情報である。期待損失額格差は、まさに投資家からの信用リスクに対するリスクプレミアム格差を表す。図 11 は、1996 年 12 月～2001 年 12 月期間で A 格付けの各業種と同じ銘柄属性(クーポン・レート 3%、回収率 90%) を持った償還期間 10 年の債券の期待損失額の時間的な変化を示したものである。図中の①の 1997 年秋の山一証券、北海道拓殖銀行の破綻時、②の 1998 年ロシア危機、米国のヘッジファンド会社 LTCM の破綻から日本長期信用銀行の破綻にかけて全業種で期待損失額が大きくなっている。このように世の中の信用リスクの変動と共に、期待損失額は変化する。

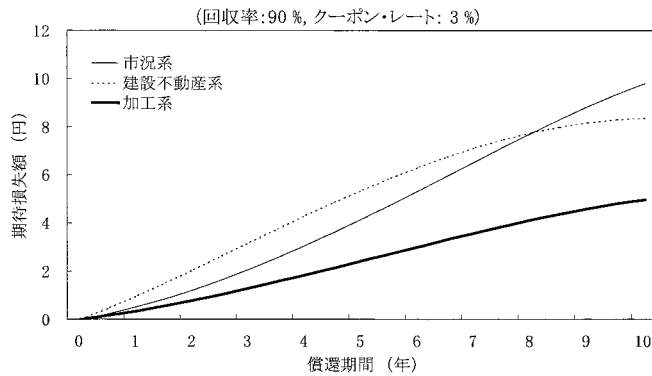


図 10. A 格付けの業種毎の期待損失額の期間構造(2001年1月).

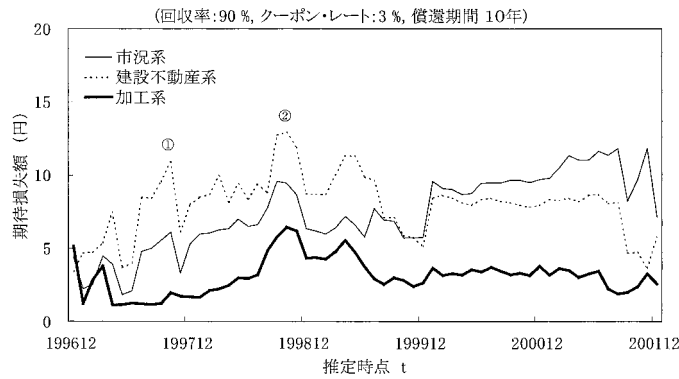


図 11. A 格付けの業種毎の期待損失額の時間的な変化.

6. 終わりに

本稿の第2節で述べたように、1990年代の後半以降、企業の重要な資金調達手段として社債の発行額が急増してきている。また、株価の低迷や超低金利を背景に証券投資戦略の上で貴重な投資対象として社債の重要性が高まっている。一方、ここ最近において、企業の信用リスクが急激に顕在化してきている。従って、投資家にとり企業倒産の危険性や仮に倒産した場合の元本の回収率、倒産にまで至らなくても信用不安の高まりによる債券価格の下落、すなわち、信用スプレッド(期待損失額)の増大を把握するために、倒産確率やその期間構造を得る方法は、必要不可欠である。

そこで、問題は、それらを得るための情報源として何のデータを用いるのか、そして、その分析アプローチである。最近でこそ、わが国は、社債発行企業の債務不履行(デフォルト)が発生し、企業の倒産に関するデータが蓄積されつつあるものの、その数は、米国市場に比較して現時点では極めて少ない。このような状況から、多くの投資家が様々な企業情報をもとに信用リスクの予想も含めて価格付けしている社債価格や株価のデータが、信用リスクに関する重要な情報源となる。倒産確率を得る方法として企業価値アプローチが有名である。このアプローチは、Merton(1974)の株価決定理論から導出されたもので、企業価値が負債水準を下回った

時を倒産と仮定する方法であり、企業価値の変動プロセスを定式化して倒産確率を推計するものである。このアプローチは、企業価値の変動プロセス・モデルにおける未知パラメータを株価の変動特性から推定する。しかし、株式は、既に述べたように満期が無いため、将来のいつの時点で企業が倒産するのかといった投資家の予想倒産時期に関する情報面が弱く、さらに、売買する投資家が多様であることから、信用リスク以外の様々な要因に影響される度合いが大きいと考えられる。一方、社債は企業にとり負債であるため、企業が倒産した際には株主よりも優先して社債投資家に資金が返済されることから、社債投資家にとり元本の回収率も極めて重要で、社債価格には既に述べた倒産確率の期間構造と同様に回収率の信用リスク情報も大きく反映される。従って、本稿で示した社債価格に基づくアプローチは、倒産確率の期間構造と回収率の両方の情報を得ることができる。

また、これまでの社債価格モデルは、銘柄間の価格連動性(相関構造)を考慮しないものが多いが、本稿の社債価格モデルは、個別銘柄の価格連動性を考慮して価格を推定している。このことは、分散共分散構造を通して社債の市場価格と倒産確率の期間構造、回収率の確率的関係をより効果的に推定することとなる。さらに、このことと倒産確率関数の属性に業種を考慮することにより、世の中が不況に陥った際の同一業種内での連鎖倒産の危険性などの情報に関して倒産確率を通して得ることができる。実証分析で示したように、同じ格付け銘柄でも不動産建設系業種や流通系業種の倒産確率が他の業種よりも大きくなるなどの連鎖倒産の危険性を示唆する情報が得られた。

今後の課題として、本稿では、倒産確率の属性として業種のみを考慮した結果を示したが、新たな属性として企業の財務指標などを考慮することで、個別の企業毎の倒産確率の期間構造に関するより詳細な情報を調べたい。さらに、信用リスクに見合うリターンを獲得するというニーズが高まってきていることから、これまでのように企業が倒産するかどうかを判定するだけでなく、モデルの倒産確率のパラメータを時系列モデルにより予測したり、格付け評価会社の格付け変更と倒産確率の変化の関係などから将来の倒産確率を求めることにより、社債価格や期待損失額の予測を試みたい。

謝 辞

本稿に対して東京大学大学院経済学研究科の国友直人教授から貴重なご意見やコメントを頂き深く感謝するとともに、査読者の方々の貴重なコメントに感謝致します。

参 考 文 献

- Altman, E. I. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy, *Journal of Finance*, **23**, 189-209.
- Altman, E. I., Haldeman, R. G. and Narayanan, P. (1977). ZETA analysis: A new model to identify bankruptcy risk of corporations, *Journal of Banking and Finance*, **1**, 29-54.
- 青沼君明, 田辺隆人(2001). イールド・スプレッドの期間構造の推定モデル, 『金融工学の新展開』(高橋一 編), ジャファイア・ジャーナル, 3-34, 東洋経済新報社, 東京.
- Black, F. and Cox, J. (1976). Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provision, *Journal of Finance*, **31**, 351-367.
- Caines, P. E. and Rissanen, J. (1974). Maximum likelihood estimation of parameters in multivariate Gaussian stochastic processes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-20**, 102-104.
- Cantor, R. and Packer, F. (1995). The credit rating industry, *Journal of Fixed Income*, December,

- 5, 10–34.
- Carty, L. and Fons, J. (1994) Measuring changes in corporate credit quality, *Journal of Fixed Income*, June, 4, 27–41.
- Chance, D. (1990) Default risk and the duration of zero coupon bonds, *Journal of Finance*, **45**, 265–274.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1981) A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates, *Journal of Finance*, **36**, 769–799.
- Cox, J. C., Ingersoll J. E. and Ross S. A. (1985) A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385–407.
- Eberhart, A. and Sweeney, R. (1992) Does the bond market predict bankruptcy settlements?, *Journal of Finance*, **47**, 943–980.
- Elton, Edwin J. and Gruber, Martin J. (1981) Modern portfolio theory and investment analysis, Wiley, New York.
- Fons, J. (1994) Using default rates to model the term structure of credit risk, *Financial Analysts Journal*, September–October, 25–32.
- Foss, G. (1995) Quantifying risk in the corporate bond markets, *Financial Analysts Journal*, March–April, 29–34.
- 蜂須賀一誠 (1999) 信用リスク市場における格付スプレッドの評価, 『金融技術とリスク管理の展開』(今野浩 編), ジャファイア・ジャーナル, 57–73, 東洋経済新報社, 東京.
- Ingram, R., Brooks, L. and Copeland, R. (1983) The information content of municipal bond rating changes: A note, *Journal of Finance*, **38**, 997–1003.
- Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M. (1995) Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50**, 53–86.
- Jarrow, R. A., Lando, D. and Turnbull, S. M. (1997) A Markov model for the term structure of credit risk spread, *Review of Financial Studies*, **10**, 481–523.
- 刈屋武昭 (1995) 『債券計量分析の基礎と応用』, 東洋経済新報社, 東京.
- 刈屋武昭 (1999) 『信用リスク分析の基礎』, 東洋経済新報社, 東京.
- Kariya, T. and Tsuda, H. (1994) New bond pricing models with applications to Japanese data, *Financial Engineering and the Japanese Markets*, **1**, 1–20.
- Kariya, T. and Tsuda, H. (2000) CB-time dependent Markov model for pricing convertible bonds, *Asia-Pacific Financial Markets*, **7**, 239–259.
- 木島正明, 小守林克哉 (1999) 『信用リスク評価の数理モデル』, 朝倉書店, 東京.
- McCulloch, J. H. (1971) Measuring the term structure of interest rates, *Journal of Business*, **28**, 19–31.
- McCulloch, J. H. (1975) The tax adjusted yield curve, *Journal of Finance*, **30**, 811–830.
- Merton, R. C. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of Internet rates, *Journal of Finance*, **29**, 449–470.
- 森平爽一郎 (1998) 倒産確率の推定と信用リスク管理: 展望, 『リスク管理と金融・証券投資戦略』(森棟公夫, 刈屋武昭 編), ジャファイア・ジャーナル, 3–35, 東洋経済新報社, 東京.
- 中山めぐみ (1998) 社債格付けの評価, 修士論文, 慶應義塾大学大学院, 政策・メディア研究科, 藤沢.
- 新美隆宏 (1998) 格付と財務指標の関係について, 『リスク管理と金融・証券投資戦略』(森棟公夫, 刈屋武昭 編), ジャファイア・ジャーナル, 37–65, 東洋経済新報社, 東京.
- Shimko, D., Tejima, N. and van Deventer, D. (1993) The pricing of risky debt when Internet rates are stochastic, *Journal of Fixed Income*, September, 3, 58–65.
- 鈴木茂央 (1995) 日本社債市場における格付けとスプレッドの関係, 投資工学, 第11号, 64–106.
- 鈴木茂央 (1996) 信用リスクと社債評価, 証券アナリストジャーナル, **34**, 40–57.
- 高田創, 香月康伸, 住友謙一 (1999) 一般債スプレッドの変動要因分析, 証券アナリストジャーナル,

37, 48–60.

丹羽昇一(1995) 社債市場の自由化と債券格付, 証券アナリストジャーナル, 33, 18–27.

津田博史, 刈屋武昭(1995) 時間依存型マルコフ・モデルによる債券価格の予測, 『金融・証券投資戦略の新展開』(森棟公夫, 刈屋武昭 編), ジャファイア・ジャーナル, 67–88, 東洋経済新報社, 東京.

Tsuda, H. and Kariya, T.(1997) Modeling individual US T-bond prices, Discussion Paper A, No. 345, The Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, Tokyo.

津田博史, 刈屋武昭(1998) 時間依存型マルコフ・モデルによる転換社債価格モデル, 『リスク管理と金融・証券投資戦略』(森棟公夫, 刈屋武昭 編), ジャファイア・ジャーナル, 103–122, 東洋経済新報社, 東京.

Vasicek, O. A. and Fong, H. G.(1982) Term structure modeling using exponential splines, *Journal of Finance*, 37, 339–348.

Estimation of Information on Credit Risk Based on a Corporate
Bond Pricing Model with a Correlation Structure among
Individual Bond Prices

Hiroshi Tsuda

(The NLI Research Institute)

The recent increase in the number of failures among listed companies has drawn attention to the problem of credit risk. For corporate bonds, credit risk is reflected in market prices. This paper proposes a new pricing model for straight coupon bonds among corporate bonds, which enables us to obtain information on credit risk such as default probability and principal recovery rate. This model has the following features: 1) stochastic treatment of cash-flow discount functions of each individual bond, 2) evaluation for default probability and principal recovery rate for individual companies implied in the corporate bond market, and 3) correlation structure among individual bond prices by assuming a variance-covariance structure for the random part of the stochastic discount function. We obtained significant information on the term structure of default probability by testing our model empirically with Japanese corporate bond price data.

Key words: Straight coupon bond among corporate bonds, random cash-flow discount function, term structure of default probability, expected value of loss, generalized least squares.