統計数理（2003）
第 51 巻 第 1 号 167–172

［原著論文］

ジャンケンの厳密な待ち時間分布と性質

平野 勝臣[1,2] ・安芸 重雄[3]

（受付 2002 年 12 月 26 日；改訂 2003 年 3 月 11 日）

要　　旨

n 人でジャンケンを行い，勝ち負けが決まり，再び勝者だけでジャンケンを行う．このようにして最後の勝者一人が決まるまでジャンケンを続けたときの待ち時間(ジャンケンの回数)の厳密分布の確率生成母関数を陽の形で与える．n 人からはじめて最後の勝者一人が決まるまでの勝者の数を記録した各事象に対し，最も起こりやすい事象とその確率を与える．また n 人で j 回ジャンケンをしたときの勝ち残った人数の分布を与える．

キーワード：ジャンケン，待ち時間分布，確率生成母関数.

1.　ジャンケンの待ち時間の厳密分布

連に関する統計量の分布を調べるために確率生成母関数は強力な道具であることを報告してきた(平野・安芸(1999))．このようなタイプ以外では k-match problems の適用事例がある(Hirano and Aki (2003))．ここではジャンケンの待ち時間分布を求める問題に適用した事例を報告する．1 節でジャンケンの待ち時間分布の確率生成母関数を陽の形で与える．2 節ではジャンケンに関するいくつかの性質を与える．

Maehara and Ueda (2000)は n 人でジャンケンを行い最後の勝者一人が決まるまでのジャンケンの回数 W_n の分布を調べ，確率およびモーメントの漸化式を与え，$(2/3)^n W_n$ が漸近的に平均 1/3 の指数分布に従うことを示した．ここでは W_n の厳密な分布を調べるために $\phi_n(t) = E(t^{W_n})$ を陽の形で与える．

$n(\geq 2)$ 人で 1 回ジャンケンをして $i(1 \leq i \leq n)$ 人残る確率を $p_{n,i}$ とし，k を $1 \leq k \leq n-1$ を満たす整数とする．また各人はグー，チョキ，パーを確率 1/3 で他の人と独立に選び，また各回独立と仮定する．そのとき

$$p_{n,k} = \frac{\binom{n}{k}}{3^{n-1}}, \quad p_{n,n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k} = 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

である．

定理 1． $\phi_n(t)$ は n に関する漸化式

$$\begin{cases} \phi_1(t) = 1 \\ \phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} t \phi_k(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

[1] 統計数理研究所：〒106-8569 東京都港区南麻布 4–6–7
[2] 総合研究大学院大学 数物科学研究科統計科学専攻
[3] 大阪大学大学院 基礎工学研究科：〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3

を満たす．

証明． 関係式

$$P(W_n = x) = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} P(W_k = x - 1)$$

が成り立つので，すぐに示される．

(1.1)の漸化式は便利である．(1.1)から順次 $\phi_n(t)$ を求め，それを展開すれば W_n の分布を求めることができる．また，両辺を t で微分すればモーメントの漸化式を求めることができる．2 回までの微分で Maehara and Ueda (2000)の漸化式を導くことができる．連などの問題で確率生成母関数を用いたときは何らかの工夫が必要であったが，ここではその必要のない簡単な適用例となっている．さらに，ここで述べているジャンケンは(日本では通常の)よく使われるジャンケンを指すが，他の種のジャンケンがあり(Maehara and Ueda (2000))，どのジャンケンでもそれによる待ち時間分布は漸化式(1.1)の各ジャンケンに応じた $p_{n,k}$ で決まる．

次に(1.1)の漸化式から $\phi_n(t)$ を陽の形で求める．$(n-1)$ 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 - p_{2,2}t & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -p_{3,2}t & 1 - p_{3,3}t & 0 & \ldots & 0 \\ -p_{4,2}t & -p_{4,3}t & 1 - p_{4,4}t & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{n,2}t & -p_{n,3}t & -p_{n,4}t & \ldots & 1 - p_{n,n}t \end{pmatrix}$$

とおくと, (1.1)から

$$A \begin{pmatrix} \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2,1}t \\ \vdots \\ p_{n,1}t \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

と表すことができる．A は逆行列を持つので, (1.2)の両辺に A^{-1} をかけて $\phi_n(t)$ を求める．すなわち，次の補題を用いると $\phi_n(t)$ を具体的に表すことができる．

補題． B を次のような下半三角行列とする．

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \ldots & b_{m,m} \end{pmatrix}.$$

B が正則なら，B^{-1} の (m, i) 成分は，次のように書ける．$i = 1, 2, \ldots, m-1$ に対しては,

$$\frac{(-1)^{m+i} \det B((i+1) : m, i : (m-1))}{b_{i,i} \cdots b_{m,m}},$$

$i = m$ に対しては $1/b_{m,m}$. ここで，行列 M に対して，$M(a : b, c : d)$ という記号は，M の第 i 行 $(i = a, a+1, \ldots, b)$ と第 j 列 $(j = c, c+1, \ldots, d)$ から成る小行列を表す．

行列 A に対して，補題を適用すれば証明するまでもなく直ちに次の結果を得る．

定理 2． n 人でジャンケンを行い，最後の勝者一人が決まるまでのジャンケンの回数の厳密分布の確率母関数は次のように与えられる．

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1)^{n+i-1} \det A((i+1):(n-1), i:(n-2)) p_{i+1,1} t}{(1-p_{i+1,i+1}t)\cdots(1-p_{n,n}t)} + \frac{p_{n,1}t}{1-p_{n,n}t}$$

ここで

$$A((i+1):(n-1), i:(n-2)) = \begin{pmatrix} -p_{i+2,i+1}t & 1-p_{i+2,i+2}t & 0 & \dots & 0 \\ -p_{i+3,i+1}t & -p_{i+3,i+2}t & 1-p_{i+3,i+3}t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{n-1,i+1}t & -p_{n-1,i+2}t & -p_{n-1,i+3}t & \dots & 1-p_{n-1,n-1}t \\ -p_{n,i+1}t & -p_{n,i+2}t & -p_{n,i+3}t & \dots & -p_{n,n-1}t \end{pmatrix}$$

である．

図 1 は，n=10 のときの確率関数のグラフである．

2. ジャンケンに関する性質

この節ではジャンケンに関する性質についてのべる．

成功の確率 p，試行数 n の二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X に対し，$X = 0$ と n を打ち切った分布，すなわち，確率関数

$$P(X = i) = \frac{1}{1-(1-p)^n - p^n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

を持つ分布を $B_{\{1,2,\dots,n-1\}}(n, p)$ とかく．このとき次の性質を持つ．

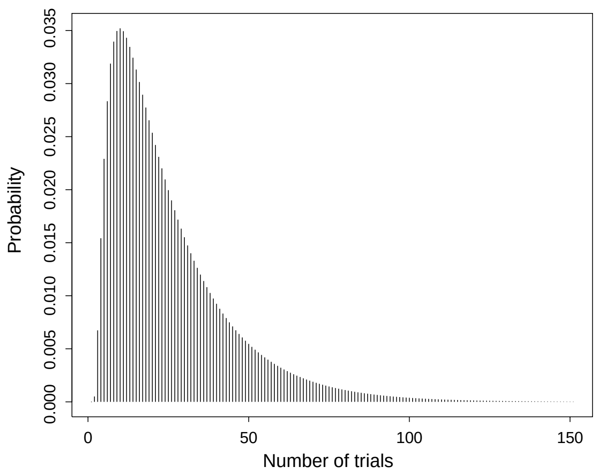

図 1．10 人のジャンケン．

性質 1． n 人でジャンケンをして，はじめて勝ち負けがついて(あいこでなく，1 人以上の負けが起こる)X 人が勝ち残るとするとき，X は $B_{\{1,2,\ldots,n-1\}}(n,1/2)$ に従う．

証明． これは

$$P(X=n_1)=p_{n,n_1}+p_{n,n}p_{n,n_1}+p_{n,n}^2p_{n,n_1}+\cdots=\binom{n}{n_1}\Big/(2^n-2)$$

からわかる．

n 人でジャンケンをして $n_1(n>n_1)$ 人が勝ち, 勝った n_1 人で再びジャンケンをして $n_2(n_1>n_2)$ 人が勝った. 以後, このようにして勝ち残った人でジャンケンをして 1 人の勝者になるまで続ける. 勝ち残った人数を順次並べた $n,n_1,\ldots,n_{\xi-1},1(n>n_1>\cdots>n_{\xi-1}>1)$ を減数パスと呼ぶことにする. ジャンケンによる自然数 n のこのような分割の総数について次の性質がある.

性質 2． 減数パスの総数は 2^{n-2} 通りある.

これは帰納法で容易に証明できる.
次に減数パスを $s_i^{(n)}, i=1,2,\ldots,2^{n-2}$ とかき，$P(s_i^{(n)})$ を求める．
各 n に対して減数パスの起こる確率を順次求めるとつぎのようになる.

$P((2,1))=1.$ $P((3,2,1))=1/2.$ $P((3,1))=1/2.$
$P((4,3,2,1))=1/7.$ $P((4,3,1))=1/7.$ $P((4,2,1))=3/7.$ $P((4,1))=2/7.$
$P((5,4,3,2,1))=1/42.$ $P((5,4,3,1))=1/42.$ $P((5,4,2,1))=3/42.$
$P((5,4,1))=2/42.$ $P((5,3,2,1))=1/6.$ $P((5,3,1))=1/6.$ $P((5,2,1))=1/3.$
$P((5,1))=1/6.$

n が大きくなるにつれ，これらの計算には時間がかかるようになる．
次に最も起こりやすい減数パスとその確率について調べる．$f_n=\max_{1\le i\le 2^{n-2}}P(s_i^{(n)})$ とおく. ただし $f_1=1$ とする． このとき次を得る．

性質 3． f_n は

$$(2^n-2)f_n=\max_{1\le k\le n-1}\left\{\binom{n}{k}f_k\right\}$$

で与えられる.

これは容易にわかる.
この性質から各 n に対して f_n とそのときの減数パスを求めると次のようになる.

$f_6=15/62,(6,2,1).$ $f_7=1/6,(7,2,1).$ $f_8=15/127,(8,4,2,1).$ $f_9=9/85,(9,4,2,1).$
$f_{10}=45/511,(10,4,2,1).$ $f_{11}=7/93,(11,5,2,1).$ $f_{12}=132/2047,(12,5,2,1).$
$f_{13}=11/210,(13,5,2,1).$ $f_{14}=45045/1015684,(14,6,2,1).$
$f_{15}=25025/677164,(15,6,2,1).$ $f_{16}=4290/145111,(16,6,2,1).$
$f_{17}=286/11565,(17,7,2,1).$ $f_{18}=2652/131071,(18,7,2,1).$

最後に n 人で j 回ジャンケンをして勝ち残った人数の分布を調べる．ただし j 回の前に 1 人になれば，残りの回数をその人ひとりでジャンケンをし，その人が勝ち残るものとする．n 人

で 1 回ジャンケンをして $n, n-1, \ldots, 1$ 人がそれぞれ勝ち残る確率 $p_{n,n}, p_{n,n-1}, \ldots, p_{n,1}$ を第一行に，$n-1$ 人で 1 回ジャンケンをして $n-1, n-2, \ldots, 1$ 人がそれぞれ勝ち残る確率 $p_{n-1,n-1}$, $p_{n-1,n-2}, \ldots, p_{n-1,1}$ を第二行に，以下同様にして，便宜上 1 人まで考えてできる次の行列を

$$T = \begin{pmatrix} p_{n,n} & p_{n,n-1} & p_{n,n-2} & \cdots & p_{n,1} \\ 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n-2} & \cdots & p_{n-1,1} \\ 0 & 0 & p_{n-2,n-2} & \cdots & p_{n-2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{1,1} \end{pmatrix}$$

とおく．また T^j の $(1,k)$ 成分を $\alpha(k;n,j)$ とかく．このとき次を得る．

性質 4． n 人で j 回ジャンケンをしたとき k 人勝ち残っている確率は

$$\alpha(n-k+1;n,j)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

で与えられる．

謝　辞

本研究は一部統計数理研究所共同研究（14-共研-2007）の補助を受けた．査読者の方々からは有益なコメントを頂いた．ここに記して感謝いたします．

参 考 文 献

平野勝臣，安芸重雄（1999）．確率生成母関数の活用，統計数理，**47**（1），105–118.

Hirano, K. and Aki, S. (2003). On k-match problems, *J. Statist. Plann. Inference*, **109**, 67–79.

Maehara, H. and Ueda, S. (2000). On the waiting time in a janken game, *J. Appl. Probab.*, **37**, 601–605.

Exact Distribution of Waiting Time of a Janken Game and Related Properties

Katuomi Hirano

(The Institute of Statistical Mathematics;
Department of Statistical Science, Graduate University for Advanced Studies)

Sigeo Aki

(Division of Mathematical Science, Graduate School of
Engineering Science, Osaka University)

Maehara and Ueda (2000, *J. Appl. Probab.*, **37**, 601–605) gave a lucid explanation of a janken game as follows: In the janken game, each player can choose one of the three strategies, S (scissors), P (paper) and R (rock) independently from other players; S wins against P, P wins against R, and R wins against S. The janken game started by n (≥ 2) players is a kind of survival game. If n is large, it probably takes many rounds. In a round, if just two strategies (say, S and P) are chosen by the participants of that round, then those who chose the weaker strategy (P) are losers, and have to retire from the rest of the game. If either just one strategy or all three strategies are chosen, then there are no losers, and all participants of that round participate in the next round. Started by n players in the first round, the game continues in this way until a sole survivor (winner) is left. Let W_n denote the number of rounds played through the game. We call W_n the *waiting time* of the janken game started by n players.

Let $\phi_n(t)$ be the probability generating function of W_n, that is $\phi_n(t) = E(t^{W_n})$. Let $p_{m,i}$ be the probability that in a round of the game i players survive from m players. Let k be a positive integer such that $1 \leq k \leq n-1$. Then, $p_{n,k} = \binom{n}{k}/3^{n-1}$ and $p_{n,n} = 1-((2^n - 2)/3^{n-1})$. Thus, we obtain the recurrence relation $\phi_1(t) = 1$ and $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} t \phi_k(t)$. From this relation we give an explicit form of $\phi_n(t)$. Several other properties of the janken game are investigated.

Key words: Janken game, waiting time distribution, probability generating function.