

コウホート分析における交互作用効果モデル再考

中村 隆[†]

(受付 2004年8月26日;改訂 2004年12月8日)

要 旨

年齢×時代の交互作用効果をもつベイズ型コウホートモデルについて再考察する。既存のモデルを階差ベクトルと階差行列を導入することにより再記述し、いったんコウホートモデルを離れて順序尺度水準の2元分割表のための階差制約付き2要因交互作用効果モデルを提示する。ただしこのモデルに単にコウホート効果を追加したのでは、交互作用効果がコウホート効果を吸収してしまうという問題点のあることを指摘し、交互作用効果による部分ベクトルをコウホート効果によるものについても直交させる新しい交互作用効果をもつコウホートモデルを提案する。パラメータ数の節約のために、年齢×時代の交互作用効果のいくつかの時点の間引く手順も導入した。日本人の国民性調査データへ適用した例を示す。

キーワード: APCモデル, 家族が一番大切, ABIC, パラメータの漸進的変化の条件, ベイズ型モデル.

1. はじめに

コウホート分析は、継続調査データの分析方法であり、同一調査項目について得られる年齢×調査時点別の集計データから年齢・時代・世代(コウホート)効果を分離することによって、社会の変化の構造を明らかにしようとする方法である。

コウホート分析を行う場合、分析対象とするデータのカバーする期間(時代の範囲)は長い方が望ましい。データの期間が短いと、同一コウホートがわたる年齢区分が少なく、また同じ年齢区分を経験するコウホート区分が少ないため対比が十分とならず年齢効果とコウホート効果を区別するのが難しい。一方データの期間が長くなると、たとえば晩婚化の影響について考えてみればわかるように、年齢効果やコウホート効果が長期にわたって変わらないとするモデルの仮定は受け入れがたくなる。年齢・時代・コウホート効果以外の何らかの交互作用効果の導入が求められる。

コウホート分析における交互作用効果モデルについては、中村(1986, 1987, 1989)で提案を始め、中村(1995)において一応のまとめに至った。しかし残念ながら、3.5節で述べるような問題が残り、必ずしも満足のいくものではなかった。一方、岡本(2003)は、ベイズ型コウホートモデルを独自に拡張し、年齢×時代のみならず、年齢×コウホート、時代×コウホートの交互作用効果をもつモデルを比較の対象に含めている。コウホート分析における交互作用効果モデルに関する議論は広津(2004, 15章)にもある。

本稿では、交互作用効果をもつコウホートモデルについて見直し、残された問題点を解消する年齢×時代の交互作用効果をもつ新しいコウホートモデルを提案する。以下、まず第2節で、

[†] 統計数理研究所: 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

コウホート分析が対象とするコウホート表とコウホートモデル，識別問題などについて簡単に説明し，これまで用いてきたベイズ型コウホートモデルを階差パラメータと階差行列を導入して再記述する．第 3 節では，コウホートモデルをいったん離れ，一般の順序尺度水準で測られた 2 要因についての階差制約付き交互作用効果モデルを提示する．そして，このモデルに単にコウホート要因を追加しただけでは，交互作用効果がコウホート効果を吸収してしまう問題点のあることを例示する．第 4 節では，この問題を解決する新しい年齢×時代の交互作用効果をもつコウホートモデルを提案する．交互作用効果による部分ベクトルが，年齢効果と時代効果によるものだけでなくコウホート効果による部分ベクトルについても直交するように制約するモデルである．適用例として，日本人の国民性調査の“#2.7 一番大切なものは家族”のデータを分析した結果を示す．

2. ベイズ型ロジット・コウホートモデル

2.1 コウホート分析

コウホート分析は，年齢・時代・コウホート効果を分離する．

分析の結果，年齢効果が大きいことがわかれば，データの変動は主に年齢要因によって引き起こされたものであり，世代を問わず時代を越えて社会の成員個々の意見や態度は加齢に伴って同じように変化する一方，社会全体としての意見や態度の分布は長期間にわたって安定している．これに対し，コウホート効果が大きいことがわかれば，データの変動は主にコウホートの相違(世代差)によるものであり，個々の成員の意見や態度は変わりにくい一方，世代交代によって社会全体での意見や態度の分布はゆるやかに変化している．また，時代効果が大きいことがわかれば，データの変動は主にその時々の時勢によるものであり，年齢や世代を越えて社会全体の意見がある一定の方向に変化するため流動的であり，ある時点を境に逆の方向に転換する可能性もある．このように 3 つの要因による影響を区別して捉えることが社会の変化の機構を解明する上で重要であり，コウホート分析がそのための有力な方法であることが指摘されてきた(Ryder(1965), Glenn(1977), Mason and Fienberg(1985))．

ところがコウホートモデルは，数学的に「コウホート = 時代 - 年齢」という関係が存在するために，何らかの制約条件がなければ 3 効果を一意に推定できないという識別問題を抱えている(識別問題の詳細については付録 C を参照)．

この識別問題への対応方法としては大きく 2 つに分かれ，何らかの制約条件を付加して 3 効果のパラメータを推定しようとするものと，3 効果のパラメータそのものの推定は不可能とし統計学的に推定可能な(非線形)成分の推定に議論を限るものがある(関連文献については中村(1995, 2000)を参照)．

コウホート分析の本来の目的が 3 効果の分離であることから，中村(1982)は前者の付加条件を課す立場にたち，隣り合うパラメータの 1 次階差の 2 乗和を小さく抑えるという(節約原理を実現する)パラメータの漸進的変化の条件を取り込んだベイズ型コウホートモデルを定式化，赤池のベイズ型情報量規準 ABIC により最適なモデルを選択し，事後分布のモードにより 3 効果のパラメータを推定する方法を提案した．この方法により識別問題が克服でき，3 効果の分離に成功した．つづいて Nakamura(1986)は，パラメータの漸進的変化の条件の柔軟性を利用して，年齢区分幅と調査間隔が一致しない一般のコウホート表データの分析を可能にし，また回答比率以外のデータを分析するための数量型コウホートモデルを開発した．さらに中村は，前節で引用した文献において年齢効果を拡張した年齢×時代の交互作用効果をもつモデルを提案してきた．この他に中村(1995)は，複雑なサンプリング法により得られたデータに対応するため一般化線形モデルの枠組みに準拠した過大分散項をもつベイズ型コウホートモデルを提案し，日本人の国民性調査データに適用した．中村(2000)，Nakamura(2002)は，多項分布に従

う反応変数についてのコウホートモデルに取り組んだ。

2.2 標準コウホート表

年齢区分×調査時点の形式に何らかの数量を集計・整理した表を、コウホート分析の立場からはコウホート表と呼ぶ。コウホート表には、形式上、調査間隔と年齢区分幅が一致する標準コウホート表と、それ以外の一般コウホート表が区別できる。また、集計された数量の性質上、回答比率の場合を特に比率型のコウホート表として区別する。以下では5年ごとに実施されている日本人の国民性調査を念頭に比率型の標準コウホート表に話を限るが、本稿で述べるロジット・コウホートモデルを含むベイズ型コウホートモデルは、一般コウホート表の場合はデザイン行列を工夫することによって(付録B, G参照)、回答比率以外のデータの場合は現在では一般化線形モデルの枠組み(McCullagh and Nelder(1989))を適用することによって容易に拡張できる(Nakamura(1986))。

標準コウホート表は次のようにして得られる。Y₁年からΔ年ごとにY_J年までJ回の調査が実施されているとし、各回の調査結果は調査間隔と同じΔ歳幅のA₁からA_IまでのI個の年齢区分について集計されているものとする。Y₁年の一番高齢であるA_I年齢区分が一番古いコウホート区分になるからこれをC₁とすると、同Y₁年のA_{I-1}年齢区分と次の調査時点Y₂年のA_I年齢区分がコウホート区分C₂に対応する。以下、一般に、Y_j年のA_i年齢区分を(i, j)セルと呼ぶことにすれば、このセルにはk = j - i + Iとしてコウホート区分C_kに対応する。最新のY_J年では一番若いA₁年齢区分が一番新しいコウホート区分C_Kとなり、結局、生まれ年がΔ年幅の合計K (= I + J - 1)個のコウホート区分が現れる。なお、標準コウホート表で第kコウホート区分C_kは、斜めに並ぶ

$$(2.1) \quad n_k^C = \min(k, K - k + 1, \min(I, J))$$

個のセルに現れる。

2.3 コウホートモデル

コウホート表の(i, j)セルにおける何らかの質問のある1つの回答選択肢の正反応確率(セル確率)をπ_{ij}(> 0)とする。比率型のロジット・コウホートモデルは、このセル確率のロジットη_{ij} = log[π_{ij}/(1 - π_{ij})]を次のように各効果の線形和に分解するモデルである。

$$(2.2) \quad \eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_k^C, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K.$$

ここで、β^Gは総平均効果、β_i^A, β_j^P, β_k^Cはそれぞれ年齢、時代、コウホート効果である。このモデルをAPCモデル(Age-Period-Cohort model)とも呼ぶ。

コウホート表のセルと3つの主効果(年齢、時代、コウホート)を対応づけるデザイン行列をX_A, X_P, X_Cとする(付録B参照)。これらと以下のベクトル

$$\eta = \text{vec} \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{1J} \\ \vdots & \vdots \\ \eta_{I1} & \eta_{IJ} \end{bmatrix}, \quad \pi = \text{vec} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{1J} \\ \vdots & \vdots \\ \pi_{I1} & \pi_{IJ} \end{bmatrix},$$

$$\beta^A = (\beta_1^A, \dots, \beta_I^A)', \quad \beta^P = (\beta_1^P, \dots, \beta_J^P)', \quad \beta^C = (\beta_1^C, \dots, \beta_K^C)'$$

を用いれば、モデル(2.2)は、

$$(2.3) \quad \eta \equiv \log \pi - \log(1 - \pi) = \beta^G \mathbf{1} + X_A \beta^A + X_P \beta^P + X_C \beta^C$$

と表すことができる。以上において、vecは行列を構成する列ベクトルを順に縦に並べる操作、プライム(')は行列やベクトルの転置、logはベクトルや行列の要素ごとに自然対数をとるもの

とする． $\mathbf{1} = \mathbf{1}_N$ はすべての要素が1のベクトルであり，必要に応じ要素の数を添えることにする．ここで， $N = IJ$ はセルの数である．

さて，各効果のデザイン行列は付録(B.1)，すなわち，

$$X_A \mathbf{1}_I = X_P \mathbf{1}_J = X_C \mathbf{1}_K = \mathbf{1}_N$$

を満たしている．これは，たとえば年齢効果のデザイン行列について言うと， X_A の列空間 $\mathcal{C}(X_A)$ が $\mathbf{1}_N$ の張る空間 $\mathcal{C}(\mathbf{1}_N)$ を含んでいるということであり，年齢効果について議論するためには，年齢効果によるデザイン行列の列ベクトルの線形結合(以下，部分ベクトルと呼ぶ) $X_A \beta^A$ を空間 $\mathcal{C}(\mathbf{1}_N)$ の直交補空間 $\mathcal{C}(\mathbf{1}_N)^\perp$ に射影しておくのがよい．その射影行列は，ベクトル $\mathbf{1}$ のムーア・ペンローズ逆ベクトルが $\mathbf{1}^+ = (\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'$ であるから，

$$I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+ = I_N - \mathbf{1}_N(\mathbf{1}_N'\mathbf{1}_N)^{-1}\mathbf{1}_N'$$

である．これを用いればモデル(2.3)は(時代・コウホート効果についても同様に考えて)

$$(2.4) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+)X_A \beta^A + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+)X_P \beta^P + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+)X_C \beta^C$$

とあらためて表現される．

2.4 パラメータのゼロ和制約

上のモデル(2.4)の，たとえば年齢効果による部分ベクトル $\eta^A = (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+)X_A \beta^A$ について言うと， $\text{rank}\{(I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+)X_A\} = I - 1$ だから， η^A に対応する I 次元ベクトルの β^A を一意に定めるためには，線形制約を1つ課す必要がある． $r'\mathbf{1} \neq 0$ を満たす任意のベクトル r とスカラー r による $r'\beta^A = r$ という線形制約でかまわないが，ここでは以下のような観点によるゼロ和制約(2.5)を採用することにする．

モデル(2.3)のベクトル η の要素の合計は

$$\mathbf{1}'\eta = N\beta^G + \mathbf{1}'X_A \beta^A + \mathbf{1}'X_P \beta^P + \mathbf{1}'X_C \beta^C$$

である．したがって，各効果のパラメータ・ベクトルに

$$(2.5) \quad \mathbf{1}'X_A \beta^A = \mathbf{1}'X_P \beta^P = \mathbf{1}'X_C \beta^C = 0$$

というゼロ和制約を課せば，

$$\beta^G = \mathbf{1}'\eta/N$$

となつて， β^G が総平均効果を名乗るにふさわしい．

標準コウホート表では，

$$\mathbf{1}'X_A = J\mathbf{1}'_I, \quad \mathbf{1}'X_P = I\mathbf{1}'_J, \quad \mathbf{1}'X_C = (n_1^C, \dots, n_K^C)'$$

であるから(n_k^C については(2.1)参照)，ゼロ和制約(2.5)は，

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^I \beta_i^A = \sum_{j=1}^J \beta_j^P = 0, \quad \sum_{k=1}^K n_k^C \beta_k^C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \beta_{k(=j-i+I)}^C = 0$$

である．コウホート効果のゼロ和制約としてこれまで

$$\sum_{k=1}^K \beta_k^C = 0$$

を考えてきた．上の(2.6)にある $\sum_k n_k^C \beta_k^C = 0$ との違いについては岡本(2003, 3.4 節)が議論している．

2.5 パラメータの漸進的变化の条件

コウホート分析における識別問題を克服するために，付録(C.1)により示唆されるパラメータの漸進的变化の条件—各効果で隣り合うパラメータの値の変動を小さくするという条件—をモデルに付加する．具体的には，次の各効果の1次階差の2乗和を小さくする．すなわち，

$$(2.7) \quad \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\beta_j^P - \beta_{j+1}^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\beta_k^C - \beta_{k+1}^C)^2 \longrightarrow \min$$

である．ここで， σ_A^2 ， σ_P^2 ， σ_C^2 は3効果に対する適当な重み(の逆数)であり，後に超パラメータと呼ばれる．

付録Dの階差行列 $D_{(l)}$ を用いれば，

$$D_A = D_{(I)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_P = D_{(J)}, \quad D_C = D_{(K)}$$

であり，階差パラメータは

$$\delta^A = D_A \beta^A, \quad \delta^P = D_P \beta^P, \quad \delta^C = D_C \beta^C$$

となるから，上の条件(2.7)は，

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_A^2} (\beta^A)' D_A' D_A \beta^A + \frac{1}{\sigma_P^2} (\beta^P)' D_P' D_P \beta^P + \frac{1}{\sigma_C^2} (\beta^C)' D_C' D_C \beta^C \\ &= \frac{1}{\sigma_A^2} (\delta^A)' \delta^A + \frac{1}{\sigma_P^2} (\delta^P)' \delta^P + \frac{1}{\sigma_C^2} (\delta^C)' \delta^C \\ &= \delta_*' \Sigma^{-1} \delta_* \longrightarrow \min, \end{aligned}$$

と書き直すことができる．ここで， $\delta_* = ((\delta^A)', (\delta^P)', (\delta^C)')'$ とおいた． Σ は超パラメータを対角要素に並べた対角行列

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_A^2, \dots, \sigma_A^2, \sigma_P^2, \dots, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \dots, \sigma_C^2) = \sigma_A^2 I_I \oplus \sigma_P^2 I_J \oplus \sigma_C^2 I_K$$

である． \oplus は行列の直和を表す．

そしてさらに(2.8)を正規分布の密度関数を用いて書き換えれば

$$(2.9) \quad \pi(\delta_* | \sigma) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \delta_*' \Sigma^{-1} \delta_*\right\} \longrightarrow \max$$

となって，階差パラメータ・ベクトル δ_* の事前密度として表現できる．ここで， $\sigma = (\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2)'$ とおいた．階差パラメータの数 $M = I + J + K - 3$ である．

2.6 階差パラメータ表現によるコウホートモデル

コウホートモデル(2.4)を階差行列と階差パラメータを使って記述する．付録の(D.2)より，階差行列 D_A のある一般逆行列 D_A^- と任意の α^A について，元のパラメータベクトルは

$$\beta^A = D_A^- \delta^A + \alpha^A \mathbf{1}$$

のように解ける． $(I - 11^+)1 = 0$ に注意すれば，

$$(I - 11^+)X_A\beta^A = (I - 11^+)X_A(D_A^-\delta^A + \alpha^A\mathbf{1}) = (I - 11^+)X_AD_A^-\delta^A$$

であり， α^A の任意性に関係なく，モデル(2.4)は(時代・コウホート効果についても同様に考えて)

$$(2.10) \quad \eta = \beta^G\mathbf{1} + (I - 11^+)X_AD_A^-\delta^A + (I - 11^+)X_PD_P^-\delta^P + (I - 11^+)X_CD_C^-\delta^C$$

となる．さらに，

$$X_A^* = (I - 11^+)X_AD_A^-, \quad X_P^* = (I - 11^+)X_PD_P^-, \quad X_C^* = (I - 11^+)X_CD_C^-$$

とおいてまとめれば，モデル(2.10)は

$$(2.11) \quad \eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & X_A^* & X_P^* & X_C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^G \\ \delta^A \\ \delta^P \\ \delta^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & X^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^G \\ \delta_* \end{bmatrix} = X\delta$$

と表すことができる．ここで，

$$X^* = \begin{bmatrix} X_A^* & X_P^* & X_C^* \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & X^* \end{bmatrix}, \quad \delta = (\beta^G, \delta_*')'$$

とおいた．

2.7 対数尤度

コウホート表の (i, j) セルの標本の大きさを m_{ij} ，セル確率を π_{ij} とする．各セルの観測度数 y_{ij} が互いに独立な 2 項分布に従うと仮定し，同時確率関数を $f(y|\pi(\delta))$ とするとき，対数尤度の核 $\ell(\delta)$ は，

$$(2.12) \quad \ell(\delta) \equiv \log f(y|\pi(\delta)) - (\text{const.}) = y' \log \pi + (m - y)' \log(1 - \pi)$$

と書ける．ここで，

$$m = (m_{11}, m_{21}, \dots, m_{IJ})', \quad y = (y_{11}, y_{21}, \dots, y_{IJ})'$$

である．

通常は最尤法により δ を推定すればよいが，コウホートモデルについては識別問題が存在するためこのままでは実行できない．本稿では，パラメータの漸進的变化の条件を事前密度(2.9)で表現したベイズ型モデルを構成することにより， δ を推定する．

2.8 ベイズ型モデルと ABIC 最小化法

パラメータの推定は，事後密度 $f(y|\pi(\delta)) \cdot \pi(\delta_*|\sigma)$ のモードを求めること(最大化)，すなわち，

$$(2.13) \quad f(y|\delta) \cdot \pi(\delta_*|\sigma) \longrightarrow \max$$

により行う．得られる推定値は MAP 推定値(maximum a posteriori estimate)と呼ばれる．

$$\phi(\delta) = \log f(y|\delta) \cdot \pi(\delta_*|\sigma) - (\text{const.})$$

とおけば，

$$(2.14) \quad \phi(\delta) = \ell(\delta) + \log \pi(\delta_*|\sigma) = \ell(\delta) - \frac{M}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \delta_*' \Sigma^{-1} \delta_*$$

である。

超パラメータベクトル $\sigma = (\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2)'$ を固定すれば、最大化問題(2.13)は、 $\partial\phi/\partial\delta = 0$ を適当な初期値から出発してニュートン・ラフソン法を繰り返し適用して解く問題に帰着する(詳細は付録 E を参照)。

未知である超パラメータ σ は次の ABIC 最小化法により決定する(Akaike(1980))。

$$\text{ABIC} = -2\log(\text{周辺尤度}) + 2h = -2\log \int f \cdot \pi d\delta_* + 2h.$$

ここで、 $\dim\sigma$ を超パラメータの数(ベクトル σ の次元、すなわち、要素の数)とすれば、 β^G の分も入れて $h = \dim\sigma + 1$ である。

コウホートモデルについて上の ABIC を超パラメータの関数として近似的に評価すると、

$$(2.15) \quad \text{ABIC}(\sigma) \simeq \chi_L^2 + \hat{\delta}'_L \Sigma^{-1} \hat{\delta}_L + \log |\Sigma| + \log |X^* \widehat{W} X^* + \Sigma^{-1}| + 2h$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \chi_L^2 &= -2y'(\log \hat{\mu} - \log y) - 2(m - y)'[\log(m - \hat{\mu}) - \log(m - y)], \\ \hat{\mu} &= (\text{diag } m)\hat{\pi}, \quad \widehat{W} = (\text{diag } m)(\text{diag } \hat{\pi})(I - \text{diag } \hat{\pi}) \end{aligned}$$

であり(詳細は付録 F を参照)、 diag はベクトルの要素を対角に配した対角行列を作る操作である。

ABIC を最小にする $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_A^2, \hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}_C^2)'$ は準ニュートン法により求める。ただし実際には、 $\kappa_A = \log_2 \sigma_A^2$ 、 $\kappa_P = \log_2 \sigma_P^2$ 、 $\kappa_C = \log_2 \sigma_C^2$ と超パラメータを変換し、 $\kappa = (\kappa_A, \kappa_P, \kappa_C)'$ について最適化を行う。

2.9 コウホートモデル群とモデル選択

前小節までの 3 効果モデル(APC モデル)の他に、各効果の有無によって次のようなコウホートモデルの変種を考えることができる。すなわち、無効果モデル(G モデル)、単効果モデル(A, P, C モデル)、2 効果モデル(AP, AC, PC モデル)である。より具体的には、

G モデル	$\eta_{ij} = \beta^G,$
A モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A,$
P モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_j^P,$
C モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_k^C,$
AP モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_j^P,$
AC モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_k^C,$
PC モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_j^P + \beta_k^C,$
APC モデル	$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_k^C$

というモデル群である。

個々のモデルに関するパラメータの推定や ABIC の計算は、デザイン行列 X 、超パラメータ・ベクトル σ を適当に定め、 h に注意するだけで、前節で述べた ABIC 最小化法により同様に行うことができる。

3. 階差制約付き 2 要因交互作用効果モデル

3.1 2 要因交互作用効果モデル

コウホート効果 β_k^C は変化の要因としては主効果と考えるべきであるが、数学的には年齢 \times

時代の交互作用効果 β_{ij}^{AP} に制約を課したものであると見ることもできる。

本節では、コウホート効果 β_k^C の代わりに、交互作用効果 β_{ij}^{AP} を用いた次の 2 要因交互作用効果モデルについて考える。

$$(3.1) \quad \eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_{ij}^{AP}, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

このモデルは、コウホート分析を離れて、任意の順序尺度水準の 2 要因について適用可能である。

交互作用効果のパラメータ・ベクトルを β^{AP} 、デザイン行列を X_{AP} とすると、

$$\beta^{AP} = \text{vec} \begin{bmatrix} \beta_{11}^{AP} & \beta_{1J}^{AP} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{I1}^{AP} & \beta_{IJ}^{AP} \end{bmatrix}, \quad X_{AP} = I_J \otimes I_I = I_N$$

である。本節で扱うかぎり X_{AP} は単位行列であるが、今後の便宜上 X_{AP} のままとしておく。以上の記号を用いると、モデル(3.1)は

$$(3.2) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A \beta^A + X_P \beta^P + X_{AP} \beta^{AP}$$

と書ける。

さてこのとき、交互作用効果による部分ベクトル $\xi^{AP} = X_{AP} \beta^{AP}$ は、年齢と時代効果による部分ベクトル $\xi^A = X_A \beta^A$ と $\xi^P = X_P \beta^P$ とに直交するようにするのがよい。すなわち、行列 $Z_\Delta = \begin{bmatrix} X_A & X_P \end{bmatrix}$ の列空間 $\mathcal{C}(Z_\Delta)$ の直交補空間 $\mathcal{C}(Z_\Delta)^\perp$ に含まれるようにする(列空間 $\mathcal{C}(1)$ は $\mathcal{C}(Z_\Delta)$ に含まれている)。これは射影行列 $I - Z_\Delta Z_\Delta^+$ を右から ξ^{AP} に掛けることによって実現できる(柳井・竹内(1983), p. 92)。これによりモデル(3.2)は

$$(3.3) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + (I - 11^+) X_A \beta^A + (I - 11^+) X_P \beta^P + (I - Z_\Delta Z_\Delta^+) X_{AP} \beta^{AP}$$

となる。

ゼロ和制約は、主効果に関する

$$1' X_A \beta^A = 1' X_P \beta^P = 0$$

と、交互作用効果に関する $Z_\Delta' X_{AP} \beta^{AP} = 0$ 、すなわち、

$$(3.4) \quad X_A' X_{AP} \beta^{AP} = 0, \quad X_P' X_{AP} \beta^{AP} = 0$$

である。

3.2 交互作用効果の階差パラメータと階差行列

交互作用効果の階差パラメータとして、

$$\delta_{ij}^{AP} = (\beta_{ij}^{AP} - \beta_{i,j+1}^{AP}) - (\beta_{i+1,j}^{AP} - \beta_{i+1,j+1}^{AP})$$

を考えると、これを与える階差行列 D_{AP} は

$$D_{AP} = D_P \otimes D_A, \quad D_{AP}^- = D_P^- \otimes D_A^-$$

であり、階差パラメータ・ベクトル δ^{AP} は

$$\delta^{AP} = \text{vec} \begin{bmatrix} \delta_{11}^{AP} & \delta_{1,J-1}^{AP} \\ \vdots & \vdots \\ \delta_{I-1,1}^{AP} & \delta_{I-1,J-1}^{AP} \end{bmatrix} = D_{AP} \beta^{AP}$$

で与えられる．元のパラメータ β^{AP} は，任意の $I \times J$ 行列を $A = (\alpha_{ij})$ として，

$$\beta^{AP} = D_{AP}^- \delta^{AP} + (I - D_{AP}^- D_{AP}) \text{vec } A$$

と解くことができる．

上の右辺第 2 項について考察すると，付録(D.1)より

$$D_{AP}^- D_{AP} = (D_P^- D_P) \otimes (D_A^- D_A) = (I_J - \mathbf{1}_J \mathbf{i}'_J) \otimes (I_I - \mathbf{1}_I \mathbf{i}'_I)$$

だから，さらに展開して

$$D_{AP}^- D_{AP} = I - (I_J \otimes \mathbf{1}_I \mathbf{i}'_I) - (\mathbf{1}_J \mathbf{i}'_J \otimes I_I) + (\mathbf{1}_J \mathbf{i}'_J \otimes \mathbf{1}_I \mathbf{i}'_I)$$

である．ここで， \mathbf{i}_a は，最後の要素が 1 でそれ以外の要素が 0 の長さ a のベクトルである．行列 A の最終列ベクトルを $\alpha_J (= A \mathbf{i}_J)$ ，最終行ベクトルを $\tilde{\alpha}_I (= (\mathbf{i}'_I A)')$ とおくと，

$$\begin{aligned} (3.5) \quad & (I - D_{AP}^- D_{AP}) \text{vec } A \\ &= \{(I_J \otimes \mathbf{1}_I \mathbf{i}'_I) + (\mathbf{1}_J \mathbf{i}'_J \otimes I_I) - (\mathbf{1}_J \mathbf{i}'_J \otimes \mathbf{1}_I \mathbf{i}'_I)\} \text{vec } A \\ &= \text{vec}(\mathbf{1}_J \mathbf{i}'_I A) + \text{vec}(A \mathbf{i}_J \mathbf{1}'_J) - \text{vec}(\mathbf{1}_J \mathbf{i}'_I A \mathbf{i}_J \mathbf{1}'_J) \\ &= (I_J \otimes \mathbf{1}_I) \tilde{\alpha}_I + (\mathbf{1}_J \otimes I_I) \alpha_J - (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I) \alpha_{IJ} \end{aligned}$$

となる． Z_Δ の列空間 $\mathcal{C}(Z_\Delta) \supset \mathcal{C}(\mathbf{1}), \mathcal{C}(X_A), \mathcal{C}(X_P)$ であるから， $Z_\Delta Z_\Delta^+ \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ， $Z_\Delta Z_\Delta^+ X_A = X_A$ ， $Z_\Delta Z_\Delta^+ X_P = X_P$ であり，結局， $X_{AP} = I$ を使って，

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & (I - Z_\Delta Z_\Delta^+) X_{AP} (I - D_{AP}^- D_{AP}) \text{vec } A \\ &= (I - Z_\Delta Z_\Delta^+) \{(I_J \otimes \mathbf{1}_I) \tilde{\alpha}_I + (\mathbf{1}_J \otimes I_I) \alpha_J - (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I) \alpha_{IJ}\} \\ &= (I - Z_\Delta Z_\Delta^+) (X_P \tilde{\alpha}_I + X_A \alpha_J - \alpha_{IJ} \mathbf{1}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることに注意しておく．

3.3 階差パラメータ表現による交互作用効果モデル

前小節の考察結果(3.6)より (3.3) の右辺最終項は

$$(I - Z_\Delta Z_\Delta^+) X_{AP} \beta^{AP} = (I - Z_\Delta Z_\Delta^+) X_{AP} D_{AP}^- \delta^{AP}$$

となるから，

$$X_{AP}^\Delta = (I - Z_\Delta Z_\Delta^+) X_{AP} D_{AP}^-$$

とにおいて，モデル(3.3)は，

$$(3.7) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_{AP}^\Delta \delta^{AP}$$

と書き表すことができる．

パラメータの漸進的变化の条件(2.8)に付加すべき項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_{AP}^2} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} [(\beta_{ij}^{AP} - \beta_{i,j+1}^{AP}) - (\beta_{i+1,j}^{AP} - \beta_{i+1,j+1}^{AP})]^2 \\ &= \frac{1}{\sigma_{AP}^2} (\beta^{AP})' D_{AP}' D_{AP} \beta^{AP} = \frac{1}{\sigma_{AP}^2} (\delta^{AP})' \delta^{AP} \end{aligned}$$

である．さらに，

$$\delta_* = ((\delta^A)', (\delta^P)', (\delta^C)', (\delta^{AP})')', \quad \sigma = (\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \sigma_{AP}^2)'$$

とおけば、パラメータの事前密度は形式的には(2.9)と同じものになる。

なお、ゼロ和制約(3.4), すなわち, $Z_{\Delta}' X_{AP} \beta^{AP} = 0$ の下では ($Z_{\Delta}^{+} = (Z_{\Delta}' Z_{\Delta})^{+} Z_{\Delta}'$ だから)

$$\eta^{AP} = (I - Z_{\Delta} Z_{\Delta}^{+}) X_{AP} \beta^{AP} = X_{AP} \beta^{AP},$$

また

$$\eta^{AP} = (I - Z_{\Delta} Z_{\Delta}^{+}) X_{AP} D_{AP}^{-} \delta^{AP} = X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}$$

であったから,

$$\beta^{AP} = (X_{AP}' X_{AP})^{-1} X_{AP}' X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}$$

により、ゼロ和制約下での β^{AP} を δ^{AP} から計算することができる。

3.4 暫定版交互作用効果コウホートモデル群

モデル(3.1), すなわち (3.7)を, Δ を付して $[AP^{\Delta}]AP$ モデルと記すことにする。このモデルとその変種

$$\begin{aligned} [AP^{\Delta}] \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \\ [AP^{\Delta}]A \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \\ [AP^{\Delta}]P \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_P^* \delta^P + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \\ [AP^{\Delta}]AP \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \end{aligned}$$

および, 2.9 節の G, A, P, AP の計 8 モデルからなるモデル群は, 年齢区分と調査時点に限らない任意の順序尺度水準の 2 要因 A, P について適用可能である。

ところで, A, P がそれぞれ年齢, 時代要因であれば, さらにコウホートの視点が生まれ, コウホート要因を加えた以下のモデルの変種を考えることができる。すなわち,

$$\begin{aligned} [AP^{\Delta}]C \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_C^* \delta^C + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \\ [AP^{\Delta}]AC \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_C^* \delta^C + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \\ [AP^{\Delta}]PC \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_P^* \delta^P + X_C^* \delta^C + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \\ [AP^{\Delta}]APC \text{モデル} & \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_C^* \delta^C + X_{AP}^{\Delta} \delta^{AP}, \end{aligned}$$

である。2.9 節の C, AC, PC, APC モデルもあわせて, 以上全 16 モデルがモデル選択の対象となる。ただし, コウホート効果が絡む場合には問題を含んでいるので, 「暫定版の交互作用効果を含むコウホートモデル群」と称しておくことにする。

3.5 暫定版モデル群による分析例と問題点

ここでは, 問題点を指摘する目的のために交互作用効果 $[AP^{\Delta}]$ を含む 8 つのモデルを実際のデータに適用した結果を示す。対象としたデータは, 日本人の国民性調査(坂元 他(2004))の '#2.7 一番大切なもの' の質問で事後コーディングにより '家族' というカテゴリにまとめられる回答をした人の割合である。

表 1 は, 女性のデータについて分析した結果で, 交互作用効果を含む暫定版の 8 つのモデルの ABIC の値を比較している。これらの中では, $[AP^{\Delta}]AP$ モデルの ABIC が一番小さく, 次が $[AP^{\Delta}]APC$ モデルとなっている(モデルの表記がやや紛らわしいので本小節内では C に強調の下線を引いた)。両者の ABIC の差はあまりないが, その他のモデルとは差がみられる。

図 1 に, 8 つのモデル中で ABIC が一番小さい $[AP^{\Delta}]AP$ モデルの各効果の推定値をプロットし, 図 2 に, $[AP^{\Delta}]APC$ モデルの結果をプロットした。各図の 3 つのパネルは左から順に,

表 1. ‘#2.7 一番大切なもの(家族)[女性]’についての暫定版コウホートモデル選択表.

Model	ABIC	Δ ABIC	h	$\hat{\kappa}_A$	$\hat{\kappa}_P$	$\hat{\kappa}_C$	$\hat{\kappa}_{AP}$
[AP \wedge]AP	153.79	-	4	-4.10	-3.84	-	-7.52
[AP \wedge]APC	154.94	1.15	5	-4.24	-3.97	-7.56	-8.52
[AP \wedge]AC	172.39	18.60	4	-3.61	-	-3.82	-7.52
[AP \wedge]PC	191.61	37.81	4	-	-4.28	-4.23	-6.13
[AP \wedge]P	284.85	131.06	3	-	-4.02	-	-6.39
[AP \wedge]C	371.59	217.80	3	-	-	-4.17	-5.84
[AP \wedge]A	758.91	605.12	3	-4.25	-	-	-5.90
[AP \wedge]	838.25	684.45	2	-	-	-	-5.77

時代, 年齢, コウホート効果に対応し, 中央の年齢効果のパネルには年齢 \times 時代の交互作用効果の推定値 $\hat{\beta}_{ij}^{AP}$ を, 過去から最新の調査時点についてゼロの基準線を上方にずらしながら表示している.

両図を比較すると, 時代効果, 年齢効果はほぼ同じ傾向である. コウホート効果は, 図 1 の [AP \wedge]AP モデルでは当然ながら存在せず, しかし年齢 \times 時代の交互作用効果は, 図 2 の [AP \wedge]APC モデルのものより変動幅が大きくなっている. 変動幅の大きい [AP \wedge]AP モデルの交互作用効果は, [AP \wedge]APC モデルのコウホート効果と交互作用効果とを足したものになっているような印象を与える.

この印象を確かめるために, 図 3 に両モデルの交互作用効果の推定値を比較した. まず黒丸 (\bullet) は, 横軸方向に [AP \wedge]AP モデルの $\hat{\beta}_{ij}^{AP}$ を, 縦軸方向に対応する [AP \wedge]APC モデルの $\hat{\beta}_{ij}^{AP}$ をとってプロットしたものである. 黒丸のプロット全体の傾きは明らかに 45° よりも小さく, [AP \wedge]AP モデルの $\{\hat{\beta}_{ij}^{AP}\}$ の絶対値の方が大きい傾向にあることを示している.

次に図 3 の白丸 (\circ) は, 縦軸方向に [AP \wedge]APC モデルの $\{\hat{\beta}_k^C\}$ を足してみたものである. ただし実際には, $\{\hat{\beta}_k^C\}$ を時代効果や年齢効果にも分配する必要があるので, 以下の $\{\hat{\beta}_{ij}^{C*}\}$ を足している. すなわち, $\hat{\beta}_{ij}^C = \hat{\beta}_{k=j-i+I}^C$ とおいて,

$$\hat{\beta}_{ij}^{C*} = \hat{\beta}_{ij}^C - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \hat{\beta}_{ij}^C - \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_{ij}^C$$

である. 交互作用効果 β_{ij}^{AP} についてのゼロ和制約 (3.4) を満たすようにしたといってもよい. 白丸のプロット全体を見ると, 傾き 45° 線のまわりに散らばっており, [AP \wedge]APC モデルのコウホート効果 $\{\hat{\beta}_k^C\}$ (の一部) を [AP \wedge]AP モデルの $\{\hat{\beta}_{ij}^{AP}\}$ が取り込んでいる様子がわかる.

以上のように, 暫定版 [AP \wedge]AP モデルは主効果であるコウホート効果を交互作用効果に吸収してしまい, また経験的にだが多数の場合, [AP \wedge]APC モデルよりも ABIC の値が小さくなり [AP \wedge]AP モデルが選ばれやすい, という問題点がある. もし [AP \wedge]AP モデルが選ばれてしまうと, 主効果のコウホート効果が存在するのが存在しないのかの判断ができないのである. この問題点を解決するためには, 交互作用効果による部分ベクトルを, 年齢効果や時代効果によるものと直交させたのと同様に, コウホート効果による部分ベクトルとも直交させる必要がある.

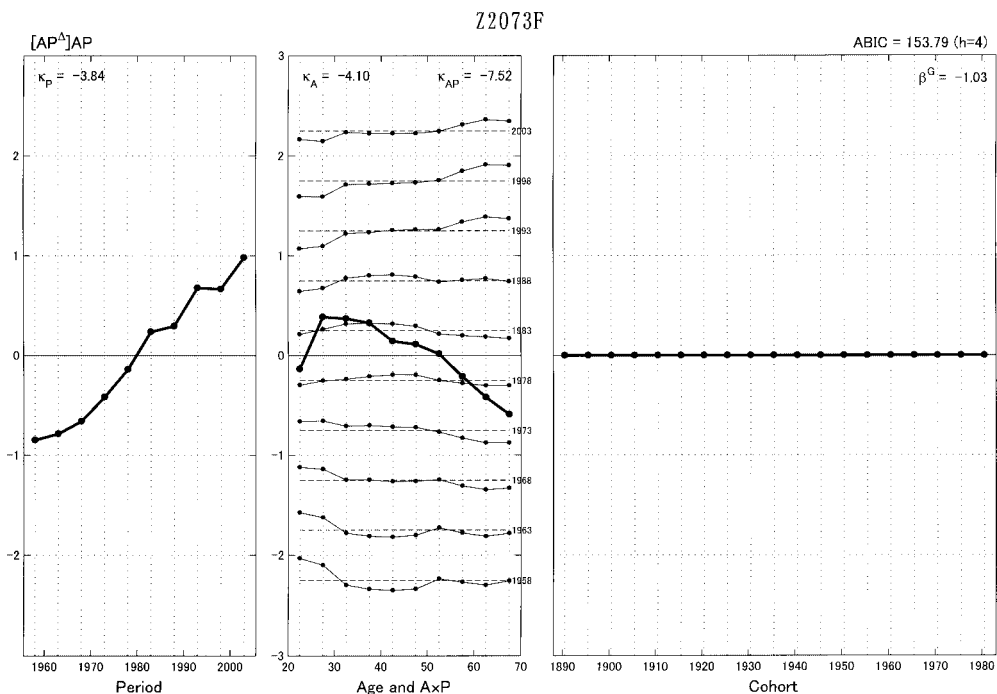


図 1. 暫定版 $[AP^A]AP$ モデルによる '#2.7 一番大切なもの(家族)[女性]' のコウホート分析結果 .

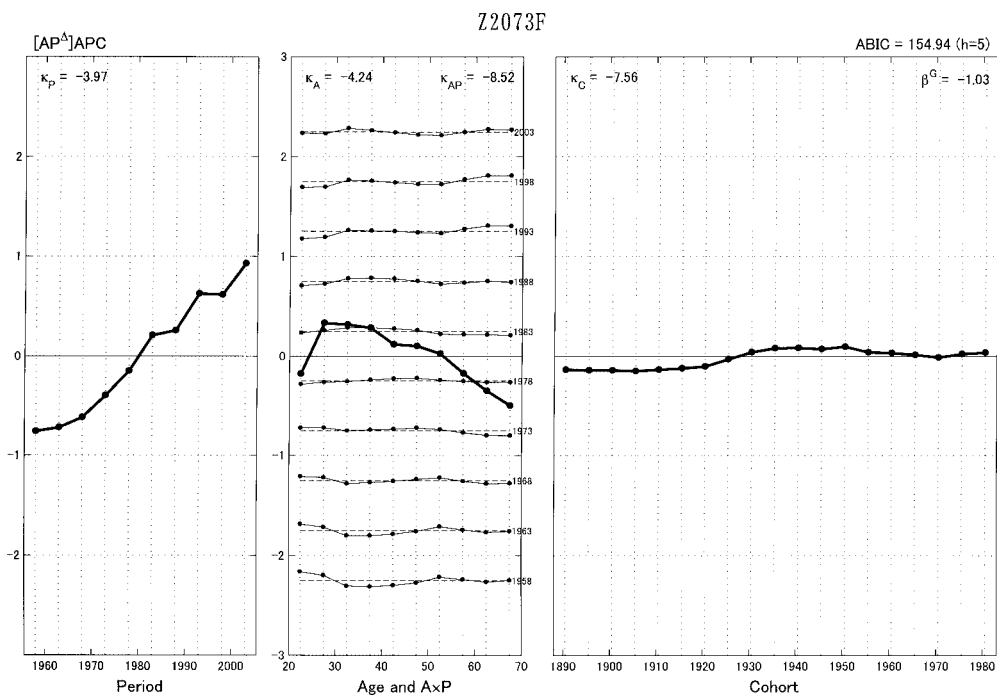


図 2. 暫定版 $[AP^A]APC$ モデルによる '#2.7 一番大切なもの(家族)[女性]' のコウホート分析結果 .

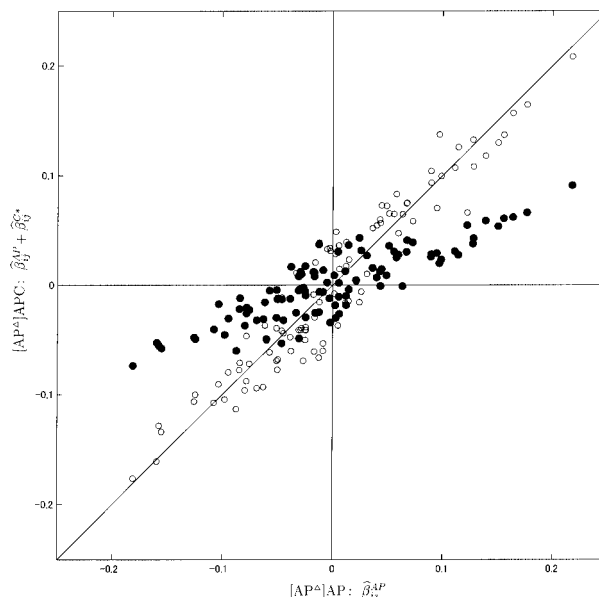


図 3. [AP^Δ]AP モデル(図 1)の交互作用効果 $\hat{\beta}_{ij}^{AP}$ (横軸)と, [AP^Δ]APC モデル(図 2)の交互作用効果 $\hat{\beta}_{ij}^{AP}$ (縦軸)の比較(•), および $\hat{\beta}_{ij}^{AP} + \hat{\beta}_{ij}^C$ (縦軸)との比較(○).

4. 年齢×時代の交互作用効果をもつコウホートモデル

4.1 年齢×時代の交互作用効果とコウホート効果

本節では, 年齢×時代の交互作用効果 β_{ij}^{AP} をもつコウホートモデルについて考える. あらためてコウホート効果 β_k^C を追加してモデル式を書けば以下ようになる.

$$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_k^C + \beta_{ij}^{AP}, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K.$$

あるいは, ベクトルと行列を用いれば,

$$(4.1) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A \beta^A + X_P \beta^P + X_C \beta^C + X_{AP} \beta^{AP}$$

である. このモデルを [AP]APC モデルと記す. 前節の [AP^Δ]AP モデルの変種中の [AP^Δ]APC モデルと式の上では同じことになるが, 交互作用効果による部分ベクトルを, 年齢効果や時代効果だけでなく, コウホート効果による部分ベクトルとも直交させるところが異なる.

行列 Z を, Z_Δ に X_C を追加したものととして,

$$Z = \begin{bmatrix} X_A & X_P & X_C \end{bmatrix}$$

とおき, 交互作用効果による部分ベクトル $\xi^{AP} = X_{AP} \beta^{AP}$ が, 3 効果による $\xi^A = X_A \beta^A$, $\xi^P = X_P \beta^P$, $\xi^C = X_C \beta^C$ と直交するようにする. モデル(4.1)は

$$(4.2) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+) X_A \beta^A + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+) X_P \beta^P + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^+) X_C \beta^C + (I - Z Z^+) X_{AP} \beta^{AP}$$

となり, ゼロ和制約は (3.4) にコウホートの主効果とかわる分が追加され,

$$(4.3) \quad X_A' X_{AP} \beta^{AP} = 0, \quad X_P' X_{AP} \beta^{AP} = 0, \quad X_C' X_{AP} \beta^{AP} = 0$$

となる．標準コウホート表では，必ず $\beta_{I1}^{AP} = \beta_{1J}^{AP} = 0$ となることに注意する．
さらに，モデル(4.2)を階差パラメータを用いて表現すれば，

$$(4.4) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_C^* \delta^C + X_{AP}^{**} \delta^{AP}$$

と書き表すことができる．ここで，

$$(4.5) \quad X_{AP}^{**} = (I - ZZ^+) X_{AP} D_{AP}$$

である．列空間 $\mathcal{C}(Z) \supset \mathcal{C}(Z_\Delta)$ だから， Z_Δ を Z に置き換えても(3.6)が成り立つので(4.5)のようによい．

さて，モデル(3.7)の X_{AP}^Δ ではその階数と δ^{AP} の次元が一致していたが，上の X_{AP}^{**} ではその階数 $r = \text{rank } X_{AP}^{**}$ が δ^{AP} の次元よりも小さい．そこで X_{AP}^{**} を次のように特異値分解する．

$$X_{AP}^{**} = US^{\frac{1}{2}}V'$$

ここで， S は $(X_{AP}^{**})'X_{AP}^{**}$ の正の固有値を対角要素とする $r \times r$ の対角行列， U, V はそれぞれ大きさ $N \times r$ ， $(\dim \delta^{AP}) \times r$ で， $U'U = I$ ， $V'V = I$ を満たす適当な行列である．

$$\eta^{AP} = X_{AP}^{**} \delta^{AP} = (US^{\frac{1}{2}})V' \delta^{AP}$$

であるから，モデル(4.4)は

$$X_{AP}^* = US^{\frac{1}{2}}, \quad \delta^{ap} = V' \delta^{AP}$$

とにおいて，

$$(4.6) \quad \eta = \beta^G \mathbf{1} + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_C^* \delta^C + X_{AP}^* \delta^{ap}$$

のようにすればよい．パラメータの漸進的变化の条件(2.8)に付加すべき項は

$$\frac{1}{\sigma_{AP}^2} (\delta^{ap})' \delta^{ap}$$

である．なおこの項は，

$$V = (X_{AP}^{**})'US^{-\frac{1}{2}}, \quad VV' = (X_{AP}^{**})'US^{-1}U'X_{AP}^{**}, \quad X_{AP}^{**}(X_{AP}^{**})' = USU'$$

より，

$$(\delta^{ap})' \delta^{ap} = (\delta^{AP})'VV' \delta^{AP} = (\delta^{AP})'(X_{AP}^{**})'\{X_{AP}^{**}(X_{AP}^{**})'\}^+ X_{AP}^{**} \delta^{AP}$$

であるから， V の取り方によらない．

また，ゼロ和制約(4.3)，すなわち， $Z'X_{AP}\beta^{AP} = 0$ の下では ($Z^+ = (Z'Z)^+Z'$ だから)

$$\eta^{AP} = (I - ZZ^+)X_{AP}\beta^{AP} = X_{AP}\beta^{AP},$$

また一方

$$\eta^{AP} = X_{AP}^* \delta^{ap}$$

であるから，

$$\beta^{AP} = (X_{AP}'X_{AP})^{-1}X_{AP}'X_{AP}^* \delta^{ap}$$

により，ゼロ和制約下での β^{AP} を δ^{ap} から求めることができる．

4.2 交互作用効果パラメータの節約

標準コウホート表の場合、年齢×時代の交互作用効果の階差パラメータ数は $\dim \delta^{ap} = (I - 1)(J - 1) - (K - 1) + 1 = (I - 2)(J - 2)$ であり、たとえば $I = J = 10$ とすると $\dim \delta^{ap} = 64$ となって、かなりの数になる。この数は ABIC の項 $\log |\Sigma|$ の一部が $(\dim \delta^{ap}) \log \sigma_{AP}^2$ であるからペナルティとして効いてくる。そこで、交互作用効果パラメータの節約を考える。

1 つの節約方法は、いくつかの時点の β_{ij}^{AP} を間引くことである。付録 G で説明した方法によりいくつかの時点の間引いた交互作用効果を作ると (G.1) を満たしており、このデザイン行列 X_{AP} について (3.6) の Z_{Δ} を Z に置き換えた式を考えると、 $ZZ^+1 = 1$ 、 $ZZ^+X_A = X_A$ 、 $ZZ^+X_P = X_P$ であるから、

$$\begin{aligned} (4.7) \quad & (I - ZZ^+)X_{AP}(I - D_{AP}^- D_{AP}) \text{vec } A \\ &= (I - ZZ^+)\{X_{AP}(I_{J^*} \otimes 1_{I^*})\tilde{\alpha}_{I^*} + X_{AP}(1_{J^*} \otimes I_{I^*})\alpha_{J^*} - X_{AP}(1_{J^*} \otimes 1_{I^*})\alpha_{I^*J^*}\} \\ &= (I - ZZ^+)(X_P B_1 \tilde{\alpha}_I + X_A B_2 \alpha_J - \alpha_{I^*J^*} 1) = 0 \end{aligned}$$

となり、形式的にはモデルは (4.4) を経て (4.6) と同じ表現になる。

時点の間引きには、ABIC の値が減少する限りステップワイズ的に間引く時点を増やす方法をとる。ただしこのとき、時点 1 と時点 J の交互作用効果は間引かない。

4.3 交互作用効果コウホートモデル群

2.9 節の G, A, P, C, AP, AC, PC, APC の 8 モデルと以下の 8 モデルを合わせた 16 モデルが、コウホート分析におけるモデル選択の対象となる。各モデルの推定の際には、年齢×時代の交互作用効果の時点の間引くステップワイズ手順が含まれる。

[AP] モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]A モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_A^* \delta^A + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]P モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_P^* \delta^P + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]C モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_C^* \delta^C + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]AP モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]AC モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_A^* \delta^A + X_C^* \delta^C + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]PC モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_P^* \delta^P + X_C^* \delta^C + X_{AP}^* \delta^{ap},$
[AP]APC モデル	$\eta = \beta^G 1 + X_A^* \delta^A + X_P^* \delta^P + X_C^* \delta^C + X_{AP}^* \delta^{ap}.$

4.4 分析例：一番大切なもの(家族)

3.5 節において暫定版のモデルで分析した '#2.7 一番大切なもの(家族)' のデータを、本節の新しい年齢×時代の交互作用効果をもつコウホートモデルにより分析した結果を示す。表 2、表 3 はそれぞれ男性と女性についてのコウホートモデル選択表であり、いずれについても [AP]APC モデルが最小 ABIC モデルとして選ばれる。

参考のため表 4 に、男性のデータの [AP]APC モデルと [AP]AP モデルについて、交互作用効果の時点の間引きのステップワイズ過程を示した。[AP]APC モデルで見ると、選択された ABIC 最小モデルは、全時点の交互作用効果を含むモデルよりも ABIC の値が 2.61 ほど減少している。また図 4 に、女性のデータに関して [AP]APC モデルと [AP]AP モデルの交互作用効果(時点は間引いていない)を比較した。これは図 3 の黒丸に対応するものであり、図 3 とは違って 45 度直線のまわりに黒丸があり、[AP]AP モデルの交互作用効果がコウホート効果を吸収してはいないことがわかる。

表 2. '#2.7 一番大切なもの(家族)[男性]についてのコウホートモデル選択表.

Model	ABIC	Δ ABIC	h	$\hat{\kappa}_A$	$\hat{\kappa}_P$	$\hat{\kappa}_C$	$\hat{\kappa}_{AP}$
[AP]APC	161.36	-	5	-3.77	-3.33	-5.83	-5.96
APC	163.89	2.54	4	-3.75	-3.31	-5.88	-
[AP]AP	172.69	11.34	4	-3.58	-3.11	-	-6.03
AP	174.83	13.47	3	-3.54	-3.09	-	-
[AP]AC	206.04	44.68	4	-2.63	-	-3.07	-4.68
AC	216.59	55.24	3	-2.63	-	-3.10	-
[AP]PC	247.51	86.15	4	-	-3.44	-4.95	-5.54
PC	253.82	92.46	3	-	-3.43	-4.93	-
[AP]P	299.50	138.15	3	-	-3.20	-	-5.37
P	308.13	146.78	2	-	-3.21	-	-
[AP]C	717.05	555.70	3	-	-	-4.07	-5.54
C	732.10	570.75	2	-	-	-4.08	-
[AP]A	1144.57	983.21	3	-3.71	-	-	-4.99
A	1160.87	999.51	2	-4.02	-	-	-
[AP]	1253.77	1092.42	2	-	-	-	-6.54
G	1258.09	1096.74	1	-	-	-	-

表 3. '#2.7 一番大切なもの(家族)[女性]についてのコウホートモデル選択表.

Model	ABIC	Δ ABIC	h	$\hat{\kappa}_A$	$\hat{\kappa}_P$	$\hat{\kappa}_C$	$\hat{\kappa}_{AP}$
[AP]APC	151.74	-	5	-4.24	-4.00	-7.37	-6.24
APC	153.61	1.87	4	-4.30	-4.00	-7.41	-
[AP]AP	156.99	5.25	4	-4.09	-3.87	-	-6.30
AP	158.67	6.92	3	-4.13	-3.86	-	-
[AP]AC	169.62	17.88	4	-3.61	-	-3.81	-5.60
AC	173.24	21.50	3	-3.63	-	-3.83	-
[AP]PC	213.13	61.38	4	-	-4.56	-5.96	-5.99
PC	213.73	61.98	3	-	-4.54	-5.97	-
[AP]P	294.34	142.60	3	-	-4.02	-	-6.01
P	295.73	143.99	2	-	-4.02	-	-
[AP]C	414.05	262.31	3	-	-	-4.86	-4.50
C	421.09	269.35	2	-	-	-4.88	-
[AP]A	812.08	660.33	3	-4.37	-	-	-5.10
A	822.58	670.84	2	-4.53	-	-	-
[AP]	886.26	734.52	2	-	-	-	-5.17
G	892.02	740.28	1	-	-	-	-

表 4. 交互作用効果の時点の間引きのステップワイズ過程(‘#2.7 一番大切なもの(家族)[男性]’).

モデル	交互作用効果の残された時点	ABIC	ΔABIC
[AP]APC	{ 1958 1963 1968 1973 1978 1983 1988 1993 1998 2003 }	163.97	0.00
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 1983 1988 1993 - 2003 }	163.63	-0.34
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 1983 1988 - - 2003 }	163.22	-0.75
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 - 1988 - - 2003 }	162.68	-1.29
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 - - - - 2003 }	162.09	-1.88
	{ 1958 1963 1968 1973 - - - - 2003 }	161.36*	-2.61
	{ 1958 1963 1968 - - - - 2003 }	161.66	-2.30
[AP]AP	{ 1958 1963 1968 1973 1978 1983 1988 1993 1998 2003 }	175.11	0.00
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 1983 1988 - 1998 2003 }	174.77	-0.34
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 1983 1988 - - 2003 }	174.37	-0.74
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 - 1988 - - 2003 }	173.88	-1.23
	{ 1958 1963 1968 1973 1978 - - - - 2003 }	173.32	-1.79
	{ 1958 1963 1968 1973 - - - - 2003 }	172.69*	-2.42
	{ 1958 1963 1968 - - - - 2003 }	172.84	-2.27

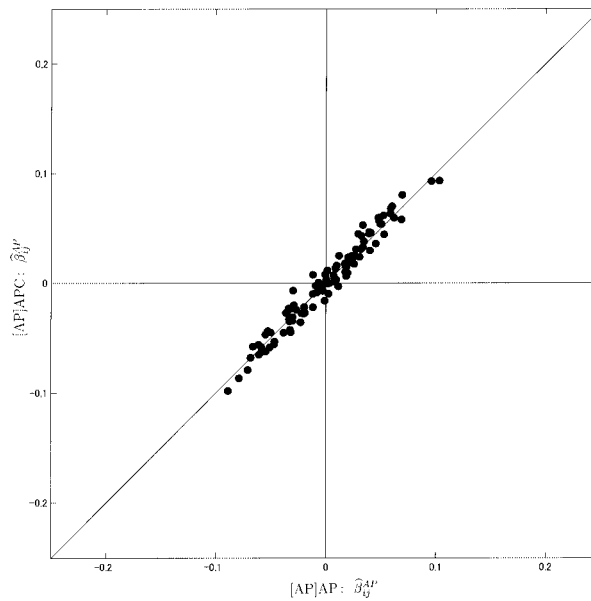


図 4. [AP]AP モデルの交互作用効果 $\hat{\beta}_{ij}^{AP}$ (横軸)と, [AP]APC モデルの交互作用効果 $\hat{\beta}_{ij}^{APC}$ (縦軸)の比較(‘#2.7 一番大切なもの(家族)[女性]’について). ただし, 交互作用効果の時点の間引きは行っていない.

図 5, 図 6 はそれぞれ男性と女性の [AP]APC モデルの結果を示したものである. 各図には 4 つのパネルが現れているが, 左から 3 番目のパネルを除いて, 図 1 と図 2 にある 3 つのパネル

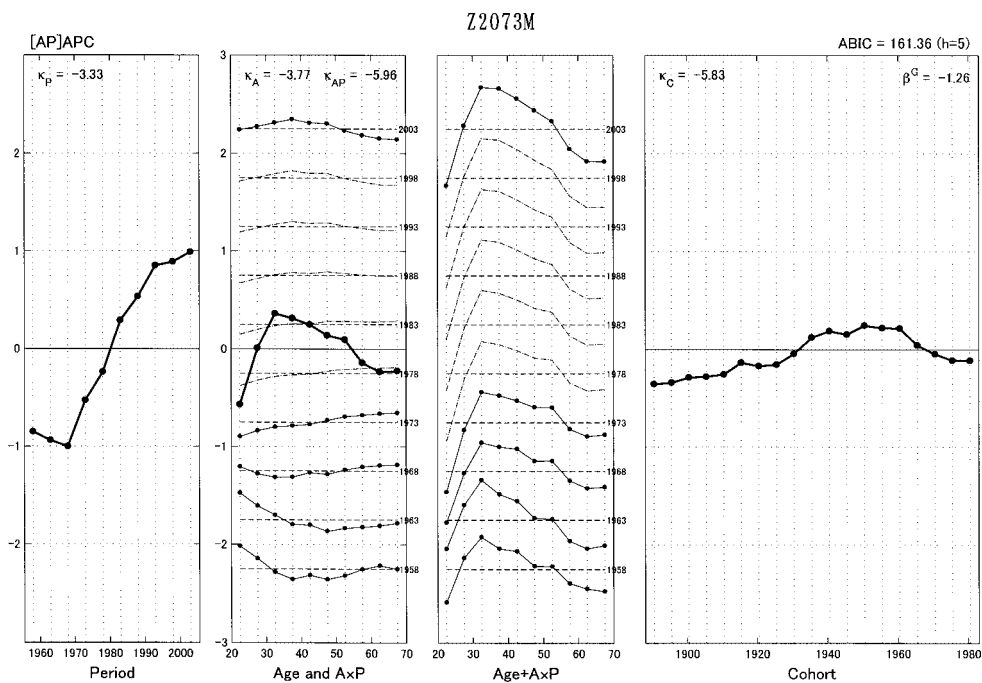


図5. [AP]APC モデルによる「#2.7 一番大切なもの(家族)[男性]」のコホート分析結果.

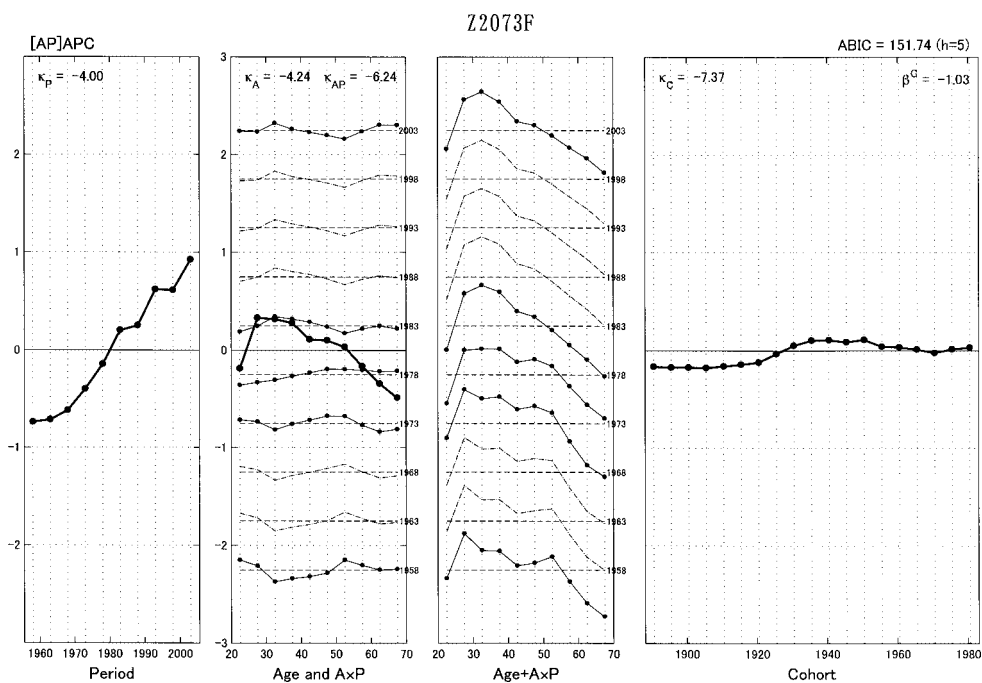


図6. [AP]APC モデルによる「#2.7 一番大切なもの(家族)[女性]」のコホート分析結果.

に順に対応し、時代効果、年齢効果と交互作用効果、コウホート効果のパラメータの推定値をプロットしている。左から3番目のパネルは、年齢効果に交互作用効果を足してプロットしたものである。当該年当時における年齢効果として解釈しよう、という意図による表示である。

図5の男性の結果で、左から2番目と3番目のパネルを見ると、{1978,'83,'88,'93,'98}年の交互作用効果が一点鎖線で表示されている。これは、これらの年の交互作用効果が間引かれたことを示したものであり、この間は交互作用効果のパラメータを線形補間しても間に合う程度の緩やかな変化であったか、あるいはほとんど変化がなかったことを示唆している。

左から2番目のパネルで年齢×時代の交互作用効果の推移を見てみると、1960年代前半までは若齢ほど(家族が大切と答える割合が高い傾向があったが、1970年代に入ると逆に高齢ほど高くなる傾向に転じている。これは、時代効果が、高度成長期を終え1973年のオイルショックにより反転した時期と対応しており、時勢要因が全年齢層に及ぼした以上の影響がより強く中高齢者に及んだと考えることができる。その後(1970年代後半以降)現在までは緩やかに推移しており、晩婚化の影響とみられる30歳台後半がピークの形状になっている。

図6の女性の結果では、{1963,'68}年と{1988,'93,'98}年の交互作用効果が間引かれたモデルが最終的に選択されている。前者の間引き期間は、1960年代から'70年代にかけての時代効果の変化が、男性とは若干違って緩やかだったことに呼応しているのであろう。1978年の交互作用効果は、遅れてはいるが1973年の男性の交互作用効果と同様の傾向を示している。この1970年代当時の時勢要因の影響は、女性に対してよりも男性に対しての方が急激だったと解釈できるであろう。これ以降の変化は、晩婚化の影響とみられ30歳台前半がピークの形状になっている。

左から3番目のパネルで年齢効果に交互作用効果を足したのを見てみると、図6の女性の場合にははっきりと20歳台後半から30歳台前半へのピークの移動が観察でき、その境目は1970年代後半にあるとみられる。図5の男性の場合にはピークの移動としては観察できていないが同様の晩婚化の影響をうかがわせる。

以上のように、交互作用効果モデルにより、年齢・時代・コウホートの3効果では捉えきれなかった変化の様相を観察することができた。

5. おわりに

コウホート分析における年齢×時代の交互作用効果モデルについて再検討し、新しい交互作用効果モデルを提案した。提案したモデルの特徴を記せば以下の3点となる。

1. 各効果パラメータの1次階差をパラメータとしてモデルを再記述した。
2. 年齢×時代の交互作用効果による部分ベクトルを、年齢効果、時代効果だけでなく、コウホート効果によるものについても直交させるようにした。
3. 年齢×時代の交互作用効果のいくつかの時点のパラメータを間引くことにより、交互作用効果のパラメータ数を節約した。

第1の点についてはその利点として、ABICの算出が若干簡単になった($\log |\Sigma| = (I - 1) \log \sigma_A^2 + (J - 1) \log \sigma_P^2$ 等の計算ですむ)こと、交互作用効果について直交制約などを付加するときの見通しがよくなったこと、効果パラメータへのゼロ和制約の課し方によりABICの値が変化するという岡本(2003)が指摘した問題を回避できたことがあげられる。第2の点についてはこのようにすることによって、数学的には交互作用効果の一部と考えられるコウホート効果を、交互作用効果からきちんと分離することができるようになった、といえる。第3の点については、このような間引く手順をさらに取り入れるることにより、交互作用効果のいわば濃淡

付録 B. 3つの主効果のデザイン行列

年齢・時代・コウホート効果のデザイン行列を要素表示によりそれぞれ

$$X_A = (x_{ni}^A), \quad X_P = (x_{nj}^P), \quad X_C = (x_{nk}^C)$$

とする(n はセルを渉るものとする)。

標準コウホート表の場合, 年齢区分数を I , 調査時点数を J とすると,

$$X_A = \mathbf{1}_J \otimes I_I = \begin{bmatrix} I_I \\ \vdots \\ I_I \end{bmatrix},$$

$$X_P = I_J \otimes \mathbf{1}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{1}_I \end{bmatrix},$$

$$X_C = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_J \end{bmatrix}$$

で与えられる(\otimes はクロネッカ積). このときコウホート区分数 $K = I + J - 1$, セル数 $N = IJ$ である.

一般コウホート表の場合, コウホートモデルはデザイン行列の要素を用いて

$$\eta_n = \beta^G + \sum_{i=1}^I x_{ni}^A \beta_i^A + \sum_{j=1}^J x_{nj}^P \beta_j^P + \sum_{k=1}^K x_{nk}^C \beta_k^C, \quad n = 1, \dots, N,$$

と表される. x_{ni}^A 等としては, セルにおける区分とパラメータにおける区分の範囲の重なり
の程度に比例する重みを考えればよい. たとえば, 大部分のセルの年齢区分は 5 歳幅であるが古
い調査時点では 10 歳幅あるいは 20 歳幅でしかデータが得られないような場合, 年齢効果のパ
ラメータの区分は 5 歳幅として, X_A の一部を

$$\begin{bmatrix} \beta_{20-24}^A & \beta_{25-29}^A & \beta_{30-34}^A & \beta_{35-39}^A & \beta_{40-44}^A & \beta_{45-49}^A & \beta_{50-54}^A & \beta_{55-59}^A \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{セル } 20-29 \\ \text{セル } 30-39 \\ \text{セル } 40-59 \end{matrix}$$

といったようにする. より精密には, 区分の範囲の重なりではなく, 母集団人口に比例するよ
うな重みをとってもよいだろう. 調査が毎年あるいは不定期に行われている場合のコウホート
効果のデザイン行列についても同様に考えればよい. 標準コウホート表の場合は, x_{ni}^A 等は 0
か 1 の値しかとらないので, 結局(2.2)のような表現となることに注意する. なお, Nakamura
(1986)では, 一般コウホート表のデザイン行列を作成する際に, オーバーラップを許すコウ
ホート効果のパラメータの区分を想定したが, パラメータ数が増えるという副作用があるので,
現在ではここで述べた按分による方法によっている.

標準・一般コウホート表の場合を問わず, 各効果のデザイン行列としては, フル列階数(full
column rank)であり, その各要素は 0 以上 1 以下の値をとり,

$$(B.1) \quad X_A \mathbf{1}_I = X_P \mathbf{1}_J = X_C \mathbf{1}_K = \mathbf{1}_N,$$

$$\mathbf{1}'_N \mathbf{X}_A \mathbf{1}_I = \mathbf{1}'_N \mathbf{X}_P \mathbf{1}_J = \mathbf{1}'_N \mathbf{X}_C \mathbf{1}_K = N$$

を満たすことが要請される．ここで， I, J, K はそれぞれ年齢・時代・コウホート効果のパラメータの数， N はセルの数である．

付録 C. コウホート分析における識別問題

標準コウホート表の場合，モデル(2.3)の段階でのデザイン行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{X}_A & \mathbf{X}_P & \mathbf{X}_C \end{bmatrix}$ の列ベクトルは (B.1)によるものの他に，年齢・時代・コウホート間にある $k = j - i + I$ という関係に起因して 1 次従属であり，パラメータのゼロ和制約の他に何らかの付加条件を課さなければ 3 効果のパラメータを一意に決定できないという問題——コウホート分析における識別問題——が存在する．以下で，この問題について検討する．

(A.2)の n_a を用いると (A.3)と $K = I + J - 1$ より，

$$\mathbf{1}_I^+ n_I = \frac{I+1}{2}, \quad \mathbf{1}_J^+ n_J = \frac{J+1}{2}, \quad \mathbf{1}_K^+ n_K = \frac{K+1}{2} = \frac{I+J}{2}$$

であるから，

$$\mathbf{1}_I^+ n_I - \mathbf{1}_J^+ n_J + \mathbf{1}_K^+ n_K = \frac{(I+1) - (J+1) + (I+J)}{2} = I$$

である．また，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_A n_I &= (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{I}_I)(\mathbf{1} \otimes n_I) = \mathbf{1}_J \otimes n_I = (n'_I, n'_I, \dots, n'_I)', \\ \mathbf{X}_P n_J &= (\mathbf{I}_J \otimes \mathbf{1}_I)(n_J \otimes \mathbf{1}) = n_J \otimes \mathbf{1}_I = (\mathbf{1}'_I, 2\mathbf{1}'_I, \dots, J\mathbf{1}'_I)' \end{aligned}$$

であり (A.4)より

$$\mathbf{X}_C n_K = (\{(I+1)\mathbf{1}_I - n_I\}', \{(I+2)\mathbf{1}_I - n_I\}', \dots, \{(I+J)\mathbf{1}_I - n_I\}')'$$

であることから，

$$\mathbf{X}_A n_I - \mathbf{X}_P n_J + \mathbf{X}_C n_K = I \mathbf{1}_N$$

という関係を満たしていることがわかる．セルの数 $N = IJ$ より，

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'_N \mathbf{X}_A n_I &= (\mathbf{1}'_J \otimes \mathbf{1}'_I)(\mathbf{1}_J \otimes n_I) = J \frac{I(I+1)}{2} = \frac{N(I+1)}{2}, \\ \mathbf{1}'_N \mathbf{X}_P n_J &= (\mathbf{1}'_J \otimes \mathbf{1}'_I)(n_J \otimes \mathbf{1}_I) = \frac{J(J+1)}{2} I = \frac{N(J+1)}{2}, \\ \mathbf{1}'_N \mathbf{X}_C n_K &= I \sum_{j=1}^J (I+j) - J \frac{I(I+1)}{2} = \frac{N(K+1)}{2} \end{aligned}$$

にも注意しておく．

さて，

$$\begin{aligned} \theta^A &= (I_I - \mathbf{1}_I \mathbf{1}'_I) n_I = n_I - \frac{I+1}{2} \mathbf{1}, \\ \theta^P &= -(I_J - \mathbf{1}_J \mathbf{1}'_J) n_J = -\left(n_J - \frac{J+1}{2} \mathbf{1} \right), \\ \theta^C &= (I_K - \mathbf{1}_K \mathbf{1}'_K) n_K = n_K - \frac{K+1}{2} \mathbf{1} \end{aligned}$$

とおくと (B.1) の性質に注意すれば,

$$\begin{aligned} & X_A \theta^A + X_C \theta^P + X_C \theta^C \\ &= (X_A n_I - X_P n_J + X_C n_K) - \mathbf{1}_N (\mathbf{1}_I^+ n_I - \mathbf{1}_J^+ n_J + \mathbf{1}_K^+ n_K) \\ &= I \mathbf{1}_N - I \mathbf{1}_N = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となっている. この関係が 3 効果を一義に決定できないというコウホート分析における識別問題の源泉である. すなわち, α を任意の実数として,

$$\begin{aligned} \eta &= \beta^G \mathbf{1} + X_A \beta^A + X_P \beta^P + X_C \beta^C + \alpha \mathbf{0} \\ &= \beta^G \mathbf{1} + X_A \beta^A + X_P \beta^P + X_C \beta^C + \alpha (X_A \theta^A + X_P \theta^P + X_C \theta^C) \\ &= \beta^G \mathbf{1} + X_A (\beta^A + \alpha \theta^A) + X_P (\beta^P + \alpha \theta^P) + X_C (\beta^C + \alpha \theta^C) \end{aligned}$$

であるから, $\beta_{\dagger i}^A (= \beta^A + \alpha \theta^A)$, $\beta_{\dagger j}^P (= \beta^P + \alpha \theta^P)$, $\beta_{\dagger k}^C (= \beta^C + \alpha \theta^C)$ の組も同じ η を与える. もちろん,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' X_A \theta^A &= \mathbf{1}'_N X_A n_I - \mathbf{1}'_N X_A \mathbf{1}_I \mathbf{1}_I^+ n_I = \frac{N(I+1)}{2} - N \frac{I+1}{2} = 0, \\ -\mathbf{1}' X_P \theta^P &= \mathbf{1}'_N X_P n_J - \mathbf{1}'_N X_P \mathbf{1}_J \mathbf{1}_J^+ n_J = \frac{N(J+1)}{2} - N \frac{J+1}{2} = 0, \\ \mathbf{1}' X_C \theta^C &= \mathbf{1}'_N X_C n_K - \mathbf{1}'_N X_C \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^+ n_K = \frac{N(K+1)}{2} - N \frac{K+1}{2} = 0 \end{aligned}$$

だから, ゼロ和制約

$$\mathbf{1}' X_A \beta_{\dagger}^A = \mathbf{1}' X_P \beta_{\dagger}^P = \mathbf{1}' X_C \beta_{\dagger}^C = 0$$

を満たしていることも容易に確かめられる.

β_{\dagger}^A 等の要素は, より具体的には

$$\begin{cases} \beta_{\dagger i}^A = \beta_i^A + \left(i - \frac{I+1}{2}\right) \alpha, & i = 1, \dots, I; \\ \beta_{\dagger j}^P = \beta_j^P - \left(j - \frac{J+1}{2}\right) \alpha, & j = 1, \dots, J; \\ \beta_{\dagger k}^C = \beta_k^C + \left(k - \frac{K+1}{2}\right) \alpha, & k = 1, \dots, K; \end{cases}$$

である. そしてここで, たとえば年齢効果の 1 次階差を考えると

$$\beta_{\dagger i}^A - \beta_{\dagger i+1}^A = \beta_i^A - \beta_{i+1}^A + \alpha, \quad i = 1, \dots, I-1$$

であり, これらの 2 乗和は

$$(C.1) \quad \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_{\dagger i}^A - \beta_{\dagger i+1}^A)^2 = \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 + 2(\beta_1^A - \beta_I^A) \alpha + (I-1) \alpha^2$$

となる. この右辺の第 3 項から (節約的であるような) 真の β_i^A があるとしたとき, このパラメータの 1 次階差の 2 乗和を小さくすることは, α^2 を小さくすることになり, 真の β_i^A に近い $\beta_{\dagger i}^A$ が得られると期待できる. コウホートモデルへの付加条件として 2.5 節で述べるパラメータの漸進的変化の条件を用いる理由である.

付録 D. 階差行列と階差パラメータ

パラメータの 1 次階差を与える $(\ell - 1) \times \ell$ の行列を $D_{(\ell)}$ とすれば,

$$D_{(\ell)} = \begin{bmatrix} I_{\ell-1} & \mathbf{0}_{\ell-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\ell-1} & I_{\ell-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる. この 1 つの一般逆行列 $D_{(\ell)}^-$ は,

$$D_{(\ell)}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

であり,

$$\begin{aligned} D_{(\ell)} D_{(\ell)}^- D_{(\ell)} &= D_{(\ell)}, \\ D_{(\ell)} D_{(\ell)}^- &= I_{\ell-1}, \end{aligned}$$

$$D_{(\ell)}^- D_{(\ell)} = \begin{bmatrix} I_{\ell-1} & -\mathbf{1}_{\ell-1} \\ \mathbf{0}' & 0 \end{bmatrix},$$

$$(D.1) \quad I_{\ell} - D_{(\ell)}^- D_{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\ell, \ell-1} & \mathbf{1}_{\ell} \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{\ell} i_{\ell}'$$

を満たしている (i_{ℓ} については (A.1) 参照).

たとえば年齢効果のパラメータの場合, $D_A = D_{(T)}$ として

$$\delta^A = D_A \beta^A$$

のように階差パラメータを得ると, 解の存在条件 $D_A D_A^- \delta^A = \delta^A$ を満たしており, 元のパラメータ β^A は任意のベクトル α^A (最後の要素を α^A とする) により一般解 (Magnus and Neudecker (1999), p. 38)

$$(D.2) \quad \begin{aligned} \beta^A &= D_A^- \delta^A + (I - D_A^- D_A) \alpha^A = D_A^- \delta^A + \mathbf{1}_T i_T' \alpha^A \\ &= D_A^- \delta^A + \alpha^A \mathbf{1} \end{aligned}$$

として得られる. ところで, ゼロ和制約

$$0 = \mathbf{1}' X_A \beta^A = \mathbf{1}' X_A (D_A^- \delta^A + \alpha^A \mathbf{1}) = \mathbf{1}' X_A D_A^- \delta^A + N \alpha^A$$

を課したことから,

$$\alpha^A = -\frac{1}{N} \mathbf{1}' X_A D_A^- \delta^A$$

として (D.2) により δ^A から β^A を求めればよい. 時代効果, コウホート効果のパラメータについても同様である.

付録 E. パラメータの推定法

(2.11)より

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \delta} = X'$$

(2.12)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \pi} &= (\text{diag } \pi)^{-1} \mathbf{y} - (\mathbf{I} - \text{diag } \pi)^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{y}), \\ \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} &= (\text{diag } \pi)(\mathbf{I} - \text{diag } \pi) \end{aligned}$$

である．これらより

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial \delta} \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} \frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \pi} &= X'(\text{diag } \pi)(\mathbf{I} - \text{diag } \pi)\{(\text{diag } \pi)^{-1} \mathbf{y} - (\mathbf{I} - \text{diag } \pi)^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{y})\} \\ &= X'\{\mathbf{y} - (\text{diag } \pi)\mathbf{y} - (\text{diag } \pi)(\mathbf{m} - \mathbf{y})\} \\ &= X'\{\mathbf{y} - (\text{diag } \pi)\mathbf{m}\} = X'(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

が得られる．ここで， $\boldsymbol{\mu} = (\text{diag } \mathbf{m})\pi$ ．

したがって (2.14)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \delta} &= \frac{\partial \eta'}{\partial \delta} \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} \frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \pi} + \frac{\partial \log \pi(\delta_* | \boldsymbol{\sigma})}{\partial \delta} = X'(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) - \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \delta_* \end{bmatrix} = A'c, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta \partial \delta'} &= -X'WX - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{bmatrix} = -A'B^{-1}A \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & X^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} \\ -\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \delta_* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} W^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix},$$

$$W = (\text{diag } \mathbf{m})(\text{diag } \pi)(\mathbf{I} - \text{diag } \pi)$$

である．

超パラメータ $\boldsymbol{\sigma}$ (すなわち， $\boldsymbol{\Sigma}$) を所与として，事後対数尤度関数 $\phi(\delta | \mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma})$ の最大化によりパラメータ δ の推定値 $\hat{\delta}$ を得る．そのために $\partial \phi / \partial \delta = 0$ を解く．左辺を $\hat{\delta}$ の近似値 δ_0 の周りにテイラー展開すると，

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \phi(\hat{\delta})}{\partial \delta} \simeq \frac{\partial \phi(\delta_0)}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 \phi(\delta_0)}{\partial \delta \partial \delta'} (\hat{\delta} - \delta_0)$$

であるから，

$$(E.1) \quad A'B_0^{-1}A\hat{\delta} \simeq A'B_0^{-1}A\delta_0 + A'c_0$$

となり，この線形方程式を繰り返し解いて $\hat{\delta}$ を求めればよいことがわかる．ここで，各記号の下付の $_0$ は近似値 δ_0 を用いて評価したことを意味する．

$$E = B_0^{-\frac{1}{2}}A, \quad e = B_0^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \eta_0 + W_0^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

とおくと (E.1) の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= A' B_0^{-1} (A \delta_0 + B_0 c_0) = A' B_0^{-1} \left(\begin{bmatrix} X \delta_0 \\ \delta_{*0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_0^{-1} (y - \mu_0) \\ -\delta_{*0} \end{bmatrix} \right) \\ &= A' B_0^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 + W_0^{-1} (y - \mu_0) \\ 0 \end{bmatrix} = E' e \end{aligned}$$

となるから (E.1) は

$$E' E \hat{\delta} \simeq E' e$$

となる．さらに， $E = QR$ と QR 分解 ($Q'Q = I$ で R は正則な上三角行列) を行うと

$$R' Q' Q R \hat{\delta} \simeq R' Q' e$$

より，

$$\hat{\delta} \simeq R^{-1} Q' e$$

と求めることができる．

付録 F. ABIC の導出

対数事後尤度 (2.14) の $\phi(\delta)$ を $\hat{\delta}$ のまわりでテイラー展開して近似すると，

$$\phi(\delta) \simeq \phi(\hat{\delta}) + (\delta - \hat{\delta})' \frac{\partial \phi(\hat{\delta})}{\partial \delta} + \frac{1}{2} (\delta - \hat{\delta})' \frac{\partial^2 \phi(\hat{\delta})}{\partial \delta \partial \delta'} (\delta - \hat{\delta})$$

である． $\partial \hat{\delta} / \partial \delta = 0$ であるから右辺第 2 項は消え，付録 E の A, B を用いて，

$$\begin{aligned} \exp\{\phi(\delta) + (\text{const.})\} &= f(y|\delta) \cdot \pi(\delta_*|\sigma) \\ &\simeq \exp\{\phi(\hat{\delta}) + (\text{const.})\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} (\delta - \hat{\delta})' A' \hat{B} A (\delta - \hat{\delta})\right\}. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} (\text{F.1}) \quad &\int f(y|\delta) \cdot \pi(\delta_*|\sigma) d\delta_* \\ &\simeq \exp\{\phi(\hat{\delta}) + (\text{const.})\} \int \exp\left\{-\frac{1}{2} (\delta - \hat{\delta})' A' \hat{B} A (\delta - \hat{\delta})\right\} d\delta_* \end{aligned}$$

である．ここで，各記号の $\hat{}$ は推定値 $\hat{\delta}$ を用いて評価したことを意味する．

$$\begin{aligned} &(\delta - \hat{\delta})' A' \hat{B} A (\delta - \hat{\delta}) \\ &= (\delta - \hat{\delta})' \begin{bmatrix} 1 & X^* \\ 0 & I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X^* \\ 0 & I \end{bmatrix} (\delta - \hat{\delta}) \\ &= \begin{bmatrix} \beta^G - \hat{\beta}^G \\ \delta_* - \hat{\delta}_* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1' \hat{W} 1 & 1' \hat{W} X^* \\ X^{*'} \hat{W} 1 & X^{*'} \hat{W} X^* + \Sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^G - \hat{\beta}^G \\ \delta_* - \hat{\delta}_* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より，ある値 v^2 により

$$\int \exp\left\{-\frac{1}{2} (\delta - \hat{\delta})' A' \hat{B} A (\delta - \hat{\delta})\right\} d\delta_*$$

$$= (2\pi)^{\frac{M}{2}} |X^{*'}\widehat{W}X^* + \Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta^G - \widehat{\beta}^G)^2\right\}$$

を得る .

(F.1)の両辺の $-2\log$ をとり $2h$ を足して , ABIC が小さくなるように $\delta = \widehat{\delta}$ ととれば ,

$$\begin{aligned} \text{ABIC} &\simeq -2\phi(\widehat{\delta}) - M \log 2\pi + \log |X^{*'}\widehat{W}X^* + \Sigma^{-1}| + 2h \\ &= -2\ell(\widehat{\delta}) + M \log 2\pi + \log |\Sigma| + \widehat{\delta}'\Sigma^{-1}\widehat{\delta} - M \log 2\pi + \log |X^{*'}\widehat{W}X^* + \Sigma^{-1}| + 2h. \end{aligned}$$

ABIC の比較には定数 $2y' \log y + 2(m - y)' \log(m - y)$ を足してもかまわないから , 結局

$$\begin{aligned} \text{ABIC} &\simeq 2y' \log y + 2(m - y)' \log(m - y) - 2y' \log \widehat{\mu} - 2(m - y)' \log(m - \widehat{\mu}) \\ &\quad + \log |\Sigma| + \widehat{\delta}'\Sigma^{-1}\widehat{\delta} + \log |X^{*'}\widehat{W}X^* + \Sigma^{-1}| + 2h \end{aligned}$$

となり (2.15)を得る .

付録 G. 年齢×時代の交互作用効果のデザイン行列

等間隔調査時点で調査時点数 $J = 4$ の一般コウホート表について考えてみる . このとき , 調査時点ごとにセルの年齢区分は異なってもよいが , 年齢効果と年齢×時代効果のパラメータの年齢区分は同じとする(この制約や等間隔調査時点の制約を外すことも可能である) . 年齢 , 時代 , 年齢×時代効果のデザイン行列はそれぞれ次のようになる .

$$\begin{aligned} X_A &= \begin{bmatrix} X_{A(1)} \\ X_{A(2)} \\ X_{A(3)} \\ X_{A(4)} \end{bmatrix}, \quad X_P = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(1)} & & & \\ & \mathbf{1}_{(2)} & & \\ & & \mathbf{1}_{(3)} & \\ & & & \mathbf{1}_{(4)} \end{bmatrix}, \\ X_{AP} &= \begin{bmatrix} X_{A(1)} & & & \\ & X_{A(2)} & & \\ & & X_{A(3)} & \\ & & & X_{A(4)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

標準コウホート表なら $X_{A(j)} = I_I$ また $\mathbf{1}_{(j)} = \mathbf{1}_I$ ($j = 1, \dots, J$)であるが , それに限らなくてよい . 各調査時点のセルの数 , すなわち , $X_{A(j)}$ の行の数は一般に異なっている . 対応して , 交互作用効果パラメータを $\beta^{AP} = \text{vec}\left[\beta_{(1)}^{AP} \beta_{(2)}^{AP} \beta_{(3)}^{AP} \beta_{(4)}^{AP}\right]$ とする .

さて , $j = 2$ の交互作用効果パラメータ $\beta_{(2)}^{AP}$ を間引く場合には , $\beta_{(2)}^{AP} = \frac{1}{2}\beta_{(1)}^{AP} + \frac{1}{2}\beta_{(3)}^{AP}$ のように補間することにして , デザイン行列とパラメータベクトルは

$$X_{AP} = \begin{bmatrix} X_{A(1)} & & & \\ \frac{1}{2}X_{A(2)} & \frac{1}{2}X_{A(2)} & & \\ & X_{A(3)} & & \\ & & & X_{A(4)} \end{bmatrix}, \quad \beta^{AP} = \text{vec}\left[\beta_{(1)}^{AP} \beta_{(3)}^{AP} \beta_{(4)}^{AP}\right]$$

とすればよい . 交互作用効果パラメータの(残っている)時点数を J_* とすればこの場合は $J_* = 3$ である . $\beta_{(2)}^{AP}$ と $\beta_{(3)}^{AP}$ の 2 時点のパラメータを間引く場合には , デザイン行列とパラメータベ

クトルは

$$\mathbf{X}_{AP} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{A(1)} \\ \frac{2}{3}\mathbf{X}_{A(2)} & \frac{1}{3}\mathbf{X}_{A(2)} \\ \frac{1}{3}\mathbf{X}_{A(3)} & \frac{2}{3}\mathbf{X}_{A(3)} \\ & \mathbf{X}_{A(4)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{AP} = \text{vec} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{AP(1)} & \boldsymbol{\beta}^{AP(4)} \end{bmatrix}$$

とすることになる($J_* = 2$).

ここで (3.5) は J を J_* に置き換えても成り立っている. すなわち,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{AP}^- \mathbf{D}_{AP}) \text{vec } \mathbf{A} = (\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{1}_I) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_I + (\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{I}_I) \boldsymbol{\alpha}_{J_*} - (\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{1}_I) \boldsymbol{\alpha}_{IJ_*}.$$

まず, 上の $J_* = 2$ の場合には,

$$\mathbf{X}_{AP}(\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{1}_I) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(1)} \\ \frac{2}{3}\mathbf{1}_{(2)} & \frac{1}{3}\mathbf{1}_{(2)} \\ \frac{1}{3}\mathbf{1}_{(3)} & \frac{2}{3}\mathbf{1}_{(3)} \\ & \mathbf{1}_{(4)} \end{bmatrix}$$

となっており, より一般に, ある適当な行列 B_1 によって

$$\mathbf{X}_{AP}(\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{1}_I) = \mathbf{X}_P B_1$$

となることが容易にわかる. つぎに,

$$\mathbf{X}_{AP}(\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{I}_I) = \mathbf{X}_A, \quad \mathbf{X}_{AP}(\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{1}_I) = \mathbf{1}$$

も確かめられる.

年齢×時代の交互作用効果のデザイン行列としては, さらに一般の場合も含めて, I も I_* に置き換え, ある適当な行列 B_1, B_2 によって

$$(G.1) \quad \mathbf{X}_{AP}(\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{1}_{I_*}) = \mathbf{X}_P B_1, \quad \mathbf{X}_{AP}(\mathbf{1}_{J_*} \otimes \mathbf{I}_{I_*}) = \mathbf{X}_A B_2, \quad \mathbf{X}_{AP} \mathbf{1} = \mathbf{1}_N$$

が満たされるように作ることが要請される.

参 考 文 献

- Akaike, H. (1980) Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith), 143–166, University Press, Valencia.
- Glenn, N. D. (1977) *Cohort Analysis*, Sage Publications, Beverly Hills and London. (藤田英典 訳 (1984). 『コーホート分析法』, 朝倉書店, 東京)
- 広津千尋 (2004). 『医学・薬学データの統計解析』, 東京大学出版会, 東京.
- Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1999) *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, Revised Edition*, John Wiley & Sons, New York.
- Mason, W. M. and Fienberg, S. E. (eds.) (1985) *Cohort Analysis in Social Research*, Springer-Verlag, New York.
- McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989) *Generalized Linear Models*, 2nd ed., Chapman and Hall, London.

- 中村 隆(1982). ベイズ型コウホート・モデル—標準コウホート表への適用—, 統計数理研究所彙報, 29, 77-97.
- 中村 隆(1986). 交互作用項のあるコウホート・モデル—ベイズ型コウホートモデル(VI)—, 第14回日本行動計量学会大会発表論文抄録集, 19-20.
- Nakamura, T.(1986) Bayesian cohort models for general cohort table analyses, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 32, 353-370.
- 中村 隆(1987). 交互作用項のあるコウホート・モデル(2)—ベイズ型コウホートモデル(VII)—, 第15回日本行動計量学会大会発表論文抄録集, C2.3, 1-2.
- 中村 隆(1989). 継続調査によって社会の変化を捉えるコウホート分析の方法, 理論と方法, 4, 5-23.
- 中村 隆(1995). 交互作用効果モデルと過大分散モデルを用いたコウホート分析—「日本人の国民性調査」データへの適用—, 統計数理, 43, 99-119.
- 中村 隆(2000). 質問項目のコウホート分析—多項ロジット・コウホートモデル—, 統計数理, 48, 93-119.
- Nakamura, T.(2002) Cohort analysis of data obtained using a multiple choice question, *Measurement and Multivariate Analysis* (eds. S. Nishisato, Y. Baba, H. Bozdogan and K. Kanefuji), 241-248, Springer-Verlag, Tokyo.
- 岡本政人(2003). 交互作用効果を考慮したベイズ型コウホートモデルの拡張, 応用統計学, 32, 145-162.
- Ryder, N. B.(1965) The cohort as a concept in the study of social change, *American Sociological Review*, 30, 843-861.
- 坂元慶行, 中村 隆, 前田忠彦, 土屋隆裕(2004). 国民性の研究 第11次全国調査—2003年全国調査—, 統計数理研究所研究レポート, No. 92.
- 柳井晴夫, 竹内 啓(1983). 『射影行列・一般逆行列・特異値分解』, 東京大学出版会, 東京.

Reconsideration of a Bayesian Age-period-cohort Model with Age-by-period Interaction Effects

Takashi Nakamura

The Institute of Statistical Mathematics

This paper reconsiders a Bayesian age-period-cohort (BAPC) model with age-by-period interaction effects. The existing BAPC model is rewritten in terms of difference vectors and matrices. A two-factor interaction effect model based on assumptions on the differences of the effect parameters for a general purpose of analyzing two-way contingency table data is proposed. However, simply adding to it cohort effects is shown to fail to separate the age-by-period interaction and the cohort effects. To resolve this difficulty, a new BAPC model with age-by-period interaction effects is proposed. This model orthogonalizes the linear combination of the column vectors by the interaction effects to that by the cohort effects as well as those by the age and the period effects. It also involves a procedure for excluding a subset of age-by-period interaction effects to save the number of parameters to be estimated. An application to a dataset obtained from the surveys of the Japanese national character study is presented.