

公開講演会要旨

数量的思考と統計教育

竹内 啓[†]

(2001 年 11 月 7 日, 統計数理研究所 講堂)

今日は「統計教育」が主題であるが、「統計」に行く前に「数量教育」について考えたい。
わが国の教育において欠けているのは(といってもそれが日本だけというつもりはないが)「数量的思考」あるいは「数量的認識に基づいて合理的に考えること」ではないかと思う。「数量的思考」は「数学的思考」と同じものではない。「数学的思考」は論理的整合性を唯一の基準とするが、「数量的思考」においてはもちろん論理性も重要ではあるが、より大切なのは現実の世界との関連性である。それについていくつかのポイントがある。

1. 「数量」というが、「数」すなわち「個数」と本来の量すなわち「連続量」は明確に区別しなければならない。「数」は対象が独立の単位として「数え上げられる」ことを意味し、「量」は対象の均質性を前提として、一定の基準を単位として「測られる」ことを必要とする。「個数」においては、対象が均一であることを必ずしも要求しない。「4 人家族」は「お父さんとお母さんとボクと妹」であって、それは「1 人の男と 1 人の女と 1 人の男の子と 1 人の女の子」からなっているわけである。これに対して「量」は長さや重さのように一定の基準尺度にもとづいてその何倍と定義されるので、3m の紐は 1m の紐 3 つに分けることができるが、その長さはどれも完全に同じでなければならない。

2. また量はいくつかの均一な部分にいくらでも分割できる。例えば 3m の紐はそれぞれ 50cm の長さの 6 本の紐に分割することができる。しかし「3 人家族」を「0.5 人ずつ」の 6 つに分けることは不可能である。

更に現実の数量については次のような点を理解する必要がある。

1. 現実の数量は数値として表されるが、数値としてはつねに「あいまいさ」「不確実性」「変動性」をふくんでいる。したがって一定のケタ数しか意味をもたないこと、このような「不確実性」はいわゆる観測の「誤差」や「偏り」ではなく、むしろ対象そのものの量としての変動性によるものであることを理解しなければならない。例えばある人の体重をグラム単位まで測っても無意味である。

2. 「数量」はつねに具体的な計測の過程と結びつかなければ意味がない。あるいは計測の方法が具体的に定められて初めて意味を持つといってもよい。例えば「知能指数」はその人の知能の程度を数量的に表現したものと考えるのは誤りである。人の「知能の大きさ」なるものがどこかに存在しているわけではない。「知能指数」あるいは「IQ」は特定のテストにおける得点にすぎないものであって、それ以上の意味はない。「国内総生産 GDP」についてもその具体的な意味は把握しがたいところがある。

[†] 明治学院大学 国際学部：〒244-8539 神奈川県横浜市戸塚区上倉田町 1518

3. 「数量」はほとんどすべての場合、単一の値だけでは意味がなく、他の量と対比させて初めて意味するところが明確になる。全体に占める比率、他の量との比、前期からの変化率等々を計算することが大切である。その場合適切な対比をしなければならない。例えばアメリカと中国では国土面積はほとんど同じだが、人口は中国がアメリカのほぼ5倍である。したがって人口密度は中国がアメリカの5倍となる。さらに耕地面積は中国はアメリカの3分の2しかない。したがって1人あたり耕地面積は7.5分の1ということになる。

4. 2つ以上の数量について、単に固定的な関係だけでなく、一方が変化する場合の関係を考えることが重要である。最も簡単な関係は比例である。それは2つの量 x, y について $y = ax$ と表されるが、これをやや一般化すると

$$(1) y = ax + b$$

$$(2) y = ba^x \text{ または } \log y = \log b + x \log a$$

$$(3) y = bx^a \text{ または } \log y = \log b + a \log x$$

という3つの形が得られる。(2)は x がある量増加すると y が一定倍になる関係、(3)は x が例えば c 倍になると y が k 倍になるという関係を表している。このような関係も現実にはしばしば現れる。対数概念は(計算機が出現する前のように)計算の手段としてではなく、数量の間の関係の表現のために重要である。

5. ある数量が直接観測されていない場合、いろいろな知識と、知られている数量からその大体の大きさを「推量」することができなければならない。例えば清水所長が話された例について、小さな球が「10万個ある」ということをどのようにして確かめたらよいだろうか。一つ一つ数え上げるのは大変であるが、最後の1ヶケまで厳密に数える必要はなく「ほぼ10万個」つまり「9万9000個(あるいは9万9900個)以上10万1000個(あるいは10万100個)以下」であることを確かめるとすれば、どうすればよいだろうか。「体積」を測る、「重さ」を測る等いろいろな方法が考えられるが、それぞれの場合に正しい答えを出すためには、どのようなことを注意しなければならないだろうか。かつて「新数学教育」なるものが流行したときには、数量教育という点からは有害なことが多く教えられた。例えば「1対1対応」を強調して「基数」と「序数」の区別を重視したのはよいとしても、「量」を「基数」と同一視してしまう傾向があった。しかも「基数」を教えるとき、対象となる集団の均一性をことさら否定したので、「量」の理解は混乱したのは当然であったと思う。2mの紐は1mの紐の2倍であるというのは「量」の世界のことで、いずれも「基数」としては「同じ無限個の点」からなっていると教えたのでは、「量」の概念が正しく理解されるはずはない。「量」は数学的にいえば「測度」であって「基数」ではないのである。初等中等教育において「測度」などをわざわざ持ち出す必要はないが、「基数」と「測度」の区別はしっかり前提としておかなければならない。

しばしば「学力低下の象徴」として扱われる「 $1/2 + 1/3 = 2/5$ 」という間違いにしても分数を量としてはっきり教えないことが大きな原因ではないかと思う。「饅頭半分と饅頭 $1/3$ をもらったら、饅頭 $2/5$ をもらうことと同じになる」とは利口な猿なら思わないであろう。ところが[分数]を「2項関係としての2つの数の比の値」であるなどという教え方をすれば「1:2, つまり2つのうちの1つ」と「1:3, すなわち3つのうちの1つ」を一緒にしたら「2:5, つまり5つのうちの2つ」になるのはごく自然である。

以上のような点に関する「感覚」を育てる教育は極めて不十分であると思う。数学教育の中で「厳密な論理で構成されている数学の世界」と「現実の数量の世界」とをはっきり区別して捉えた上で、前者は後者の「モデル」であることを理解させる必要がある。例えば最近問題になっている「 $\pi \div 3$ としてもよいか」という議論などは、論理の世界で考えるのか現実の世界で考えるのかによって根本的に異なる。実は論理の世界での「 π 」の意味を小学生に(中学生

であっても)正確に伝えることは極めて困難である(「曲がった線の長さ」を論理的に定義しようとするば「極限」概念を避けることはできないし、 $\pi = 3.1415\dots$ と無限に続くことの意味を理解させなければならないからである)。現実の世界、例えば「円いものを縛るのに必要な紐の長さ」などの話ならば $\pi = 3$ とすると紐が実際に短すぎてしまうが、 $\pi = 3.14$ とすれば十分であるとするところができる(そのことは例えばボール紙を丸めて直径 10 cm の円筒を作るときに必要とされるボール紙の幅は、 $\pi \times 10 = 31.4$ cm とすればよいことを意味し、これを 30 cm としては足りなくなるが、31.4159 cm などとすることは馬鹿げていることを示唆しているのである)。

更に数学教育者の中で、なおざりにされがちな、しかし数量教育の点からは重要な点がいくつかある。

「現実の世界」にある「数量」については必ず「単位」をつけること(単位のない「無名数」はそれとして扱うこと)、また具体的な対象についての答えは必ず小数表示にすること、例えば三角錐の漏斗に入る水の量は $200\pi/3$ cm³ とか、ある形の土地の面積 $100(\pi/6 - \sqrt{3}/8)$ cm² などを「答え」としてしまっはいけない。

数学教育の中で「概数」や「近似値」などの扱い、「有効数字」の考え方などは、もっとくわしく取り上げるべきであり、それを単に計算の便宜上のこととしてしまうべきではない。そうすると電卓や計算機が使われるようになると無意味に多くのケタ数を出すことになりやすい。

統計教育は数量教育の延長として扱わなければならない。すなわち「集団的な数量」と「その中のばらつき」ということが統計の基本概念である。「確率」や「統計的推測」は「ばらつき」を厳密に処理するための数学的装置、すなわち「ばらつき」に対する「数学的モデル」にほかならない。そうして統計はあくまで現実の数量を対象とするものであって、数字の論理の世界を扱うものでないことを銘記すべきである。つまり統計の対象となるのは単なる「数値」ではなく、現実の「数量」あるいはその「観測値」であること、したがって具体的な単位を持ち、また本来「観測誤差」以前のあいまい性、変動性を持つものであること、したがって統計的処理の結果得られるものも「数学的モデルの中の母数」の「推定値」ではなく、現実の対象についての「不確定性」をふくんだ判断であること、その「不確定性」は検定の有為水準や、区間推定の信頼係数などで表されるものだけではないこと、それを評価するには現実の具体的な対象に対する理解が重要であること等々の点が強調されなければならない。

そうして数理統計の論理を適用するためには、それが有効に適用できるような条件を作り出すことが必要であることを強調する必要がある、すなわち

1. なるべく対象集団を均質なものとすること、不均質な対象は分別すること、あるいは外部的な条件をできるだけ一定にすること
2. ばらつきを小さくするために同じ条件の下での観測を増すことが要請される

これに

3. 外部的な要因の影響を確率的なものとするために無作為化を導入すること

を加えたものがフィッシャーが確立した統計的実験計画法の三原則であるが、それは決して高度に抽象的な論理ではなく、むしろ常識的といってよい数量的思考の延長上にあることを理解すべきである。