

# サンプルサイズの増加と共に変動する 複合極値統計量の分布の情報近似

松縄 規<sup>1,2</sup>・中村 好延<sup>2</sup>

(受付 2003 年 8 月 12 日; 改訂 2003 年 11 月 20 日)

## 要 旨

連続型一次元分布からの大きさ  $N$  の無作為標本に基づく  $n = n(N)$ -lower extremes 及び  $m = m(N)$ -upper extremes の確率分布の近似について, 関連する情報ネグトロピの持つ方向性に注意し, 関連諸科学の理論と整合する観点から行う. また, その際の近似誤差を K-L 情報量を精密に評価することにより与える. 主要な結果として,  $n(N)$ -lower extremes が, 情報ネグトロピ近似の意味での複合極値性を持つための必要十分条件は,  $N \rightarrow \infty$  の時  $n/N \rightarrow 0$  となることである, などを与える. 応用として, N. V. Smirnov の固定された  $n$  に対する標準化極値統計量の基本定理を, 標準化された  $n = n(N)$ -lower extremes の場合の修正情報量近似へ拡張する.

キーワード: 準極値統計量, 情報ネグトロピ近似, 修正情報近似, 近似主領域, 定量的誤差評価, 標準化極値基本定理.

## 1. はじめに

順序観測値の最大値 ( $m = 1$ ) または最小値 ( $n = 1$ ), いわゆる極値統計量の弱い意味での極限分布誘導の詳細な定性的研究は Gnedenko (1943) によりなされ, Smirnov (1949) がこれを,  $N$  に無関係に固定された,  $k$  番順序統計量の場合に拡張したことが知られている. これらを含む極値統計量に関する歴史的事項や関連するその後の発展は David (1981), Reiss (1989), Reiss and Thomas (1997) にかなり詳しく触れられている. しかし  $k = k(N)$  の場合の準極値の研究については特筆するほどの進展はなかった. Smirnov (1949) も準極値の漸近理論を予告はしたが果たせなかった. 問題の難しさは, 準極値分布の定義される基礎空間が, サンプルの大きさの増加と共に変動することにある. このため近似の過程で細心の注意が必要になる. しかしこの困難を克服して,  $N$  が増加する時おおよそ何個ほどの下側観測値が推測等に利用可能かを知ること, すなわちサンプルサイズが大きくなる時,  $n$  の相対的次元の大きさを知るとは理論および応用の両面から興味深い. 事実, この問題に取り組んだ若干の研究はあった (cf. Dronkers (1958), Matsunawa and Ikeda (1976), Reiss (1981)). しかし, 近年筆者達が本論文で考えている, 物理的・数学的に適切な視座からの研究は今もってなされていないように思える. 以下で, このことに関連する幾つかの準備と近似の工夫をおこない, 従来の結果を拡張・改善する.

<sup>1</sup> 統計数理研究所: 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

<sup>2</sup> 総合研究大学院大学 統計科学専攻: 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

## 1.1 近似のモード

最初に、本論文で扱う確率分布列間の近似について、異なる強さのモード二種類を導入する。\$(R\_s, B\_s)\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) を考察の基礎とする可測空間の列とする。ここに、各 \$s\$ について、\$R\_s\$ は抽象空間、\$B\_s\$ は \$R\_s\$ の部分集合からなる \$\sigma\$-集合族を表す。\$\{X\_s\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{Y\_s\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) を上記可測空間上で定義される二つの確率変数列とする。これらのそれぞれに対応して、\$\{P^{X\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{P^{Y\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) を \$(R\_s, B\_s)\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 上で定義される確率分布列とする。また、\$\wp(R\_s, B\_s, \mu\_s)\$ で、\$(R\_s, B\_s)\$ 上で定義される \$\sigma\$-有限測度 \$\mu\_s\$ に関して絶対連続な全ての確率変数からなる集合族を表す。この時、上の二つの確率分布列のそれぞれに対応して、\$\{f\_{X\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{f\_{Y\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) で、各 \$s\$ について、\$\mu\_s\$ に関する Radon-Nikodym 導関数 (gpdf[\$\mu\_s\$]) を表すものとする。以上の設定の下で、確率分布列間に K-L 情報量を基盤とする二つの情報近似の近似概念とそれらと密接に関連する近似のモードに触れておく。

## (a) 情報ネグトロピ近似

二つの確率変数列 \$\{X\_s\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{Y\_s\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) が \$\wp(R\_s, B\_s, \mu\_s)\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) に属するとする。それぞれの gpdf[\$\mu\_s\$]、\$\{f\_{X\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{f\_{Y\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) が、各 \$s\$ について、共通の台 (support) として可測集合列 \$\{C\_s(\subseteq R\_s)\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) を持つものとする。この時、下記の条件(1.1)が成立するならば、\$\{P^{X\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) は \$\{P^{Y\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) によって情報ネグトロピの意味で方向近似 (directed approximation in the sense of full measure information-negentropy) されると呼ぶ：

$$(1.1) \quad I(Y_s, X_s; R_s) = \int_{C_s} f_{Y_s} \ln \frac{f_{Y_s}}{f_{X_s}} d\mu_s \rightarrow 0, \quad (s \rightarrow \infty).$$

この時、上の近似を次のように略記する：

$$(1.2) \quad X_s \rightsquigarrow Y_s \quad (I)_f, \quad (s \rightarrow \infty).$$

注 1.1. この近似モードは全変動距離による近似よりも強い近似である (1.1) での平均が近似分布 \$f\_{Y\_s}\$ で取っていることに特徴を有する。これは Boltzmann エントロピからのごく自然な拡張であり、これにより近似の方向性が現れる。

## (b) 修正情報近似

二つの確率変数列 \$\{X\_s\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{Y\_s\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) が \$\wp(R\_s, B\_s, \mu\_s)\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) に属するとする。それぞれの gpdf[\$\mu\_s\$]、\$\{f\_{X\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) 及び \$\{f\_{Y\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) が、各 \$s\$ について、\$(R\_s, B\_s)\$ 上で \$f\_{X\_s} > 0\$ 及び \$f\_{Y\_s} > 0\$ となる可測集合の列 \$\{A\_s(\subseteq R\_s)\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) を持つものとする。この時、下記の条件(1.3)及び(1.4)が同時に成立するなら、\$\{P^{X\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) は \$\{P^{Y\_s}\}\$ (\$s = 1, 2, \dots\$) によって修正情報の意味で近似 (approximation in the sense of modified information) されると呼ぶ：

$$(1.3) \quad I^*(Y_s, X_s; A_s) = \int_{A_s} f_{Y_s} \ln \frac{f_{Y_s}}{f_{X_s}} d\mu_s \rightarrow 0, \quad (s \rightarrow \infty),$$

$$(1.4) \quad P^{Y_s}(A_s) \rightarrow 1, \quad (s \rightarrow \infty).$$

この時、上の近似を次のように略記する：

$$(1.5) \quad X_s \rightsquigarrow Y_s \quad (I^*)_m, \quad (s \rightarrow \infty).$$

注 1.2. この近似モードは (a) の場合よりも明らかに弱い．しかし具体的な問題において (b) の近似モードが適切なことが多い．(b) は数学的には全変動距離や affinity による近似と  $s \rightarrow \infty$  の漸近的な強さは同等となる．しかし，一般に解析的な扱い易さを持つという数学的優位さ及び方向性を意識した近似を考え得るという物理的長所がある．なお，条件(1.3)及び(1.4)を同時に満たす可測集合  $A_s$  を当該近似問題の近似主領域(an approximate main domain)と呼ぶ．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 章で以下の解析が必要となるガンマ関数及び不完全ガンマ関数比の評価についていくつかの補題としてまとめてある．第 3 章で本稿の基盤となる一次元一様分布からの順序統計量の  $n(N)$ -lower extremes  $U_{N,n}$  の分布及びそれと定義域が同一の近似確率ベクトル  $\hat{U}_{N,n}$  の分布の想定と基礎的な解析等を行う．第 4 章では，前章で考えた近似ベクトル  $\hat{U}_{N,n}$  及び被近似ベクトル  $U_{N,n}$  の確率分布間の K-L 情報量についての計算と精密な評価を行う．また，その結果に基づいて， $U_{N,n}$  が情報ネグントロピの意味で  $\hat{U}_{N,n}$  によって近似されること，そしてそのための必要十分条件，定量的誤差評価を論じる．結果を定理 4.1 にまとめる．対応する一様分布からの  $m(N)$ -upper extremes  $\hat{V}_{N,n}$  についての結果，及び一般の一次元連続型分布からの対応諸結果も与える．第 5 章では， $U_{N,n}$  に対する近似確率ベクトルとして  $\hat{U}_{N,n}$  を簡素化し定義域を拡張した  $\check{U}_{N,n}$  を導入し，両者の分布間の近似を考察する．近似主領域の設定と修正情報量の評価を行い，第 4 章に対応する，弱いが応用上有用な諸結果を与える．第 6 章では，前章で扱った修正情報量近似の強さの意味で，N. V. Smirnov (1949) による  $n(\text{fix})$ -番標準化極値分布に関する基本定理を標準化  $n(N)$ -lower extremes の場合に拡張する．

## 2. 必要補題

以下の補題における評価不等式が次章の解析に必要となる．補題 2.1 は Matsunawa (1977) の Lemma 2.2，補題 2.2 は松縄・武井(1999)の定理 2.1[a.1] を変形して与え得る．詳細は省略する．

補題 2.1.  $x > 0$  に対して

$$(2.1) \quad \ln \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{12x} - R^\#(x)$$

が成立する．ここに

$$(2.2) \quad R^\#(x) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{a_i}{x(x+1)\cdots(x+i-1)}$$

であり，その係数は

$$(2.3) \quad a_i = \frac{1}{i} \int_0^1 t(1-t)(2-t)\cdots(i-1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) dt \quad (i \geq 3)$$

で与えられる．誤差項は次のように評価される：

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \underline{R}^\#(x) &:= \frac{8x^3 + 63x^2 + 179x + 180}{2880x(x+1)^2(x+2)^2(x+3)} < R^\#(x) \\ &< \frac{8x^4 + 117x^3 + 491x^2 + 774x + 540}{2880x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)} =: \overline{R}^\#(x). \end{aligned}$$

補題 2.2.  $K, k$  を  $K/k > 1$  なる二つの正整数とする. この時, 次の不完全ガンマ関数比

$$(2.5) \quad \gamma_{K,k} := \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^K y^{k-1} e^{-y} dy$$

に関し, 次の不等式評価が成立する:

$$(2.6) \quad \underline{\gamma}_{K,k} < \gamma_{K,k} < \bar{\gamma}_{K,k}.$$

ただし, ここに

$$(2.7) \quad \bar{\gamma}_{K,k} = 1 - \left\{ 1 - \left( \frac{1}{1+k/K} \right)^k \right\} \cdot \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} \ln \left( 1 + \frac{k}{K} \right) \right\} \right],$$

$$(2.8) \quad \underline{\gamma}_{K,k} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{k}{K} \right) \cdot \exp \left[ -K \left\{ \left( 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} \right) - \frac{1}{2K} \ln k \right\} - \frac{1}{12k} + \bar{R}^\#(k) \right].$$

上記の二つの補題から, 後述の情報量の評価に必要となる, 二つの不完全ガンマ関数比の比の大きさを評価するための次の不等式群及びその応用としての漸近的結果を得る:

補題 2.3. (a)  $K, k$  を  $K/k > 1$  なる二つの正整数とする. この時

$$\frac{\gamma_{K,k+1}}{\gamma_{K,k}} < 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} - \frac{\ln k}{2K} \right\} - \frac{1}{12k} + \bar{R}^\#(k) \right]}{1 - \left\{ 1 - \left( \frac{1}{1+k/K} \right)^k \right\} \cdot \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} \ln \left( 1 + \frac{k}{K} \right) \right\} \right]},$$

$$\frac{\gamma_{K,k+1}}{\gamma_{K,k}} > 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} - \frac{\ln k}{2K} \right\} - \frac{1}{12k} + \bar{R}^\#(k) \right]}{1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{k}{K} \right) \cdot \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} - \frac{\ln k}{2K} \right\} - \frac{1}{12k} + \bar{R}^\#(k) \right]},$$

$$\frac{\gamma_{K,k}}{\gamma_{K,k+1}} < 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} - \frac{\ln k}{2K} \right\} - \frac{1}{12k} + \bar{R}^\#(k) \right]}{1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{k+1}{K} \right) \cdot \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k+1}{K} \ln \frac{k+1}{K} - \frac{k+1}{K} - \frac{\ln(k+1)}{2K} \right\} - \frac{1}{12(k+1)} + \bar{R}^\#(k+1) \right]},$$

$$\frac{\gamma_{K,k}}{\gamma_{K,k+1}} > 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k}{K} \ln \frac{k}{K} - \frac{k}{K} - \frac{\ln k}{2K} \right\} - \frac{1}{12k} + \bar{R}^\#(k) \right]}{1 - \left\{ 1 - \left( \frac{1}{1+(k+1)/K} \right)^{k+1} \right\} \cdot \exp \left[ -K \left\{ 1 + \frac{k+1}{K} \ln \frac{k+1}{K} - \frac{k+1}{K} \ln \left( 1 + \frac{k+1}{K} \right) \right\} \right]}.$$

(b)  $N, n$  を  $N/n > 1$  なる二つの正整数とする.  $n/N \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$  の時, 次の漸近的な結果が成立する:

$$\frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(N+1)}; \quad \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}} \sim 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(N+1)},$$

$$\frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n+1}} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(N+1)}; \quad \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n+1}} + \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}} - 2 \sim -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(N+1)}.$$

### 3. 設定, 記号

$X_{N,1} < \dots < X_{N,N}$  を, 1次元実空間で pdf.  $f(x)$  及び狭義単調非減少な cdf.  $F(x)$  を持つ連続型一次元分布からの大きさ  $N$  の無作為標本に基づく順序統計量とする.  $U_{N,i} = F(X_{N,i}), i =$



$0 < x_i < 1, 0 < z_i < 1, (i = 1, \dots, n), x_1 + \dots + x_n < 1$  に注意しておく. この変換の Jacobian は次のように与えられる.

$$J := J(\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{z}_n) = z_1^{n-1} z_2^{n-2} \dots z_{n-2}^2 z_{n-1} (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

ここで,  $\mathbf{u}_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $(0 < u_1 < \dots < u_n < 1)$ ,  $\mathbf{x}_n := (x_1, x_2, \dots, x_n)$  及び  $\mathbf{z}_n := (z_1, z_2, \dots, z_n)$  を表す. 積分を実行して,

$$\begin{aligned} \int_{0 < u_1 < \dots < u_n < 1} \hat{g}_N(\mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_n &= \iint_{\substack{x_i > 0 \ (i=1, \dots, n) \\ x_1 + \dots + x_n < 1}} \dots \int \frac{(N+1)^n}{\gamma_{N+1,n}} e^{-(N+1)(x_1+x_2+\dots+x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{(N+1)^n}{\gamma_{N+1,n}} \iint_{0 < z_i < 1 \ (i=1, \dots, n)} \dots \int e^{-(N+1)z_1} |J| dz_1 dz_2 \dots dz_n \\ &= \frac{(N+1)^n}{\gamma_{N+1,n}} \int_0^1 dz_n \int_0^1 z_{n-1} dz_{n-1} \int_0^1 z_{n-2}^2 dz_{n-2} \dots \\ &\quad \times \int_0^1 z_2^{n-2} dz_2 \int_0^1 e^{-(N+1)z_1} z_1^{n-1} dz_1 \\ &= \frac{1}{\gamma_{N+1,n}} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{N+1} e^{-t} t^{n-1} dt = 1. \end{aligned}$$

よって,  $\hat{g}_N(\mathbf{u}_n)$  の規格性が確かめられた. 上記変換(3.7)を用いると,

$$(3.8) \quad E_{\hat{g}_N}[U_{N,n}] = \int_{0 < u_1 < \dots < u_n < 1} u_n \hat{g}_N(\mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_n = \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \cdot \frac{n}{N+1}.$$

このことから, (3.5) で触れた  $\hat{g}_N^*(\mathbf{u}_n)$  を用いると

$$(3.9) \quad E^*[U_{N,n}] := \int_{0 < u_1 < \dots < u_n < 1} u_n \hat{g}_N^*(\mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_n = \frac{n}{N+1} = E_{g_N}[U_{N,n}]$$

となり, 後述の関連する情報量の計算に好都合となる.

同様に,  $m(N)$ -upper extremes についても並行する結果を得る.

#### 4. 情報量 $I(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n})$ の評価 と準極値群の情報ネグントロピ近似分布

$U_{N,n}$  と  $\hat{U}_{N,n}$  の確率分布間の隔たりを評価するため, 情報ネグントロピに整合する, 次の K-L 情報量の利用を考える:

$$(4.1) \quad I(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n}) := \int_{A_{N,n}} \hat{g}_N(\mathbf{u}_n) \ln \frac{\hat{g}_N(\mathbf{u}_n)}{g_N(\mathbf{u}_n)} d\mathbf{u}_n$$

$$(4.2) \quad = \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} E^* \left[ \ln \frac{\hat{g}_N^*(\mathbf{u}_n)}{g_N(\mathbf{u}_n)} \right] - \ln \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}}.$$

ここに,  $E^*[\cdot]$  は

$$E^*[\cdot] := \int_{A_{N,n}} \hat{g}_N^*(\mathbf{u}_n) [\cdot] d\mathbf{u}_n$$

で定義され,  $A_{N,n} = \{\mathbf{u}_n; 0 < u_1 < \dots < u_n < 1\}$  上での,  $\hat{g}_N^*(\mathbf{u}_n)$  による不完全モーメントを表す. 式(4.2)中の gpdf's に, 該当する具体式を代入して

$$\begin{aligned} I(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n}) &= \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} [\ln\{(N-n)!(N+1)^n/N!\} - \ln \gamma_{N+1,n+1}] \cdot E^*[1] \\ &\quad - (N-n)E^*[\ln(1-U_{N,n})] - (N+1)E^*[U_{N,n}] - \ln \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}} \end{aligned}$$

となる．右辺第 1 項に関して，次のように若干の変形の後，補題 2.1 を利用すれば

$$\begin{aligned} \ln\{(N-n)!(N+1)^n/N!\} &= \ln\{(N-n+1)!/(N-n+1)\}\{(N+1)/(N+1)!\} \cdot (N+1)^n \\ &= \left(N-n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1-\frac{n}{N+1}\right) + n + \frac{1}{12(N-n+1)} - \frac{1}{12(N+1)} \\ &\quad - R^\#(N-n+1) + R^\#(N+1) \end{aligned}$$

と表現できる．関連して，

$$\begin{aligned} E^*[1] &= \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}}, \quad E^*[U_{N,n}] = \frac{n}{N+1}, \quad E^*[U_{N,n}^2] = \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n+1}} \cdot \frac{n(n+1)}{(N+1)^2}, \\ E^*\left[\left(U_{N,n} - \frac{n}{N+1}\right)^2\right] &= \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n+1}} \cdot \frac{n(n+1)}{(N+1)^2} - \left(2 - \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}}\right) \left(\frac{n}{N+1}\right)^2, \\ E^*[\ln(1-U_{N,n})] &= \ln\left(1 - \frac{n}{N+1}\right) - \left(\frac{n}{N+1}\right)^2 \left\{\frac{1}{2} \left(\frac{N+1}{N+1-n}\right)^2 + o(1)\right\} \\ &\quad \times \left[\frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(2 - \frac{\gamma_{N+1,n}}{\gamma_{N+1,n+1}}\right)\right] \end{aligned}$$

と表せることに注意して，

$$\begin{aligned} (4.3) \quad I(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n}) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + n \left( \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + 1 - 2 \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \frac{1 - (n+1)/(N+1)}{1 - n/(N+1)} \cdot \frac{1}{1 - n/(N+1)} \cdot \frac{n}{N+1} + \ln\left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \left. \right\} \\ &\quad + \frac{n}{12(N+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - n/(N+1)} - R^\#(N-n+1) + R^\#(N+1) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}}\right) \left\{ (N-n) \ln\left(1 - \frac{n}{N+1}\right) + n \right\} + o(1) \frac{n}{N+1} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{n+1}{N+1}\right) \left\{ \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + n \left( \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + 1 - 2 \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \right) \right\} - \ln \gamma_{N+1,n} \end{aligned}$$

と与えられる．ただし， $R^\#(\cdot)$  は補題 2.1 で定義した量である．

(4.3) 式および補題 2.2，補題 2.3 から， $N \rightarrow \infty$  の時， $n/N \rightarrow 0$  ならば  $I(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n}) \rightarrow 0$  が従うが，情報量の 0 への接近状況をもう少し詳しく知ることが可能である (4.3) 式の主要部分は右辺の最初の 2 行である．それぞれを Maclaurin 展開して，主要項のみを残せば，次の漸近的表現を得る：

$$(4.4) \quad I(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n}) \sim \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \left(\frac{n}{N+1}\right)^2, \quad \text{if } \frac{n}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

以上を考慮して，一様分布からの  $n(N)$ -lower extremes の漸近分布について，次の結果を得る：

定理 4.1. 次の条件

$$(4.5) \quad \frac{n(N)}{N} \rightarrow \text{as } N \rightarrow \infty$$

が満たされる時, またその時に限り

$$(4.6) \quad U_{N,n} \sim > \hat{U}_{N,n}, \quad (I)_f, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

が成立する.

証明. 十分性 ( $\Rightarrow$ ) は(4.3)あるいは(4.4)から明らか. 必要性 ( $\Leftarrow$ ) について, その対偶で示す.  $n(N_v)/N_v \rightarrow \lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ), as  $N \rightarrow \infty$  となる  $N$  の部分列  $\{N_v\}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) の存在を仮定する. まず,  $0 < \lambda < 1$  の時 (4.3) から

$$I(\hat{U}_{N_v, n(N_v)}, U_{N_v, n(N_v)}) \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{1-\lambda} + \ln(1-\lambda) \right\} \sim \frac{1}{4} \lambda^2 > 0, \quad (N \rightarrow \infty)$$

となる. したがって,  $\{U_{N,n} \sim > \hat{U}_{N,n}, (I)_f, \text{ as } N \rightarrow \infty\}$  は成立しない.  $\lambda = 1$  の時は (4.3) から  $I(\hat{U}_{N_v, n(N_v)}, U_{N_v, n(N_v)}) \rightarrow \infty, (N \rightarrow \infty)$  となる. よって定理が証明された.

この結果から, 分布関数  $F(x)$  を持つ元の分布からの順序統計量  $X_{N,1} < \dots < X_{N,N}$  について, その  $n(N)$ -lower extremes  $X_{N,n} = (X_{N,1}, \dots, X_{N,n})$  に関する一般的結果が得られる. 今,  $X$  の cdf.  $F(x)$  の逆関数を  $F^{-1}$  とし,  $(F^{-1}(\hat{U}_{N,1}), \dots, F^{-1}(\hat{U}_{N,n})) =: F^{-1}(\hat{U}_{N,n}) =: \hat{X}_{N,n}$  と記すと

定理 4.2. 条件(4.5)が成立する時, またその時に限り

$$(4.7) \quad X_{N,n} \sim > \hat{X}_{N,n}, \quad (I)_f, \quad (N \rightarrow \infty)$$

である. ここに,  $X_{N,n} = (X_{N,1}, \dots, X_{N,n})$  及び  $\hat{X}_{N,n} = (\hat{X}_{N,1}, \dots, \hat{X}_{N,n})$  の pdf. は,  $x_n = (x_1, \dots, x_n)$  に対し, それぞれ

$$(4.8) \quad g_N^*(x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} (1-F(x_n))^{N-n} \prod_{i=1}^n f(x_i), \quad (-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty),$$

$$(4.9) \quad \hat{g}_N^*(x_n) = \frac{(N+1)^n}{\gamma_{N+1,n}} e^{-(N+1)F(x_n)} \prod_{i=1}^n f(x_i), \quad (-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty)$$

で与えられる.

これより, 周辺分布を計算して, 第  $n(N)$  番順序統計量(準極値)の漸近的分布に関して次の結果を得る.

系 4.1. 条件(4.5)が満たされる時, またその時に限り

$$(4.10) \quad X_{N,n} \sim > \hat{X}_{N,n}, \quad (I)_f, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

が成立する. ここで,  $X_{N,n} := F^{-1}(U_{N,n})$ ,  $\hat{X}_{N,n} := F^{-1}(\hat{U}_{N,n})$  の pdf. はそれぞれ次のように与えられる:

$$(4.11) \quad g_N^*(x) = \frac{N!}{(N-1)!\Gamma(n)} F(x)^{n-1} (1-F(x))^{N-n} f(x), \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$(4.12) \quad \hat{g}_N^*(x) = \frac{(N+1)^n}{\gamma_{N+1,n}\Gamma(n)} \cdot e^{-(N+1)F(x)} F(x)^{n-1} f(x), \quad (-\infty < x < \infty).$$

上記各定理に対応する  $m(N)$ -upper extremes に関する結果が成り立つ：

定理 4.3. 次の条件

$$(4.13) \quad \frac{m(N)}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が満たされる時、またその時に限り

$$(4.14) \quad V_{N,m} \sim > \hat{Y}_{N,m}, \quad (I)_f, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が成立する。

定理 4.4. 条件(4.13)が満たされる時、またその時に限り

$$(4.15) \quad Y_{N,m} \sim > \hat{Y}_{N,m}, \quad (I)_f, \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成立する。ここに、 $Y_{N,m} = (Y_{N,1}, \dots, Y_{N,n})$  及び  $\hat{Y}_{N,m} = (\hat{Y}_{N,N-m+1}, \dots, \hat{Y}_{N,N})$  の pdf. は、 $\mathbf{y}_m = (y_1, \dots, y_m)$  に対しそれぞれ

$$(4.16) \quad h_N^*(\mathbf{y}_m) = \frac{N!}{(N-m)!} F(y_1)^{N-m} \prod_{i=1}^m f(y_i), \quad (-\infty < y_1 < \dots < y_m < \infty),$$

$$(4.17) \quad \hat{h}_N^*(\mathbf{y}_m) = \frac{(N+1)^m}{\gamma_{N+1,m}} e^{-(N+1)(1-F(y_1))} \prod_{i=1}^m f(y_i), \quad (-\infty < y_1 < \dots < y_m < \infty)$$

で与えられる。

系 4.2. 条件(4.13)が満たされる時、またその時に限り

$$(4.18) \quad Y_{N,N-m+1} \sim \hat{Y}_{N,N-m+1}, \quad (I)_f \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が成立する。ここで、 $Y_{N,N-m+1} := F^{-1}(V_{N,N-m+1})$ ,  $\hat{Y}_{N,N-m+1} := F^{-1}(\hat{V}_{N,N-m+1})$  の pdf. はそれぞれ次のように与えられる：

$$(4.19) \quad h_N^*(y) = \frac{N!}{(N-m)!\Gamma(m)} \cdot F(y)^{N-m} (1-F(y))^{m-1} f(y), \quad (-\infty < y < \infty),$$

$$(4.20) \quad \hat{h}_N^*(y) = \frac{(N+1)^m}{\gamma_{N+1,m}\Gamma(m)} e^{-(N+1)(1-F(y))} (1-F(y))^{m-1} f(y), \quad (-\infty < y < \infty).$$

## 5. 準極値群分布の修正情報量近似

第4章で、密度関数  $\hat{g}_N(u_1, \dots, u_n)$ ,  $(0 < u_1 < \dots < u_n < 1)$  及び  $\hat{h}_N(v_1, \dots, v_m)$ ,  $(0 < v_1 < \dots < v_m < 1)$  がそれぞれ  $n(N)$ -lower extremes 及び  $m(N)$ -upper extremes の情報ネグントロピ近似の強さでの一様近似分布であることなどを見た。本章では、それよりは弱いがお有効な修正情報量近似の意味での準極値群分布の一様近似分布を考察する。

一様分布からの順序統計量の  $n(N)$ -lower extremes  $U_{N,n} := (U_{N,1}, \dots, U_{N,n})$  の pdf. は  $\mathbf{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$  に対して

$$(5.1) \quad g_N(\mathbf{u}_n) = \frac{N!}{(N-n)!} (1-u_n)^{N-n}, \quad (0 < u_1 < \dots < u_n < 1)$$

と与えられた(3.1)式再録). これに対し, 次の関数を近似の候補として取り上げる:

$$(5.2) \quad \check{g}_N(\mathbf{u}_n) = (N+1)^n e^{-(N+1)u_n}, \quad (0 < u_1 < \cdots < u_n < \infty).$$

これは(3.3)の,  $\hat{g}_N(\mathbf{u}_n)$ ,  $(0 < u_1 < \cdots < u_n < 1)$  から, 規格化定数  $\gamma_{N+1,n} (\rightarrow 1, \text{ as } N \rightarrow \infty)$  を落とし, その代わり定義域を  $(0 < u_1 < \cdots < u_n < \infty)$  に拡張して構成されている. 結果として  $\check{g}_N(\mathbf{u}_n)$  は  $\hat{g}_N(\mathbf{u}_n)$  よりも簡潔な形をしている. 変換(3.7)を利用すれば

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & \int_{0 < u_1 < \cdots < u_n < \infty} \check{g}_N(\mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_n \\ &= \iint_{\substack{x_i > 0 \ (i=1, \dots, n) \\ x_1 + \cdots + x_n > 0}} \cdots \int (N+1)^n e^{-(N+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= (N+1)^n \iint_{\substack{0 < z_i < 1 \ (i=2, \dots, n) \\ z_1 > 0}} \cdots \int e^{-(N+1)z_1} z_1^{n-1} z_2^{n-2} \cdots z_{n-2} z_{n-1} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n-1} (N+1)^n \int_0^\infty e^{-(N+1)z_1} z_1^{n-1} dz_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = 1. \end{aligned}$$

よって  $\check{g}_N(\mathbf{u}_n)$  は実は一つの pdf. であることが分かる. そこでこれに対応する,  $n = n(N)$ -次元確率ベクトルを  $\check{U}_{N,n} = (\check{U}_{N,1}, \dots, \check{U}_{N,n})$  と記す. 以下で  $\check{U}_{N,n}$  が  $U_{N,n}$  を修正情報の意味で近似することを考える. この場合の近似主領域の候補として,  $U_{N,n}$  の台そのものを取ってみる:

$$(5.4) \quad A_{N,n} = \{\mathbf{u}_n = (u_1, \dots, u_n); 0 < u_1 < \cdots < u_n < 1\}.$$

直前の計算の最終段階を変更すれば

$$(5.5) \quad P^{\check{U}_{N,n}}(A_{N,n}) = \int_{0 < u_1 < \cdots < u_n < 1} \check{g}_N(\mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_n = \frac{(N+1)^n}{\Gamma(n)} \int_0^1 e^{-(N+1)z_1} z_1^{n-1} dz_1 = \gamma_{N+1,n}$$

となるから, 補題 2.2 により,  $\underline{\gamma}_{N+1,n} < P^{\check{U}_{N,n}}(A_{N,n}) < \bar{\gamma}_{N+1,n}$  となり, 不等式(2.7)(2.8)を援用して

$$(5.6) \quad P^{\check{U}_{N,n}}(A_{N,n}) \rightarrow 1, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が言える. すなわち, 修正情報近似に於ける条件(1.4)が満たされたから,  $A_{N,n}$  は当該近似問題の近似主領域の資格を持つ. もう一つの条件(1.3)の該当条件について検討する. 前章に倣って計算を実行すると,  $A_{N,n}$  上での修正情報量  $I^*(\check{U}_{N,n}, U_{N,n}; A_{N,n})$  は

$$(5.7) \quad \begin{aligned} & \gamma_{N+1,n}^{-1} I^*(\check{U}_{N,n}, U_{N,n}; A_{N,n}) = I^*(\hat{U}_{N,n}, U_{N,n}; A_{N,n}) + \ln \gamma_{N+1,n} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left\{ \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + n \left( \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + 1 - 2 \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \right) \right\} \right. \\ & \quad \times \frac{1 - (n+1)/(N+1)}{1 - n/(N+1)} \cdot \frac{1}{1 - n/(N+1)} \cdot \frac{n}{N+1} + \ln \left( 1 - \frac{n}{N+1} \right) \left. \right] \\ & \quad + \frac{n}{12(N+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - n/(N+1)} - R^\#(N-n+1) + R^\#(N+1) \\ & \quad + \left( 1 - \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \right) \left\{ (N-n) \ln \left( 1 - \frac{n}{N+1} \right) + n \right\} \\ & \quad + o(1) \frac{n}{N+1} \left( 1 - \frac{n+1}{N+1} \right) \left\{ \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + n \left( \frac{\gamma_{N+1,n+2}}{\gamma_{N+1,n}} + 1 - 2 \frac{\gamma_{N+1,n+1}}{\gamma_{N+1,n}} \right) \right\} \end{aligned}$$

と求まる．補題 2.2, 2.3 を考慮すれば

$$(5.8) \quad I^*(\check{U}_{N,n}, U_{N,n}; A_{N,n}) \rightarrow 0, \quad \text{if } n/N \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

よって，次の結果を得る：

定理 5.1. 条件

$$(5.9) \quad \frac{n(N)}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が満たされる時，

$$(5.10) \quad U_{N,n} \sim \check{U}_{N,n}, \quad (I^*)_m, \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成立する．

上記に並行して， $m(N)$ -upper extremes  $V_{N,m} := (U_{N,N-m+1}, \dots, U_{N,N})$  についても情報近似が成立する．その pdf. は  $v_m = (v_1, \dots, v_m)$  に対して

$$(5.11) \quad h_N(v_m) = \frac{N!}{(N-m)!} v_1^{N-m}, \quad (0 < v_1 < \dots < v_m < 1)$$

と与えられた((3.2)式再録)．これに対し，次の関数を近似の候補として取り上げる：

$$(5.12) \quad \check{h}_N(v_m) = (N+1)^m e^{-(N+1)(1-v_1)}, \quad (0 < v_1 < \dots < v_m < \infty).$$

これが pdf. であることは(3.7)に準じた変換を用いて確かめ得る．この時， $\check{h}_N(v_m)$  を pdf. として持つ確率ベクトルを  $\check{V}_{N,m} := (\check{U}_{N,N-m+1}, \dots, \check{U}_{N,N})$  と記す．ここで

$$B_{N,m} = \{v_m = (v_1, \dots, v_m); 0 < v_1 < \dots < v_m < 1\}$$

を考えれば， $P^{\check{V}_{N,m}}(B_{N,m}) \rightarrow 1, (N \rightarrow \infty)$  及び  $I(\check{V}_{N,m}, V_{N,m}; B_{N,m}) \rightarrow 0, (N \rightarrow \infty)$  が示せるから，次の結果を得る．

定理 5.2. 条件

$$(5.13) \quad \frac{m(N)}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が満たされる時，

$$(5.14) \quad V_{N,m} \sim \check{V}_{N,m}, \quad (I^*)_m, \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成立する．

注 5.1. 条件(5.9) (5.13)は定理の十分条件であるが，必要条件ではない．これは例えば，(5.6)が補題 2.2 から， $N \rightarrow \infty$  のみで成立することによる．この点に前章で扱った情報ネグトロピの意味での近似と本章での情報近似の意味での近似との強さの差が現れている．

系 4.1 に対応する，第  $n(N)$  番極値統計量の結果のみを記すことにする．

系 5.1. 条件(5.9)が満たされる時，

$$(5.15) \quad X_{N,n} \sim \check{X}_{N,n}, \quad (I^*)_m, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

が成立する．ここで， $X_{N,n} := F^{-1}(U_{N,n})$  の pdf.  $\check{X}_{N,n}$  の gpdf. はそれぞれ次のように与えられる：

$$(5.16) \quad g_N^*(x) = \frac{N!}{\Gamma(n)(N-n)!} F(x)^{n-1} (1-F(x))^{N-n} f(x), \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$(5.17) \quad \check{g}_N^*(x) = \frac{(N+1)^n}{\Gamma(n)} \cdot e^{-(N+1)F(x)} F(x)^{n-1} f(x), \quad (-\infty < x < \infty).$$

## 6. N. V. Smirnov の標準化極値基本定理の拡張

$X_{N,1} < \cdots < X_{N,N}$  を，第3章で記したように，1次元実空間で pdf.  $f(x)$  及び狭義単調非減少な cdf.  $F(x)$  を持つ連続型一次元分布からの大きさ  $N$  の無作為標本に基づく順序統計量を表す．この時，次のように標準化した  $n(N)$ -lower extremes

$$(6.1) \quad T_{N,n} = (T_{N,1}, \dots, T_{N,n}), \quad \text{where } T_{N,i} = \frac{X_{N,i} - b_N}{a_N}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

を考える．ここで， $a_N > 0$ ， $b_N$ ， $-\infty < b_N < \infty$  は適切に選ばれた標準化定数である．

Smirnov (1949) は Gnedenko (1943) の標準化最小値  $T_{N,1}$  の極限分布族についての結果を， $n$  が  $N$  に無関係に固定された場合の第  $n$  番標準化最小値  $T_{N,n}$  の場合に一般化した．その過程で本質的に次の形の， $T_{N,n}$  の法則収束の強さでの極限分布族に関する基本定理を与えた：

**定理 6.1.** (Smirnov (1949) Theorem 3 in Part II)  $n$  を固定した正整数とし， $X_{N,n}$  の cdf. を  $\Phi_{N,n}(x)$  とする時， $T_{N,n}$  の cdf.  $\Phi_{N,n}(a_N x + b_N)$  が

$$(6.2) \quad \Phi_{N,n}(a_N x + b_N) \rightarrow \Phi_n(x), \quad (\text{a proper cdf.}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

となるための必要十分条件は

$$(6.3) \quad v_N(x) = NF(a_N x + b_N) \rightarrow v(x), \quad (N \rightarrow \infty)$$

となることである．ただしここに  $v(x)$  は  $n$  に無関係で，

$$(6.4) \quad \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{v(x)} e^{-t} t^{n-1} dt = \Phi_n(x)$$

なる関係を満たす非負，非減少な関数である．

また (6.3) 及び (6.4) を満たす関数  $v(x)$  が存在するならば，それは，次の関数方程式

$$(6.5) \quad \nu \cdot v(\alpha_\nu x + \beta_\nu) = v(x); \quad (v(-\infty) = 0, \quad v(\infty) = \infty)$$

$\nu$  : any integer;  $\alpha_\nu > 0$ ,  $\beta_\nu$  : some constants

の解の内のいずれかであること，更に，解は位置及び尺度母数を除けば，次の三つの型以外は存在しないことも Smirnov ((1949) Theorem 4, 5 in Part II) により明らかにされている：

$$(1) \quad \alpha_\nu < 1 \Rightarrow v(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0, \\ x^\alpha & \text{for } x > 0, \alpha > 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \alpha_\nu > 1 \Rightarrow v(x) = \begin{cases} (-x)^{-\alpha} & \text{for } x < 0, \alpha > 0, \\ +\infty & \text{for } x \geq 0, \end{cases}$$

$$(3) \quad \alpha_\nu = 1 \Rightarrow v(x) = e^x \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty.$$

上記の Smirnov 関数  $v(x)$  は以下の議論でも重要な役割を演ずる．上記(1)~(3)を参照し，この関数および，標準化後の pdf.  $f(\cdot)$  に関し，以下の議論の簡潔化のため，次の仮定を置く：

仮定 6.1.  $v(x)$  及び  $f(a_N x + b_N)$  の台は共に one open interval とし，両者に以下の関係を仮定する：

$$\begin{cases} (\xi, \eta) := \{x; v(x) > 0\}, & (\xi, \eta : \text{extended real numbers}), \\ (\Xi, I) := \{x; f(a_N x + b_N) > 0\}, & (\Xi, I : \text{extended real numbers}), \\ (\xi, \eta) \subseteq (\Xi, I). \end{cases}$$

さて， $v(x)$  は全て  $(\xi, \eta)$  上で  $x$  の微分可能な非負関数で，その導関数  $v'(x)$  も正となるから (6.4)より  $\Phi_n(x)$  は密度関数を持ち，

$$(6.6) \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-v(x)} v^{n-1}(x) \cdot v'(x), \quad (x \in (\xi, \eta)) \quad (n : \text{fix})$$

と表せる．この事実に基づき，先に与えた系 4.1 を援用して，一次元連続型分布からの第  $n(N)$  番極値統計量の場合に，上記の定理 6.1 を拡張できる．しかし，ここでは，より一般的な  $n(N)$ -lower extremes の標準化確率ベクトル  $T_{N,n}$  の修正情報近似の意味での一様漸近分布の誘導を考える．

$T_{N,n}$  の pdf. は(6.1) (4.8)から

$$(6.7) \quad g_N^\#(t_n) = \frac{N!}{(N-n)!} (1 - F(a_N t_n + b_N))^{N-n} \prod_{i=1}^n a_N f(a_N t_i + b_N), \\ (-\infty < t_1 < \dots < t_n < \infty)$$

と与えられる．但し  $t_n = (t_1, \dots, t_n)$  を表す．

ここで， $T_{N,n}$  の近似として次の確率ベクトル

$$(6.8) \quad \hat{T}_{N,n} = (\hat{T}_{N,1}, \dots, \hat{T}_{N,n}), \quad \text{where} \quad \hat{T}_{N,i} = \frac{\hat{X}_{N,i} - b_N}{a_N}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

を考える．その pdf. は(4.9)から，

$$(6.9) \quad \hat{g}_N^\#(t_n) = \frac{(N+1)^n}{\gamma_{N+1,n}} \cdot e^{-(N+1)F(a_N t_n + b_N)} \prod_{i=1}^n a_N f(a_N t_i + b_N), \quad (\Xi < t_1 < \dots < t_n < I)$$

と与えられる (6.1) (6.8)の変換は non-singular だから，定理 4.2 から，条件

$$(6.10) \quad \frac{n(N)}{N} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad N \rightarrow \infty$$

が満たされる時，その時に限り次の情報ネグトロピの意味での近似が成り立つ：

$$(6.11) \quad T_{N,n} \rightsquigarrow \hat{T}_{N,n}, \quad (I)_f, \quad \text{as} \quad N \rightarrow \infty.$$

ここで，Smirnov の結果及び(6.6)を基盤に，新たに，次式で与えられる  $n(N)$ -次元の pdf.

$$(6.12) \quad \phi_N(x_n) = e^{-v(x_n)} \prod_{i=1}^n v'(x_i), \quad (v(\xi) < v(x_1) < \dots < v(x_n) < v(\eta))$$

を持つ確率ベクトル  $S_{N,n}$  を考える．式(6.9)(6.12)の形から，修正情報近似

$$(6.13) \quad \hat{T}_{N,n} \sim S_{N,n}, \quad (I^*)_m, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

が何らかの自然な条件下で成立つことが期待される．これが可能ならば(216.11)(6.13)から，

$$(6.14) \quad T_{N,n} \sim S_{N,n}, \quad (I^*)_m, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

の近似同等性が(6.13)の成立条件とほぼ同等な条件下で，成立可能であることも期待できる．そこで(6.13)について検討する．まず，

$$(6.15) \quad \lambda_N \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{N+1} \lambda_N \rightarrow 0, \quad \frac{\lambda_N}{n} > 1, \quad \text{if } \frac{n}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

を満たす正数列  $\{\lambda_N\}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) が存在することに注意して

$$(6.16) \quad A_{N,n}^\# := \{\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n) \mid 0 = v(\xi) < v(x_1) < \dots < v(x_n) < \lambda_N\}$$

を(6.13)の近似主領域の候補として設定する．ここで  $v(\cdot)$  は(6.4)の Smirnov 関数を表す．この領域に対し，

$$(6.17) \quad \begin{aligned} P^{S_{N,n}}(A_{N,n}^\#) &= \int_{A_{N,n}^\#} \phi_N(\mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_n = \int_{0=v(\xi) < v(x_1) < \dots < v(x_n) < \lambda_N} e^{-v(x_n)} \prod_{i=1}^n dv(x_i) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda_N} w^{n-1} e^{-w} dw = \gamma_{\lambda_N, n} \rightarrow 1, \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が言える．次に修正情報量の評価を行う．情報密度は

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \ln \frac{\phi_N(\mathbf{x}_n)}{\hat{g}_N^*(\mathbf{x}_n)} &= \ln \gamma_{N+1, n} + \{(N+1)F(a_N x_n + b_N) - v(x_n)\} \\ &\quad + \ln \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{v'(x_i)}{(N+1)a_N \cdot f(a_N x_i + b_N)} \right\} \end{aligned}$$

と分解できる．右辺第2項は Smirnov の極限定理 6.1 に現れた条件(6.3)における量に対応する．右辺第3項が連続型分布からの標準化  $n(N)$ -lower extremes に特有な量である．これらに関連し  $v(x)$  の tail 近傍で次の一様近似誤差量を導入する．

$$(6.19) \quad \Delta_N := \sup_{v(\xi) < v(x) < \lambda_N} \{(N+1)F(a_N x + b_N) - v(x)\},$$

$$(6.20) \quad \delta_N := \sup_{v(\xi) < v(x) < \lambda_N} \left| \frac{v'(x)}{(N+1)a_N \cdot f(a_N x + b_N)} - 1 \right|.$$

これらを用いて，領域  $A_{N,n}^\#$  で

$$(6.21) \quad -\Delta_N \leq (N+1)F(a_N x_n + b_N) - v(x_n) \leq \Delta_N$$

は明らか．また(6.20)から

$$(6.22) \quad (1 - \delta_N)^n \leq \prod_{i=1}^n \frac{v'(x_i)}{(N+1)a_N \cdot f(a_N x_i + b_N)} \leq (1 + \delta_N)^n$$

とできる．これに不等式(cf. Matsunawa (1976))

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(x+1)} - \frac{x^3}{6(x+1)^2}, \quad (x > 0),$$

$$\ln(1-y) \leq -y - \frac{3y^2}{2(1-y)} - \frac{y^3}{6(1-y)^2}, \quad (-\infty < y < 1)$$

を適用すれば(6.18)右辺の第3項は

$$(6.23) \quad -n\delta_N \left\{ 1 + \frac{9\delta_N - 8\delta_N^2}{6(1-\delta_N)^2} \right\} \leq \ln \prod_{i=1}^n \frac{v'(x_i)}{(N+1)a_N \cdot f(a_N x_i + b_N)} \leq n\delta_N \left\{ 1 - \frac{\delta_N + 2\delta_N^2}{6(1+\delta_N)^2} \right\}$$

と評価できる．よって(6.17)(6.18)(6.21)(6.23)から，領域  $A_{N,n}^\#$  上での修正情報量は次のように評価される：

$$(6.24) \quad I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#) < \left[ \ln \gamma_{N+1,n} + \Delta_N + n\delta_N \left\{ 1 - \frac{\delta_N + 2\delta_N^2}{6(1+\delta_N)^2} \right\} \right] \cdot \gamma_{\lambda_N,n}$$

及び

$$(6.25) \quad I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#) > \left[ \ln \gamma_{N+1,n} - \Delta_N - n\delta_N \left\{ 1 - \frac{9\delta_N + 8\delta_N^2}{6(1-\delta_N)^2} \right\} \right] \cdot \gamma_{\lambda_N,n}$$

補題 2.2 から， $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_{N+1,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_{\lambda_N,n} = 1$  であることを考慮すると，不等式(6.24)，(6.25)で  $\Delta_N$  及び  $n\delta_N$  が適切な大きさの無限小量であれば(6.10)の条件下で

$$(6.26) \quad I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#) \rightarrow 0, \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成立可能となる．このことに関連して， $\{\lambda_N\}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) に関する要件(6.15)を考慮すると， $\Delta_N + n\delta_N$  の大きさが高々(at most)  $O(n\lambda_N/(N+1))$  の無限小であればよいことになる(以下でこのことを  $O_{am}(n\lambda_N/(N+1))$  と記す)．この時，結局(6.17)と併せて(6.13)が成立可能となる．

逆に，修正情報近似(6.13)が成立するなら，即ち(6.26)と(6.17)から， $\Delta_N + n\delta_N$  の大きさが  $O_{am}(n\lambda_N/(N+1))$  と主張出来るかを考察する．このことに関して，次の不等式が有用である(cf. 山田・松縄(1998)，補題 2.1，定理 4.3)：

$$(6.27) \quad \frac{1}{2} |I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#)| u \left( \sup_{A_{N,n}^{\#,-}} \frac{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)}{\phi_N(\mathbf{x}_n)} \right) + \left\{ 1 - \frac{P^{S_{N,n}}(A_{N,n}^\#) + P^{\hat{T}_{N,n}}(A_{N,n}^\#)}{2} \right\}$$

$$(6.28) \quad \geq \sup_{E \in B} |P^{S_{N,n}}(E) - P^{\hat{T}_{N,n}}(E)| \quad (B : n(N)\text{-次元 Borel 集合体})$$

$$(6.29) \quad \geq \left[ \frac{1}{2} |I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#)| + \max\{P^{S_{N,n}}(A_{N,n}^\#), P^{\hat{T}_{N,n}}(A_{N,n}^\#)\} \right. \\ \left. \times \left| \ln \left( \inf_{A_{N,n}^{\#,-}} \frac{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)}{\phi_N(\mathbf{x}_n)} \right) \right| \right] \cdot \ell \left( \inf_{A_{N,n}^{\#,-}} \frac{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)}{\phi_N(\mathbf{x}_n)} \right),$$

ここに， $A_{N,n}^{\#,-} = A_{N,n}^\# \cap \{\mathbf{x}_n; \hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)/\phi_N(\mathbf{x}_n) \leq 1\}$  を表す． $\ell(t), u(t)$  は  $t$  に関する非負・単調増加関数で

$$(6.30) \quad \ell(t) = \frac{70t^{1/3}(1+t^{1/3})^5(1+t^{1/3}+t^{2/3})}{15+554t^{1/3}+1569t^{2/3}+2444t+1569t^{4/3}+554t^{5/3}+15t^2}, \quad (t > 0),$$

$$(6.31) \quad u(t) = \frac{5(1+t^{1/3})^3(1+t^{1/3}+t^{2/3})(1+12t^{1/3}+t^{2/3})}{61+436t^{1/3}+686t^{2/3}+436t+61t^{4/3}}, \quad (t > 0)$$

と与えられ， $\ell(t) \cdot |\ln t| \leq |t-1| \leq u(t) \cdot |\ln t|$ , ( $t > 0$ ) 及び  $\ell(1) = u(1) = 1$  が成立する．

今 (6.18) を  $A_{N,n}^\#$  上で優評価しておく :

$$(6.32) \quad \left| \ln \frac{\phi_N(\mathbf{x}_n)}{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)} \right| < -\ln \gamma_{N+1,n} + \Delta_N + n\delta_N \left\{ 1 + \frac{3\delta_N}{2(1-\delta_N)^2} \right\} =: \varepsilon_N, \quad (\text{say}).$$

(6.27)~(6.29) (6.32) から,  $I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#) =: I_N^*$  と記す時,

$$(6.33) \quad |I_N^*| \cdot u(e) + 2\{1 - \min(P^{S_{N,n}}(A_{N,n}^\#), P^{\hat{T}_{N,n}}(A_{N,n}^\#))\} \geq 2 \sup_{E \in \mathcal{B}} |P^{S_{N,n}}(E) - P^{\hat{T}_{N,n}}(E)|$$

$$(6.34) \quad \geq |I_N^*| \cdot \ell(e^{-\varepsilon_N}) + 2 \max(P^{S_{N,n}}(A_{N,n}^\#), P^{\hat{T}_{N,n}}(A_{N,n}^\#)) \cdot \ell(e^{-\varepsilon_N}) \cdot \varepsilon_N > 0$$

が成立する (6.31) より  $u(e) < \infty$  である. また,  $\varepsilon_N \rightarrow \infty$  as  $N \rightarrow \infty$  なら (6.34) において

$$\ell(e^{-\varepsilon_N}) \rightarrow 0, \quad \text{if } \varepsilon_N \rightarrow \infty \text{ as } N \rightarrow \infty$$

となり一見好都合であるがそのことは起らない. なぜなら (6.22) (6.32) から, ここでの前提条件  $|I_N^*| \rightarrow 0, (N \rightarrow \infty)$  に矛盾するからである. よって, これらのことがらともう一つ的前提条件  $\min(P^{S_{N,n}}(A_{N,n}^\#), P^{\hat{T}_{N,n}}(A_{N,n}^\#)) \rightarrow 1, (N \rightarrow \infty)$  を考慮すれば (6.33) (6.34) から  $\varepsilon_N \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$  でなければならない. このことは, 大前提である (6.10) の下で (6.15), (6.32) から

$$(6.35) \quad \Delta_N + n\delta_N = O_{am}(n\lambda_N/N), \quad (N \rightarrow \infty)$$

が考慮中の必要条件における本質的部分である.

最後に, 修正情報量近似 (6.14) の可能性を検討する.  $A_{N,n}^\#$  上での修正情報量を分解して

$$(6.36) \quad \begin{aligned} I^*(S_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#) &= \int_{A_{N,n}^\#} \phi_N(\mathbf{x}_n) \ln \frac{\phi_N(\mathbf{x}_n)}{g_N^\#(\mathbf{x}_n)} d\mathbf{x}_n = \int_{A_{N,n}^\#} \phi_N(\mathbf{x}_n) \ln \left( \frac{\phi_N(\mathbf{x}_n)}{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)} \cdot \frac{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)}{g_N^\#(\mathbf{x}_n)} \right) d\mathbf{x}_n \\ &= I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#) + \int_{A_{N,n}^\#} \phi_N(\mathbf{x}_n) \ln \frac{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)}{g_N^\#(\mathbf{x}_n)} d\mathbf{x}_n \end{aligned}$$

の評価を行う (6.18) (6.21) 及び (6.23) から

$$\begin{aligned} \gamma_{N+1,n} e^{-\Delta_N} \exp \left\{ -n\delta_N \left\{ 1 + \frac{9\delta_N - 8\delta_N^2}{6(1-\delta_N)^2} \right\} \right\} \cdot \hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n) &\leq \phi_N(\mathbf{x}_n) \\ &\leq \gamma_{N+1,n} e^{\Delta_N} \exp \left\{ +n\delta_N \left\{ 1 - \frac{\delta_N + 2\delta_N^2}{6(1+\delta_N)^2} \right\} \right\} \cdot \hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

となるから,  $\Delta_N$  及び  $n\delta_N$  が先述と同じ大きさ  $O_{am}(n\ell_N/(N+1))$  であれば,

$$(6.37) \quad \int_{A_{N,n}^\#} \phi_N(\mathbf{x}_n) \ln \frac{\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n)}{g_N^\#(\mathbf{x}_n)} d\mathbf{x}_n \sim I^*(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#), \quad \text{if } \frac{n}{N} \rightarrow 0, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

が成立する. 従って (6.36) (6.37) より

$$(6.38) \quad I^*(S_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#) \sim I^*(S_{N,n}, \hat{T}_{N,n}; A_{N,n}^\#) + I^*(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#), \\ \text{if } \frac{n}{N} \rightarrow 0, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

が言える. ところで, 情報ネグトロピ近似 (6.11) は  $g_N^\#(\mathbf{x}_n), (-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty)$  と  $\hat{g}_N^\#(\mathbf{x}_n), (-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty)$  の全領域における全情報量  $I(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n})$  を対象にしていた. しかし (6.38) においては修正情報量  $I^*(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#)$  が対象となっている. 条件

(6.10)の下で  $I(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n})$  が微小になる. K-L 情報量の定義から,  $I^*(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#)$  も微小になることは定性的に分かるが, ここでは後者を直接定量的に評価する. その際 (6.16) の領域  $A_{N,n}^\#$  の端点を  $\hat{T}_{N,n}$  の分布で捉えなおす必要がある. 本質的でない複雑さを避けるため, 仮定 6.1 に附随する次の仮定を置く:

仮定 6.2.

$$(6.39) \quad F(a_N \xi + b_N) = 0, \quad F(a_N v^{-1}(\lambda_N) + b_N) = \frac{\lambda_N}{N+1}.$$

この仮定の下で

$$(6.40) \quad P^{\hat{T}_{N,n}}(A_{N,n}^\#) = \frac{\gamma_{\lambda_N, n}}{\gamma_{N+1, n}} \rightarrow 1, \quad \text{if } \frac{\lambda_N}{N+1} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

及び

$$(6.41) \quad \begin{aligned} I^*(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#) &= \frac{\gamma_{\lambda_N, n}}{2\gamma_{N+1, n}} \ln \left( 1 - \frac{n}{N+1} \right) + \left( \frac{\gamma_{\lambda_N, n} - \gamma_{\lambda_N, n+1}}{\gamma_{N+1, n}} \right) \left( 1 - \frac{N-n}{N+1} \theta_N \right) n \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{12(N-n+1)} - \frac{1}{12(N+1)} - R^\#(N-n+1) + R^\#(N+1) \right. \\ &\quad \left. - \ln \gamma_{N+1, n+1} \right\} \frac{\gamma_{\lambda_N, n}}{\gamma_{N+1, n}} \end{aligned}$$

を得る. ただし,

$$(6.42) \quad 1 \leq \theta_N < -\frac{\ln(1 - \lambda_N/(N+1))}{\lambda_N/(N+1)} \downarrow 1, \quad \text{if } \frac{n}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

(cf. 高木(1968)). よって (6.41) (6.42) から

$$(6.43) \quad I^*(\hat{T}_{N,n}, T_{N,n}; A_{N,n}^\#) \rightarrow 0, \quad \text{if } \frac{n}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

となる. 従って (6.40) とあわせて, 修正情報近似(6.13)の成立が可能である.

以上をまとめて, 次の Smirnov の定理の拡張を得る:

定理 6.2. 一次元連続型分布(pdf.  $f(x)$ , cdf.  $F(x)$ )からの大きさ  $N$  の無作為標本に基づく  $n(N)$ -lower extremes  $X_{N,n}$  の個数が次の条件を満たすものとする:

$$(6.44) \quad \frac{n(N)}{N} \rightarrow 0, \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

仮定 6.1, 仮定 6.2 の下で,  $X_{N,n}$  に対し, 適切に選ばれた定数  $a_N > 0$  及び  $b_N$  ( $-\infty < b_N < \infty$ ) を用いて式(6.1)により変換した標準化  $n(N)$ -lower extremes  $T_{N,n}$  が (6.12) 式の pdf. を持つ確率ベクトル  $S_{N,n}$  によって

$$(6.45) \quad T_{N,n} \sim S_{N,n}, \quad (I^*)_m, \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

の意味で修正情報近似されるための必要十分条件は,

$$(6.46) \quad \Delta_N + n\delta_N = O_{am}(n\lambda_N/N), \quad (N \rightarrow \infty),$$

が成立することである. ここに,

$$(6.47) \quad \Delta_N := \sup_{v(\xi) < v(x) < \lambda_N} \{(N+1)F(a_N x + b_N) - v(x)\},$$

$$(6.48) \quad \delta_N := \sup_{v(\xi) < v(x) < \lambda_N} \left| \frac{v'(x)}{(N+1)a_N \cdot f(a_N x + b_N)} - 1 \right|$$

を表し,  $v(x)$  は非減少, 非負で微分可能な (6.4) 式を満たす Smirnov の関数,  $v'(x)$  はその導関数,  $\{\lambda_N\}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) は条件(6.15)を満たす正数列を表す.

注 6.1. 条件(6.46)は条件(6.3)と異なり, 一般に  $n = n(N)$  に従属している.  $\Delta_N, \delta_N$  も  $\sup$  を取る領域の上界  $\lambda_N$  を通じ, 一般に  $n$  に従属している.

注 6.2. 定理 6.2 の確率ベクトルの周辺分布を考えることにより, 条件(6.44)の下で, 第  $n(N)$ -番標準化準極値統計量  $T_{N,n}$  の修正情報近似の意味での漸近的結果を得る. また, 上の定理に並行する標準化  $m(N)$ -upper extremes の場合についての結果も同様に得られる.

注 6.3. 不等式(6.31) (6.32)から, 修正情報近似が全変動距離による近似と同等であることが分かる. 注 1.2 で言及したこと論的根拠となっている.

## 7. あとがき

本稿では一次元連続型分布からの極値群統計量の個数が, サンプルサイズ  $N$  の増加と共に変動する場合について, 元の統計量そのものの近似分布誘導を主として考察した. また, その一つの応用として N. V. Smirnov の定理を拡張した. 問題の難しさは先述のように, 統計量の定義される空間が  $N$  の増加と共に変化することにあつた. この問題に本稿では, K-L 情報量および修正 K-L 情報量を利用して接近・解決を図った. その際, 近似分布で平均を取ったことに意味がある. このことによって物理学におけるエントロピや確率論における大偏差確率等の関連諸科学と整合する自然な近似の方向性が実現され, K-L 情報量がネグエントロピと解釈されることともよく整合する. この点に, 従来, 統計学は無関心であつた. その理由の一つは K-L 情報量を全変動距離の上界を与える便利な近似的な量として使用することが多かったことにあると思われる. 実際, これまでの統計学では被近似分布で平均を取る K-L 情報量を考えることが圧倒的に多かったし, それで近似がうまく行くことも多かった. それは, 情報密度の分母の台が分子の台よりも広くなる場合や, モーメントの計算が比較的容易になる場合に実現されてきており, その場合上記のことへの注意は殆ど払われなかつた. 単純に分布間の近似という観点からは, これまでの扱いはそれなりに評価できる. しかしながら, 統計科学が情報科学をはじめとする関連科学と連携を深めようとしている現在, 共通する解釈を可能にする情報量の使用をするに越したことはないであろう. 本稿での理論展開は上記の注意に沿つたものであり, K-L 情報量の適切な使用の良い事例と考えている. なお, 実用上有用な修正情報の意味での近似において近似主領域の設定と評価が重要であることが本稿の事例でも明らかである. 近年, 情報量を利用した統計的手法が増えているが, このことへの配慮が必要である. 近似主領域を適切に設定しないと, サンプルサイズが増加すればする程修正情報量が発散する可能性が高まることに注意すべきである. これとは逆に, 修正情報量がある領域で零に収束しても, その領域が近似主領域になっていないことも十分起こり得る. 法則収束の意味での極限理論や関連する漸近理論において, 例えば中心極限定理に見るように, 統計理論はその構築及び応用において細心の注意を払ってきた. 情報量の利用に際しても同様な取り組みが必要であろう.

## 謝 辞

本稿を精読し貴重なコメントをして頂いた査読者と, 担当編集委員に深く感謝します.

## 参 考 文 献

- David, H. A. (1981). *Order Statistics*, 2nd ed., John Wiley and Son's, New York.
- Dronkers, J. J. (1958). Approximate formulae for the statistical distributions of extreme values, *Biometrika*, **45**, 447–470.
- Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aléatoire, *Annals of Mathematics*, **44**, 423–453.
- Matsunawa, T. (1976). Some inequalities based on inverse factorial series, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **28**, 291–305.
- Matsunawa, T. (1977). Approximations to the probabilities of binomial and multinomial random variables and chi-square type statistics, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **29**, 333–358.
- Matsunawa, T. and Ikeda, S. (1976). Uniform asymptotic distribution of extremes, *Essays in Probability and Statistics* (eds. S. Ikeda et al.), Shinko Tsusho, Tokyo.
- 松縄 規, 武井智裕 (1999). 不完全ガンマ関数比の評価不等式, *統計数理*, **47**, 119–142.
- Reiss, R.-D. (1981). Uniform approximation to distributions of extreme order statistics, *Advanced Applied Probability*, **13**, 533–547.
- Reiss, R.-D. (1989). *Approximate Distributions of Order Statistics, with Applications to Nonparametric Statistics*, Springer-Verlag, New York.
- Reiss, R.-D. and Thomas, M. (1997). *Statistical Analysis of Extreme Values*, Birkhäuser Verlag, Basel.
- Smirnov, N. V. (1949). Limit distributions for the terms of a variational series, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, **25**, 5–59 (English translation: (1952). *American Mathematical Society Translation*, No. 67, 82–143).
- 高木貞治 (1968). 『解析概論』, p. 179, 岩波書店, 東京.
- 山田智哉, 松縄 規 (1998). 近似主領域の修正情報量に基づく確率分布間の一様近似と多変量一般指数型分布族の揺動の定量的評価への応用, *統計数理*, **46**, 461–476.

## Information-approximations to the Joint Distributions of Fluctuating Numbers of Quasi-extreme Order Statistics

Tadashi Matsunawa

(The Institute of Statistical Mathematics;  
Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies)

Yoshinobu Nakamura

(Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies)

Asymptotic distributions of  $n(N)$ -lower extremes and  $m(N)$ -upper extremes of a random sample of size  $N$  drawn from a univariate continuous distribution are investigated from the common aspects of direction of information and entropy in various scientific fields. Two kinds of approximation modes based on the Kullback-Leibler mean information are considered. The first one is a directed approximation in the sense of full measured information-negentropy and the other one is an approximation in the sense of modified information. Related approximation errors are evaluated precisely by calculating the K-L information numbers or the modified ones. As a main result it is shown that  $n/N \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) is a necessary and sufficient condition for the  $n(N)$ -lower extremes to be asymptotically equivalent to an  $n(N)$ -dimensional extreme random vector in the sense of full measured information-negentropy. Weaker results for the asymptotic distributions of  $n(N)$ -lower extremes and  $m(N)$ -upper extremes are given in the sense of modified information. As an application, the basic limiting theorem of the standardized near extreme order statistics with fixed rank due to N. V. Smirnov is extended to a strong asymptotic theorem for the standardized  $n(N)$ -lower extremes in the sense of modified information.