

# イントラデイ VaR による GARCH モデルの 比較実証

森本 孝之<sup>1</sup>・川崎 能典<sup>2</sup>

(受付 2005 年 7 月 26 日; 改訂 2006 年 1 月 20 日)

## 要 旨

株価ティックデータから 10 分刻みの等間隔時系列を生成し、イントラデイ(日内)でのダウンサイドリスク計測を考える。背景・動機は日計りやデイトレードにおけるリスク計測である。日内周期性を考慮した上で、一変量および多変量 GARCH モデルの変種を実際の時系列データに適用し、イントラデイでの VaR における超過率という観点から、モデルを実証的に比較分析した結果を報告する。

キーワード：高頻度データ，日内周期性，多変量 GARCH，イントラデイ VaR。

## 1. はじめに

オプション価格付けの精密な理論構築を契機に、この四半世紀で現代ファイナンスは大きく発展を遂げたが、この 10 年間に於ける中心的な課題のひとつは、VaR (Value at Risk) に代表されるリスク管理であったと言える。その一方で、現実の金融取引ではデイトレーディングといった日内の原資産変動を利用した投資が徐々にボリュームを増しつつある。このような現状に鑑み本報告では、日計りやデイトレードにおけるリスク計測を念頭に、株価ティックデータから 10 分刻みの等間隔時系列を生成し、イントラデイ(日内)でのダウンサイドリスク計測を考える。日内周期性を考慮した上で、一変量および多変量 GARCH モデルの変種を実際の高頻度データ(ティックデータ)に適用し、イントラデイでの VaR における超過率という観点から、モデルを実証的に比較分析した結果を報告する。

ここで使用される高頻度データと従来の価格データ(日次、週次、月次等)との決定的な違いは、前者においてはその生起間隔(取引間隔)が不均等に発生し、既存の統計モデルをそのまま適用できない点にある。予測が目的の場合はこの点は不都合なので、本報告では不等間隔系列から等間隔系列を抽出した上で従来の離散時間型時系列モデルを使用することで、高頻度データに基づく日内リスク計測を行う。予測検証はインサンプル予測に基づく。すなわち、データの推定期間において各モデルのパラメータを推定し、それらを所与として同一期間内で 1 期先の VaR 予測を逐次的に行い、各モデルの予測パフォーマンスを比較する。

デイトレードなどの日内取引が隆盛を極め、それに関係する啓蒙書等が市井に多々出回っているが、日内取引を前提としたリスク計測の統計分析手法に関する文献は、少なくとも日本語によるものは存在しない。そういった点を踏まえ、日計りやデイトレードにおけるリスク計測

<sup>1</sup> 名古屋大学大学院 工学研究科：〒464-8603 名古屋市千種区不老町

<sup>2</sup> 統計数理研究所：〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

を背景・動機とし、実データを用いたイントラデイでの VaR 計測の方法を示した。また、多変量 GARCH モデル、特に DCC モデルによる実証分析は、世界的にもほとんどなく、また多変量 GARCH モデルによるイントラデイデータの分析は存在しない。本稿ではこの点についても論じた。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節「データの観測」では、高頻度データの特徴を挙げ、それに対処する方法を論じた。第 3 節「市場リスクの計測」では、分析に使用する各モデルの簡単な紹介とそれらを使ったパラメータの推定を行う。そして第 4 節「パフォーマンスの検証」では、尤度比検定を用い、各モデルにより求められた VaR の事後評価を行う。

## 2. データの観測

高頻度データは、取引過程と市場の微細構造に関する様々な問題を研究するために重要である。すなわち、価格発見 (price discovery) を行う際に、異なる取引システムの効率性を比較するために使うことができる。たとえば、公開競り方式とコンピュータ取引といった異なる取引システム間の効率性(あるニュースが入ったとき、それが価格に即座に反映されるか、といったこと)を比較する場合、通常の(その日の終値のみを使った)日次データでは難しいが、日内の分、秒単位のデータであれば、それを捉え比較分析することができる。そして、この高頻度データには、従来の経済時系列(日次、月次、そして年次など)では見られないいくつかのユニークな特徴がある。その特徴をまとめると次のようになる。

- (1) 不均一な時間幅：証券取引所での株式売買のような取引は、均一な時間幅では発生しない。そのため、観測された取引価格は、等間隔な時系列にはならない。取引間隔には、市場の微細構造に関する有益な情報(たとえば取引強度)が含まれているはずである。
- (2) 日次周期あるいは日内パターンの存在：普通の取引条件の下で、取引活動は、周期的パターンを示すことがある。
- (3) 同一の単位時間内で複数の取引：同一銘柄が異なる価格で同時間帯に取引される。現在東証のティックデータは 1 分刻みなので、流動性の高い銘柄を取引量の多い時間帯で観測していると、単位時間内に複数の観測が得られることがある。

といった特徴がある。このような特徴を踏まえ、これらを分析するために、どのような取り扱い方が必要なのかを以下で考察する。

### 2.1 時間間隔の変更

上述したように、高頻度データのような不均等に到達時刻を持つ系列に対して、既存の時系列モデルをそのまま当てはめて使うことはできない。そこで何らかの方法により、こういった不均等な時間を等間隔の時間へと変換する方法を考える必要がある。ここでは、Giot (2000, 2002), Morimoto (2005) にあるように、最も単純に、ある時間間隔の終値をもって、その時間での代表値と考える方法を採用する。

本稿でのデータ解析に即した形で、以下具体的に説明する。株式市場の午前の取引(前場)は 9 時から 11 時、午後の取引(後場)は 13 時 30 分から 15 時まで行われる。各営業日の昼休みと、ある日の後場終了から翌日の前場開始までは全て考察の対象外とする。各営業日ごとに、4 時間 30 分の観測区間が与えられる。この区間を、等間隔かつ重なり合わない小区間に分割する。本稿では株式市場の流動性と 1 営業日当りの標本数を考慮し 10 分間隔とした。この 10 分間隔において、直近になって発生した取引の収益率をその区間の収益率として定義する。また、ある区間にデータがひとつも含まれなかった場合には、直前の区間の収益率を当該区間の収益率とする。こうしてできた各一日の収益率過程を繋ぐことにより、任意の期間での例えば 10 分

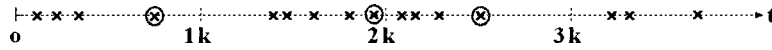


図 1. 不等間隔時系列から等間隔時系列を生成.

間隔の時系列を作ることができる (図 1 も参照されたい. 図中  $k$  が 10 分の間隔に相当する.)

本稿では VaR の一期先予測のパフォーマンスの評価を考えるために, 便宜的に細かな区間等間隔の時系列を生成しているが, 予測が第一の目的でなければ, 不等間隔で観測された多変量データをそのまま利用することも考えられる. 例えば, 観測時点が必ずしも揃っていない多変量時系列をもとに複数資産の相関(共分散)を推定する問題を取り扱った最近の研究として, Hayashi and Yoshida (2005)あるいは Hoshikawa et al. (2005)が挙げられる.

### 2.2 日内周期性の調整

例として, 2001 年 7 月 2 日から同年 9 月 28 日まで(63 営業日)の日産(コード: 7201), トヨタ(7203)及びホンダ(7267)の国内 3 大自動車メーカーの高頻度株価データを考える. 図 2, 3 及び 4 は, 2.1 節の方法で 10 分ごとの等間隔時系列に直した収益率の 2 乗を, 区間ごとに 63 営業日分の平均(図中の  $\bar{r}$ )を求め, その平均値系列に対してスプライン平滑化を施したグラフであり, 図中実線がスプライン曲線である. 横軸は, 前場を起点に昼休みをはさんで後場までを秒単位で表示している. 縦軸は 2 乗収益率に対応するので, 縦軸における一目盛は約 0.3%( $100 \times \sqrt{10^{-5}} \approx 0.3$ )である. ボラティリティにおける W 字型の日内パターンは, 昼休みの存在する日本の株式市場に顕著な特徴で, 一般には V 字あるいは U 字型である. そのような違いこそあれ, 市場の開いた直後と閉まる直前にボラティリティが高まるのは, 各国共通に観察されるものである. 例えば, FOREX ならびに先物市場を扱った Anderson and Bollerslev (1997)や, IBM の株価ティックデータを扱った Giot (2000)でも同様の V 字あるいは U 字型パターンが観察されている.

このような, 時間帯におけるボラティリティレベルの高低の背後にある経験的事実として挙げられるのが, 株式市場においては「寄り」と「引け」に取引が集中することである. 取引が集中することは, 様々な思惑, 様々な見方の市場参加者が存在していることを示し, そのような見方の多様性が高いボラティリティにつながっている. このことは, 実際に考えている区間は非常に短いものの, 経済時系列における季節性と特徴は同じである. 例えば, 月次の売り上げデータで 12 月の値が大きいのは, 社会制度や習慣に基づいて人々の歳末の消費行動が相対的に大きくなるからにほかならない. このような類似性から, ボラティリティあるいはクォート・取引の強度に見られる, 日内での安定的な周期パターンを, 日内季節性(intraday seasonality)あるいは日内周期性(intraday periodicity)と呼ぶ. ボラティリティについては, 例えば Bauwens and Giot (2001)の 3.1.3 節を参照されたい.

では, 日内周期性がボラティリティモデルの推定や予測にもたらす問題とは何であろうか. 一周期(例えば 1 年)内の観測数が 4 や 12 といった次元で, 季節性を無視して例えば AR モデルのようなラグモデルを順次次数を変えながら当てはめると, モデルの次数は一周期前のラグを拾うまで上昇し続けるだろう. このような, 状態次元の低い時系列モデルの場合から類推すると, 高頻度データのケースで単純にボラティリティ・モデルを当てはめれば, モデルの次数は一周期内の観測数にまで上昇するであろう. このことは, 一般に低次のモデルしか現実的でない GARCH モデルとその変種では, まず推定を困難にし, 仮にモデルが得られたとしても, その予測誤差は非常に大きいであろうことが予想される. すなわち, 日内周期性はラグモデルによるのではなく, 何らかの決定論的な関数で表現した上で取り除くのが得策である.

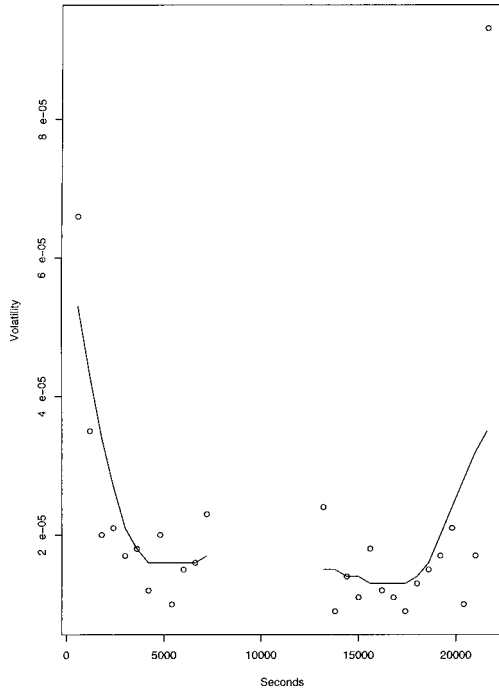


図 2. 日産(7201)の10分間隔の平均ボラティリティと平滑化曲線.

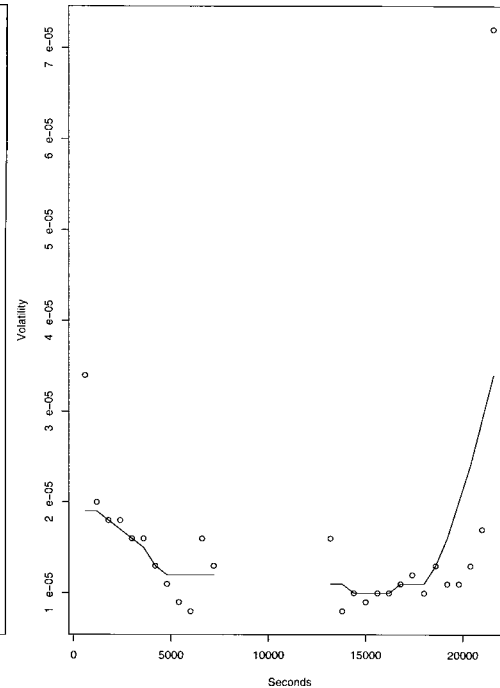


図 3. トヨタ(7203)の10分間隔の平均ボラティリティと平滑化曲線.

寄りと引けにおけるボラティリティや流動性が高いという傾向は、実際の市場参加者の行動からしてほぼ安定的なものと考えてよからう。そこで経済時系列の平均値系列に対する季節調整と同様に、分散系列にも何らかの方法で事前の調整を考える。ここでは、前節において等間隔化された収益率の二乗系列  $r_i^2$  を、各時間における平均的なボラティリティの大きさを与える時間の決定論的関数  $\varphi_i$  で近似し、それを利用して

$$r_i^* = \frac{r_i}{\sqrt{\varphi_i}}$$

により新しい系列  $r_i^*$  を作る。ここで  $r_i^*$  は、日内周期性調整済み収益率過程と呼ばれ、 $\varphi_i$  は、日内時間関数(time of day function)と呼ばれる。 $\varphi_i$  の推定値は、一般的にスプライン平滑化、カーネル法により得ることができる(再び Bauwens and Giot, 2001, の 3.1.3 節を参照)。なお、ここでは Friedman's super smoother (Friedman, 1984a, 1984b) を用いて平滑化を行っている。次節以降における収益率とは、断りのない限りすべて日内周期性調整済み収益率を指すものとする。なお、本稿で扱う問題においても日内周期性の前処理が必要であることは、VaR の優劣という観点から 4.4 節で実証的に示される。

### 3. 市場リスクの計測

金融市場には信用性、流動性、及び市場性に起因するリスクが存在する。実務の現場において、これらは、それぞれ信用リスク、流動性リスク、及び市場リスクと呼ばれる。この中で、VaR は、主として市場リスクに関するものである。このリスク測度は、金融機関が自身のリス

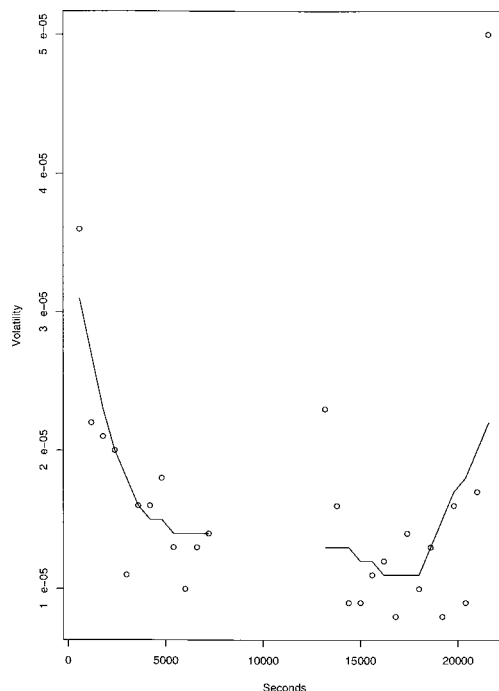


図 4. ホンダ(7267)の 10 分間隔の平均ボラティリティと平滑化曲線 .

ク管理のため、あるいは BIS 規制といった外部からの要請によって、一つのリスク尺度として用いられる。金融機関の立場からすると、VaR は所与の期間における所与の確率での最大損失として定義することができる。こうしたことから、金融市場における非常に希な事象と関連付けられたリスク測度として VaR を扱うことができる。

次に、VaR を数学的に定義する。時点  $i - 1$  において、次の時点  $i$  における最大損失の確率に興味を持っているとしよう。  $\Delta V_i$  を時点  $i - 1$  から  $i$  までの仮に円建て金融資産の価値の変化とすれば、これは円を単位とする確率変数である。また、  $\Delta V_i$  の分布関数を  $F_i(\cdot)$  とすれば、買い持ち(ロング)ポジションに対する確率  $p$  の 1 期間 VaR は、

$$(3.1) \quad p = \Pr[\Delta V_i \leq \text{VaR}] = F_i(\text{VaR})$$

と定義される。買い持ちポジションをとる資産保有者は  $\Delta V_i < 0$  のとき損失を被るので、  $p$  が十分小さければ (3.1) 式における VaR は、一般的に負の値となる。つまり、この負の符号が損失を意味しているわけである。定義より、  $p$  はまさに、この期間における資産保有者が VaR と同じか、あるいは大きい損失を被る確率のことである (逆に、この期間における資産保有者が被る潜在的損失は、確率  $(1 - p)$  でせいぜい VaR と同じか、それよりも小さいといえる。)

上記の VaR に関する定義を踏まえ、ここでは、以下で定式化される 5 つの一変量モデル: Normal, NormalGARCH, Student, StudentGARCH 及び RiskMetrics<sup>TM</sup> と 5 つの多変量 GARCH モデル: VECM, BEKK, Diagonal, CC 及び DCC を用い、イントラデイ VaR の予測を試みる。予測期間は推定期間と同一の期間、つまりインサンプルによる予測をおこなう。具体的には、推定期間で推定した各モデルのパラメータの推定値を用い、その期間において順次 1 期先

の VaR を計算し、実際の収益率の観測値と比較することにより、モデルの優劣を考察した。時間間隔  $k$  に関しては 10 分とした。通常 VaR と言えば、ポジション量と資産保有期間に依存するのが一般的であるが、本稿の設定ではポジションは仮想的に 1 銘柄あるいは 1 銘柄ずつを保有した場合のみを考え、資産保有期間は 1 期 (=10 分) でそれを逐次的に更新する設定である。従ってここでの VaR は、事実上ポジション量も保有期間も捨象した議論で、VaR は収益率分布のパーセント点に相当している。また、本稿では常に買い持ち(ロング)ポジションに対する VaR のみを考え、売り(ショート)ポジションに対する VaR は考えないこととする。売りポジションに対する VaR については Tsay (2002, p. 258) を参照。

### 3.1 一変量モデルの定式化

各銘柄のボラティリティ間の相互相関を考慮せずに分析する一変量モデルとして、以下で示す 5 つのモデルを使用した。これらのモデルから計算される VaR は以下ようになる。なお、比較の簡単化のために、自己回帰型モデルの次数は全て 1 とする。また、GARCH 型モデルの対数収益過程  $r_i$  は平均構造を持たず、イノベーション項  $\epsilon_i$  に等しい、つまり、

$$r_i = \epsilon_i, \quad \epsilon_i = \sqrt{h_i} \xi_i, \quad \xi_i \sim \text{i.i.d. r.v.}$$

と仮定する。ここでボラティリティ  $h_i$  は、非負の実数値をとる収益率  $r_i$  の条件付き分散である。Normal モデル。これは、 $I$  を推定期間における総標本数とする  $1 \leq i \leq I$  上の  $r_i$  に対して、収益率の標準偏差の推定値  $\hat{\sigma}$  を、そのまま VaR の計算に利用する。よって、変動要素は日内時間関数の影響のみである。

$$\text{VaR}_N(i) = z_\alpha \hat{\sigma} \sqrt{\varphi_i}$$

ここで  $z_\alpha$  は、正規分布の下側  $100\alpha$  パーセント点である。

NormalGARCH モデル。このモデルは、Engle (1982) による ARCH モデルを Bollerslev (1986) が拡張したモデルで、現在のボラティリティ  $h_i$  が過去のショック  $\epsilon_{i-1}$  の 2 乗と過去のボラティリティ  $h_{i-1}$  に依存すると考えるモデルである。ここでは、 $\xi_i \sim \text{i.i.d. } N(0, 1)$  としている。

$$(3.2) \quad h_i = \omega + \alpha \epsilon_{i-1}^2 + \beta h_{i-1}$$

ここで  $\omega > 0$ ,  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  及び  $\alpha + \beta < 1$  である。この VaR は次のようになる。

$$\text{VaR}_{NG}(i) = z_\alpha \sqrt{\hat{h}_i} \varphi_i$$

ただしここで  $\hat{h}_i$  は、標本から推定した  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  を (3.2) に代入した更新式から得られる一期先予測を表すものとする (以下のモデルでも同様)。

Student ( $t$ -分布) モデル。これは、収益率の分布が自由度  $f$  の  $t$ -分布に従うと仮定したモデルである。

$$\text{VaR}_t(i) = t_{\alpha, f} \hat{\sigma} \sqrt{\varphi_i}$$

ここで  $t_{\alpha, f}$  は、自由度  $f$  の  $t$ -分布の下側  $100\alpha$  パーセント点であり、 $\hat{\sigma}$  は収益率の標準偏差の推定値である。

StudentGARCH モデル。これは、上述の NormalGARCH モデルの  $\xi_i$  の分布が自由度  $f$  の  $t$ -分布に従うと仮定したモデルである。

$$\text{VaR}_{SG}(i) = t_{\alpha, f} \sqrt{\hat{h}_i} \varphi_i$$

ここで  $t_{\alpha, f}$  は、自由度  $f$  の  $t$ -分布の下側  $100\alpha$  パーセント点である。

RiskMetrics™ モデル。このモデルは、J.P. モルガンが 1995 年に市場リスクの計測のために導入したものであり、形としては Integrated-GARCH(1, 1)モデル、つまり通常の GARCH におけるパラメータが  $\alpha + \beta = 1$  となるようなモデルであり、ショックの影響は恒久的なものとして解釈できる。推定すべきパラメータは 2 つだけであり、容易に推定できることも特徴である。詳しくは、J. P. Morgan(1996)を参照されたい。ボラティリティのモデルは

$$h_i = \omega + \lambda \epsilon_{i-1}^2 + (1 - \lambda)h_{i-1}$$

で与えられ、その VaR は

$$\text{VaR}_{RM}(i) = z_\alpha \sqrt{\hat{h}_i \varphi_i}$$

として計算できる。ここで  $0 \leq \lambda \leq 1$  である。平均値過程に対する Integrated Moving Average モデルと同様、IGARCH(1, 1)が指数平滑化法と密接に関連していることが上の  $h_i$  の式に明瞭に表れている。

### 3.2 多変量モデルの定式化

本節では前節の一変量 GARCH モデルを多変量に拡張したモデルを導入する。対数収益過程の仮定は、一変量モデルの場合と同様に考え、次のようになる。

$$R_i = E_i, \quad E_i = H_i^{1/2} \Xi_i,$$

ここで、 $R_i$  は  $N$  変量の収益率過程つまり  $R_i = (r_{1i}, \dots, r_{Ni})'$ 、 $H_i$  は  $N \times N$  の正値定符号行列を持つ  $R_i$  の条件付き共分散行列、 $\Xi_i$  は  $E(\Xi_i) = 0$  及び  $\text{Var}(\Xi_i) = I_N$  となるような  $N \times 1$  の確率ベクトルである。また、 $I_N$  は  $N$  次元単位行列である。ここでは、以下のような 5 つの多変量 GARCH モデルを用いて分析を進める。ここでのモデルは、すべて誤差項の分布は正規分布、ラグの次数は 1 次と仮定している。なお、多変量 GARCH モデルを解説した論文としては、Kroner and Ng(1998)があり、最新のサーベイ論文としては Bauwens et al.(2006)が挙げられる。

VECH モデル。このモデルは、Bollerslev et al.(1988)によって提案された最も一般的なモデル(原論文では diagonal vech モデルとして取り上げられている)であり、次のように表される。

$$\text{vech}(H_i) = W + A\text{vech}(H_{i-1}) + B\text{vech}(E_{i-1}E_{i-1}')$$

ここで、 $\text{vech}$  は行列の上三角成分を取り出し列ベクトルに並べる演算子である。このモデルを扱う場合の主要な欠点として、次の 2 つがある。まずこのモデルのパラメータの数は  $\frac{3}{2}N(N+1)$  となり、たとえば 3 変量ならば、18 個のパラメータを推定する必要がある。第二の点は、 $R_i$  の条件付き共分散行列、つまり  $H_i$  が正値定符号となることが保証されないことである。これらの欠点を補うモデルを以下に述べる。

BEKK モデル。これは最初 Baba, Engle, Kraft and Kroner により発表され、後に Engle and Kroner(1995)として公刊されたモデルであり、次のように定義される。

$$H_i = W^*W^* + A^*E_{i-1}E_{i-1}'A^* + B^*H_{i-1}B^*$$

ここで、 $A^*$  及び  $B^*$  は  $N \times N$  の行列であり、 $W^*$  は  $N \times N$  の上三角行列である。この定式化により、共分散行列の正値定符号性が保証される。なお、このモデルのパラメータの数は  $N(5N+1)/2$  となり、たとえば 3 変量ならば 24 個のパラメータを推定する必要がある。

Diagonal モデル。さらに、VECH の推定すべきパラメータの数を減らすための最も簡単な方法として、モデルの共分散をすべてゼロと考え、単純に各系列を一変量 GARCH モデルとし

てパラメータを推定する，つまり， $N$  本の方程式

$$(3.3) \quad h_{mmi} = \omega_m + \alpha_m \epsilon_{m,i-1}^2 + \beta_m h_{mm,i-1}, \quad m=1, \dots, N$$

を独立に推定するというのがこのモデルである．したがって，このモデルのパラメータの数は全部で  $3N$  となる．たとえば 3 変量ならば 9 個のパラメータを推定するのみであり，ここで扱われているモデルの中では最もその数が少ない．なお，後で述べる多変量 VaR を計算する際の相関係数は各一変量モデルの標準化された誤差項に基づいて計算される．

CC モデル．このモデルは，収益率の相関係数  $\rho_{mn}$  を各要素に持つ相関行列  $C$  を定数と考え(即ち Constant Correlation)，

$$H_i = D_i C D_i = \left( \rho_{mn} \sqrt{h_{mmi} h_{nni}} \right)_{m,n=1}^N$$

として定式化する．Bollerslev (1990) を参照．ここで  $D_i = \text{diag}(\sqrt{h_{11i}}, \dots, \sqrt{h_{NNi}})$  であり， $h_{mmi}$  は式 (3.3) にあるように各一変量 GARCH モデルにより求められる．このモデルは，定義より  $H_i$  の正値定符号性が保証される．また，このモデルの推定すべきパラメータの数は  $N(N+5)/2$  となり，3 変量の場合，その数は BEKK の半分の 12 個となる．

DCC モデル．上で述べたように CC モデルは，正値定符号性が保証され，パラメータの数も比較的少ないことから，このモデルを使い分析を進めることの利点が多い．しかし，実証分析において各系列の相関を一定と置くことは，現実的には強い制約である．そこで最後に，相関係数に動的構造(dynamic conditional correlation, DCC)を仮定するモデルを導入する．このモデルは比較的最近，Engle (2002)，Christodoulakis and Satchell (2002) 及び Tse and Tsui (2002) によって提案された．ここでは，Engle (2002) のモデルを使用する．まず，相関行列  $C$  は時間とともに変化すると考え，ポラティリティ構造を，

$$H_i = D_i C_i D_i = \left( \rho_{mn} \sqrt{h_{mmi} h_{nni}} \right)_{m,n=1}^N$$

及び

$$C_i = \text{diag}(Q_i)^{-1/2} Q_i \text{diag}(Q_i)^{-1/2}$$

として定義する．また， $N \times N$  の正値定符号行列  $Q_i$  は，

$$Q_i = \bar{Q} + \alpha(E_{i-1} E_{i-1}' - \bar{Q}) + \beta(Q_{i-1} - \bar{Q})$$

によって与えられる．ここで  $\bar{Q}$  は， $\rho_{mn}$  を各要素として持つ無条件相関行列である．このモデルも，CC モデルと同様に正値定符号性が保証される．また，このモデルの推定すべきパラメータの数は  $N(N+1)/2 + N + 2$  となる．3 変量の場合その数は 11 個となり，ここで扱われているモデルの中では Diagonal の次に少ない．

ここで導入した多変量モデルに基づく VaR を求めることは容易である．なぜなら，追加的に必要な変数は相関係数  $\rho$  のみであり，これと一変量モデルによる VaR を組み合わせることにより多変量 VaR が得られるからである．たとえば，2 変量であれば，相関係数  $\rho$  を，

$$\rho_{12} = \text{Cov}(r_{1i}, r_{2i}) / \sqrt{\text{Var}(r_{1i}) \text{Var}(r_{2i})}$$

として求め，各変量の VaR を使うことにより，2 変量 VaR は

$$\text{VaR} = \sqrt{\text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + 2\rho_{12} \text{VaR}_1 \text{VaR}_2}$$



により得られる．これを  $N$  変数まで一般化すれば，

$$\text{VaR} = \sqrt{\sum_{m=1}^N \text{VaR}_m^2 + 2\rho_{mn} \sum_{m<n} \text{VaR}_m \text{VaR}_n}$$

となる (Tsay, 2002 を参照)．なお，近年の多変量 GARCH モデルによる日次の VaR の分析例としては，Giot and Laurent (2003) がある．

#### 4. パフォーマンスの検証

ここでは，前節で導入された VaR モデルがどれほどの予測パフォーマンスを持っているのかを，まず所期の裾確率と実際の超過率の比較から検証し，次にベルヌーイ確率の尤度比検定という観点から Kupiec (1995) に倣って検証を行う．実際の比較の対象は，一変数モデルの場合は各収益率系列と各モデルに基づいて計算された VaR，また多変数モデルの場合，各収益率の単純和によって作られた系列と各モデルに基づいて計算された VaR との比較を行うことになる．

##### 4.1 データ

まず，以下に解析結果を報告する 2 組の 3 変数データについて説明する．期間は全て，2001 年 7 月 2 日から同年 9 月 28 日である．最初に考察する組は，東京証券取引所第一部上場日産 (コード：7201)，トヨタ (7203) 及びホンダ (7267) の国内 3 大自動車メーカーの高頻度データである．このように，同業種内の組合せは往々にして相関が高い．ホンダ-日産の相関は 0.28，ホンダ-トヨタでは 0.37，トヨタ-日産は 0.21 程度である．実際にこのような銘柄の取り合わせが現実的かどうかは別として，ポートフォリオ内の各銘柄の動きに連動性が強い時に，ポートフォリオ全体の抱えるリスクがどうなるかは，VaR を考えるときの最大の関心事である．

もう 1 組は，相関がほぼゼロである銘柄群として，住友金属工業 (5405)，ホンダ，NTT ドコモ (9437) からなるポートフォリオを考えた．各系列間の相関は住友金属-ドコモで 0.06，ホンダ-ドコモで -0.03，住友金属-ドコモで 0.06 であった．実際には更に，ある程度大きな負の相関 (-0.2 ~ -0.3 程度) を持つ銘柄どうしを含んだ組を考えたかったのだが，売買代金の大きな 20 銘柄について，上記期間において総当たりで相関を計算したところ，顕著に負の相関のある銘柄の組合せは存在しなかった．従って，本稿では正の相関の大きなケースと，相関がさほど認められないケースとで検証を行い，銘柄間の相関が VaR の予測にもたらす影響を観察する．

##### 4.2 経験的超過率

表 1~4 は，日産，トヨタ，ホンダの順で，各モデルごとに所期の下側確率に対し実際に VaR を超えた収益率が観察された比率をまとめたものである．データ期間は前節に述べた通り，全て 2001 年 7 月 2 日から同年 9 月 28 日まで，営業日にして 63 日である．2.1 節で述べた方法で，10 分間隔の等間隔離散時間時系列を生成すると，前場が 9 時から 11 時半までで 12 個，後場が 12 時半から 15 時までで 15 個，1 営業日あたり合計 27 個の観測値が得られ，63 日分で 1701 個の時系列が得られる．この 1701 個の時系列を用いて各モデルを推定し，推定したパラメータを所与とする 1700 期間のインサンプル予測で，各裾確率に対応する VaR (下側パーセント点) を算出する．

図 5 は，日産，トヨタ，ホンダを仮想的に 1 株ずつ保有したポートフォリオの収益率 (2001 年 7 月 2 日の寄りから 10 分間隔で 200 区間) と，多変量 GARCH モデル (DCC モデル) による VaR を描いたものである．実線で示された収益率 (実現値) に対して，所期の裾確率に対応した VaR (パーセント点) が描かれている．VaR をつないだ曲線は，日内時間関数による周期的な

表 1. 超過率 日産(7201).

$\alpha$	0.05000	0.02500	0.01000	0.00500	0.00100
Normal	0.03588	0.02294	0.01588	0.01353	0.00824
NormalGARCH	0.03177	0.02059	0.01353	0.00824	0.00529
Student	0.02471	0.01706	0.01000	0.00647	0.00177
StudentGARCH	0.02529	0.01235	0.00706	0.00471	0.00059
RiskMetrics <sup>TM</sup>	0.02824	0.02000	0.01235	0.00765	0.00529

表 2. 超過率 トヨタ(7203).

$\alpha$	0.05000	0.02500	0.01000	0.00500	0.00100
Normal	0.04294	0.02471	0.01706	0.01177	0.00706
NormalGARCH	0.04177	0.02177	0.00941	0.00765	0.00529
Student	0.03000	0.02000	0.00882	0.00706	0.00353
StudentGARCH	0.02882	0.01235	0.00647	0.00471	0.00000
RiskMetrics <sup>TM</sup>	0.03824	0.01706	0.00882	0.00647	0.00412

表 3. 超過率 ホンダ(7267).

$\alpha$	0.05000	0.02500	0.01000	0.00500	0.00100
Normal	0.04177	0.02824	0.01706	0.01471	0.00882
NormalGARCH	0.04471	0.02471	0.01647	0.01118	0.00529
Student	0.03647	0.01941	0.01235	0.00824	0.00471
StudentGARCH	0.03235	0.01706	0.00824	0.00529	0.00235
RiskMetrics <sup>TM</sup>	0.04000	0.02177	0.01412	0.01000	0.00529

表 4. 超過率 多変量 GARCH モデル(正規分布).

$\alpha$	0.05000	0.02500	0.01000	0.00500	0.00100
VECH	0.04706	0.02765	0.01294	0.00941	0.00294
BEKK	0.04941	0.03000	0.01412	0.00824	0.00235
Diagonal	0.04941	0.02882	0.01353	0.00941	0.00353
CC	0.04941	0.02941	0.01353	0.00941	0.00294
DCC	0.04588	0.02706	0.01294	0.00824	0.00235

動きを示しながら、同時に GARCH モデルにより過去の 2 乗収益率とボラティリティに依存しつつ変化している。所期の裾確率が大きいほど収益率に近く位置し、裾確率が小さくなるにつれてより広い区間で収益率を抑えている。裾確率 5% の場合が、この中では一番甘い評価で、裾確率 0.1% の場合が一番厳しい評価である。時折大きな負の収益率が実現しており、VaR 曲線を突き抜けている。予測区間を通じて、損失が VaR を越える頻度が所期の裾確率に近いほど、そのモデルはすぐれていると判断される。表 1~4 の数値は、1700 回のうち実際に VaR を越える損失が発生した回数をカウントし、それを比率で表示している。

表 1~4 表頭の 0.050, 0.025, 0.010, 0.005 及び 0.001 は、それぞれ 1 期先 VaR における所与

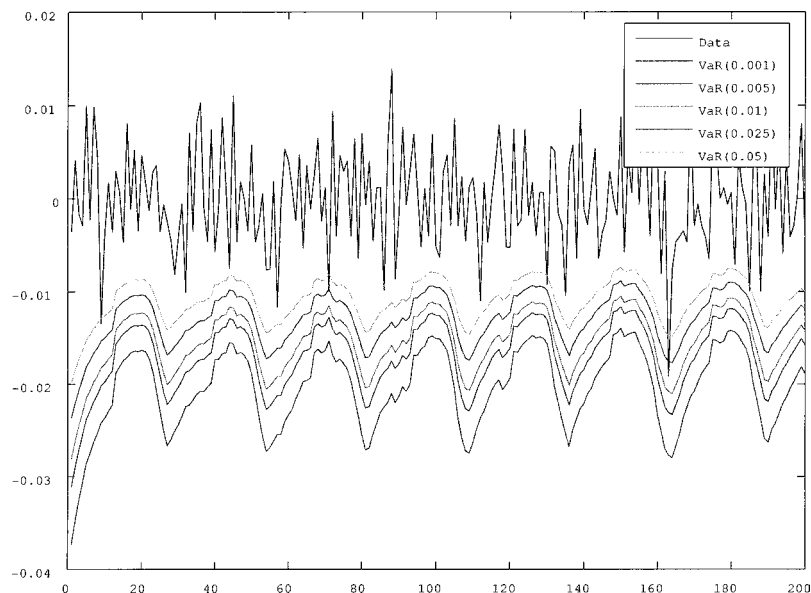


図 5. VaR の例(DCC-GARCH).

の下側確率  $\alpha$  である。表頭・表中とも小数点以下 5 桁での表示に統一してある（比較のため、ここでの最も小さな裾確率 0.1% の 1/100 まで表示しておく。）下側確率として例えば 1% を考えるとき、それに対応する VaR をしばしば「99% VaR」というように言及することがある。しかし本稿では無用の混乱を防ぐために、信頼係数ではなく裾確率を意識した記述に統一する。各セルの値は、実際に観測された収益率の値が、所与の下側確率  $\alpha$  に対応する VaR を下回った率（超過率）を表している。つまり、これらの値が同じ列の表頭に示されたパーセント点の値に近ければ近い程、予測パフォーマンスの良い VaR であるといえる。この結果の解釈については 4.4 節でまとめて行うこととし、以下の 4.3 節ではまず、表 1~4 に見られる理論値からの乖離を統計的に評価するための道具として、ベルヌーイ試行列に対する尤度比検定を用意する。

#### 4.3 尤度比検定

表 1~4 は推定結果に基づく模擬予測の整理にすぎないが、ここでは更に、収益率が VaR を超過したか否かをベルヌーイ試行と考え、尤度比検定を行う。まず、予測期間における観測された全取引数を  $I$  とし、その期間内で実際の収益率が VaR を下回った回数を  $I_{ex}$  とする。観測されない真の超過確率を  $p$  とすれば、 $I_{ex}$  の従う確率関数は

$$\Pr\{I_{ex} = \nu\} = \binom{I}{\nu} p^\nu (1-p)^{I-\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, I$$

となる。いま、データから観測される経験的な超過率は  $\hat{p} = I_{ex}/I$  で与えられ、一方モデルはそもそも下側確率が  $\alpha$  となるように作成されているので、 $p = \alpha$  が支持仮説である。実際に観測された超過回数を  $I_{ex}$  とすれば、 $p = \alpha$  に対する尤度と  $p = \hat{p}$  に対する尤度の比は

$$L(I_{ex}) = \frac{\alpha^{I_{ex}} (1-\alpha)^{I-I_{ex}}}{\hat{p}^{I_{ex}} (1-\hat{p})^{I-I_{ex}}}$$

で与えられる。このとき標準的な議論により、対数尤度比  $-2\log L(I_{ex})$  は大標本において  $\chi_1^2$

表 5. 尤度比検定統計量の p 値(日産).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
Normal	0.0050	0.5815	0.0248	0.0000	0.0000
NormalGARCH	0.0002	0.2297	0.1652	0.0838	0.0001
Student	0.0000	0.0262	1.0000	0.4110	0.3684
StudentGARCH	0.0000	0.0002	0.1982	0.8622	0.5604
RiskMetrics <sup>TM</sup>	0.0000	0.1715	0.3470	0.1513	0.0001

表 6. 尤度比検定統計量の p 値(トヨタ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
Normal	0.1716	0.9380	0.0079	0.0008	0.0000
NormalGARCH	0.1092	0.3824	0.8055	0.1513	0.0001
Student	0.0000	0.1715	0.6189	0.2573	0.0105
StudentGARCH	0.0000	0.0002	0.1179	0.8622	0.0651
RiskMetrics <sup>TM</sup>	0.0205	0.0262	0.6189	0.4110	0.0024

表 7. 尤度比検定統計量の p 値(ホンダ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
Normal	0.1092	0.4024	0.0079	0.0000	0.0000
NormalGARCH	0.3082	0.9380	0.0142	0.0019	0.0001
Student	0.0073	0.1248	0.3470	0.0838	0.0005
StudentGARCH	0.0004	0.0262	0.4507	0.8648	0.1337
RiskMetrics <sup>TM</sup>	0.0503	0.3824	0.1081	0.0101	0.0001

表 8. 尤度比検定統計量の p 値(正規分布, 日内周期性調整有り, 日産, ホンダ, トヨタ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
VECH	0.5743	0.4917	0.2437	0.0216	0.0406
BEKK	0.9112	0.2003	0.1081	0.0838	0.1337
Diagonal	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CC	0.9112	0.2568	0.1652	0.0216	0.0406
DCC	0.4298	0.5915	0.2437	0.0838	0.1337

に従うので,これを基に,帰無仮説を  $H_0:p=\alpha$ , 対立仮説を  $H_1:p\neq\alpha$  とする(両側)仮説検定を行うことができる.表 5~8 に報告されている値は,検定統計量の与える p 値,すなわち帰無仮説に対する限界棄却水準である.列中に示された p 値が小さいということは,帰無仮説  $H_0:p=\alpha$  をデータが支持する確率が小さく,  $H_0$  が有意に棄却されることを示している.すなわち,当該モデルは下側確率  $\alpha$  に対応する VaR を与えるはずなのに,実際の超過頻度は  $\alpha$  と大きく異なるということである.

逆に p 値が大きいということは,積極的に帰無仮説を肯定するものではないが,帰無仮説を捨て去るだけの証拠がデータから提示されなかったことを示している.すなわち, p 値が大き

いことは、当該モデルの VaR が所期の下側確率と整合的という意味で予測パフォーマンスが良いということを示唆している。従って、列中でモデルを比較し、 $p$  値が大きければそのモデルが良いモデルである、という見方で結果を観察する。なお、表 5~8 に報告されているのは  $p$  値であるので、表 1~4 とは違って、列ごとに見た値が表頭の 5%~0.1% と近いあるいは等しいことが期待されているわけではないことに注意しておく。

#### 4.4 考察

表 1~3 から推し量れることとしては、まず、一変量モデルに関しては、比較的大きな裾確率を考えた場合は、正規分布を仮定したモデルが良い結果であったが、裾確率が小さいところで VaR を考えると、 $t$  分布を仮定したモデルの方が良好な結果が観察されることである。このことは、表 5~7 で二項検定の結果を見るとより明瞭である。すなわち、Normal あるいは NormalGARCH モデルにおいては、 $\alpha$  が 5% ないし 2.5% のところで  $p$  値が大きくなる傾向にあり、逆に Student あるいは StudentGARCH モデルにおいては、 $\alpha$  が 1% ないし 0.5% の周辺で  $p$  値が大きくなる傾向にある。一般に計量ファイナンスの実証分析においては、データの観測頻度が細かいほど、収益率の分布は裾が厚くなるということは、経験則として一般に受け入れられている。しかしながらここでの結果は、VaR の超過率の一致性が問題となった場合、 $t$  分布を用いるのがよいかどうかはリスク管理で設定する下側確率次第であり、必ずしも下側確率の取り方に関して  $t$  分布が一樣に支持されるわけではないことを示している。

なお、本稿で行った一変量分析は、i.i.d. タイプも含めた各種モデルを VaR の観点から比較して、実証的にモデルの特徴付けを試みることに目的があったわけだが、実際のトレーディングに照らせばかなり仮想的であると言えるであろう。たった一銘柄の動きを非常に細かい時間間隔で追うことの動機付けは難しいからである。しかし、多変量モデルでの設定は現実にはあり得る状況である。

では次に、多変量 GARCH モデルに基づく結果の解釈に移ろう。表 4 を見ると、いずれのモデルを用いても、下側確率を小さくして行くに従って(逆に見れば VaR の信頼係数を上げていくに従って)、所期の下側確率と実際の超過率との乖離は開いていく傾向にある。例えば CC モデルを例に取れば、超過率の  $\alpha$  に対する比は、0.99, 1.18, 1.35, 1.88, 2.94 と大きくなっており、どのモデルでも似通った傾向を示している。一変量モデルの結果と照らし合わせて、更にここでの多変量 GARCH モデルは全て正規分布を仮定したモデルであることを考えると、5% 付近で名目サイズと実際の超過率の一致度が高いということは、正規分布を仮定した VaR の特徴であると見なすこともできるだろう。

いま述べた名目・実際のサイズ比の観点からはどのモデルも似たり寄ったりに見えるが、二項確率に関する尤度比検定を通じて見ると、優劣の差が明確となる。表 8 によると、例えば検定の有意水準を 5% と取ったときに、VaR の下側確率 5%~0.1% の全域でモデルが支持されるのは、BEKK モデルと DCC モデルである。一変量の場合に比べると、考慮しているダウンサイドリスクの大きさによらず一樣に妥当性が保証されるモデルがあるということは、大きな違いである。この 2 つのモデルとも、超過率の観点からは精度はほぼ同等である。また、両者とも定義上共分散行列の正値定符号性が保証されていることに注意しよう。一方、パラメータの数で比較すると、3 変量の場合、BEKK モデルでは未知パラメータ数が 24 個に及ぶのに対して、DCC モデルはその半分以下の 11 個である。このことから、もし同じ程度のパフォーマンスを持つのであれば、この DCC モデルが多変量モデルの中では良好なモデルといえることができる。この視点は多分にモデル選択的であるが、ここでは情報量規準によるモデル比較は考えなかった。バイアス補正済み一期先予測の良さと VaR におけるサイズの正しさが対応するのかどうかは、少なくとも実証分析を行って傍証を得ておかななくてはならないだろう。

表 9. 尤度比検定統計量の p 値( $t$  分布, 日内周期性調整有り, 日産, ホンダ, トヨタ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
VECH	0.4298	0.5915	0.1652	0.0438	0.1338
BEKK	0.5743	0.9383	0.1081	0.0838	0.1338
Diagonal	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CC	0.8232	0.4024	0.1652	0.0217	0.1338
DCC	0.3660	0.8168	0.2436	0.0838	0.3685

表 10. 日内周期性調整なしの場合の多変量 GARCH モデルにおける尤度比検定統計量の p 値(正規分布, 日産, ホンダ, トヨタ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
VECH	0.0855	0.3241	0.0248	0.0019	0.0005
BEKK	0.4298	0.4917	0.0042	0.0000	0.0000
Diagonal	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CC	0.1716	0.3241	0.0142	0.0019	0.0001
DCC	0.0205	0.5815	0.1081	0.0217	0.0406

表 9 は, 表 8 と同様の分析を  $t$  分布を仮定して行ったものであるが,  $p$  値の大小で超過率の適合度を比較するならば, 正規分布の方が全体的により結果になっている. 5 つのモデルと 5 種類の裾確率で 25 個のセルのうち, 正規分布に基づく実験に対する尤度比検定統計量の  $p$  値が  $t$  分布の  $p$  値と等しいか大きくなっているケースは 18 である. ただし, 一変量モデルでの結果と同様に, 裾確率 0.1% という極端に稀な事象の頻度に着目した場合は,  $t$  分布に基づくモデルに優位が認められる.

最後に, 表 10 は, 日内周期性の調整を行わずに, 正規分布を仮定した多変量 GARCH モデルを推定したときの, 超過率に対する尤度比検定の結果( $p$  値)を示したものである. 表 8 とセルごとに比較すると, 殆どの場合(25 ケース中 23 ケースで)表 8 のほうが  $p$  値が大きい. すなわち, 適正な VaR の設定のためには, 日内時間関数の果たす役割は重要である.

#### 4.5 相関の低い組での結果

本節では, 相関の低い関係にある銘柄群, 住友金属工業, ホンダ, NTT ドコモに対して行った分析結果を報告する. 住友金属工業-NTT ドコモ間及びホンダ-住友金属工業間では, 約 6% は正の低い相関, ホンダ-NTT ドコモでは約 -3% と負の相関であったことに注意する. 表 11 と表 12 は, 各多変量 GARCH モデルに基づき推定された VaR の超過率に関する尤度比検定統計量の  $p$  値であり, 表 11 は正規分布, 表 12 は  $t$  分布を仮定したモデルの結果である.

まず, 表 11 では, 正の大きい相関を持つニッサン-トヨタ-ホンダの場合では,  $p$  値がほぼ 0 であった Diagonal の予測パフォーマンスが, 大幅に改善していることが分かる. 相関を 0 と仮定している Diagonal モデルから計算される VaR が, 相関の低い系列の組に対して高い  $p$  値を示すことは, 当然の結果ともいえる. 次に,  $t$  分布を仮定した表 12 であるが, Diagonal の結果は正規分布を仮定したときと同様の傾向が見られるが, 全体的に正規分布を仮定したモデルの結果より低い  $p$  値となっており,  $t$  分布にしたからといって必ずしも VaR の予測は改善しないことを示している. その一方, 裾確率が 0.5%, 0.1% といった非常に小さいところだけに注目すれば,  $t$  分布を仮定したモデルは正規分布を仮定したモデルより良好な結果となっている.

表 11. 多変量 GARCH モデルにおける尤度比検定統計量の p 値(正規分布, 住友金属工業, ホンダ, NTT ドコモ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
VECH	0.8232	0.8168	0.1652	0.6159	0.0105
BEKK	0.6538	0.4917	0.0684	0.0838	0.0105
Diagonal	0.1911	0.0154	0.0079	0.0838	0.0105
CC	0.8232	0.3241	0.2437	0.4111	0.0105
DCC	0.9112	0.5915	0.1081	0.6159	0.0105

表 12. 多変量 GARCH モデルにおける尤度比検定統計量の p 値( $t$  分布, 住友金属工業, ホンダ, NTT ドコモ).

100 $\alpha$ (%)	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
VECH	0.0015	0.0009	0.0646	0.3640	0.0406
BEKK	0.0034	0.0018	0.1982	0.3640	0.1338
Diagonal	0.0205	0.2999	0.3091	0.8621	0.0105
CC	0.0006	0.0033	0.0322	0.3640	0.1338
DCC	0.0006	0.0033	0.0646	0.3640	0.0406

## 5. 結論

本稿では, 株価ティックデータから 10 分刻みの等間隔時系列を生成し, イントラデイ(日内)でのダウサイドリスク(VaR)計測を通じて一変量および多変量 GARCH モデルの比較を行った。背景・動機としては, 日計りやデイトレードにおけるリスク計測が挙げられる。まず, イントラデイでのモデル構築には, 日内周期性の処理が不可欠であることを論じた。一変量モデルに関する実証分析の結果からは, 正規分布と  $t$  分布とでは下側確率の取り方如何で仮定する分布型の優劣が異なることが観察された。一方多変量 GARCH モデルでは, 名目と実際のサイズ比で見るとどのモデルも同じような結果を示しているが, 二項確率の検定を通して結果を再検討すると, VaR における下側確率に関して一様に良い近似度を示しているという点で, BEKK モデルと DCC モデルのパフォーマンスが良いことがわかった。BEKK モデルと DCC モデルでは仮定する未知パラメータの数に少なからず差があることを考えると, 今回は DCC モデルが最良との結論を得た。

## 謝 辞

本研究は, 統計数理研究所共同研究プログラム(17-共研-1006)の下に行われました。森本の研究は文部科学省 21 世紀 COE プログラム「計算科学フロンティア(名古屋大学)の援助を受けており, 川崎は科学研究費基盤研究(C) 課題番号 17500189)による援助を受けています。最後に, 二人の査読者の丁寧なコメントのおかげで内容は大幅に改善されました。ここに記して感謝いたします。

## 参 考 文 献

Anderson, T. G. and Bollerslev, T.(1997) Intraday periodicity and volatility persistence in financial

- markets, *Journal of Empirical Finance*, **4**, 115–158.
- Bauwens, L. and Giot, P. (2001). *Econometric Modelling of Stock Market Intraday Activity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. (2006). Multivariate GARCH models: A survey, *Journal of Applied Econometrics*, **21**, 79–109.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, **72**, 498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R. and Wooldridge, J. (1988). A capital asset pricing model with time varying covariances, *Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.
- Christodoulakis, G. and Satchell, S. (2002). Correlated ARCH: Modelling the time-varying correlation between financial asset returns, *European Journal of Operations Research*, **139**, 351–370.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1007.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation—A simple class of multivariate GARCH models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 339–350.
- Engle, R. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122–150.
- Friedman, J. H. (1984a). SMART user's guide, Tech. Report, No. 1, Laboratory for Computational Statistics, Stanford University, California.
- Friedman, J. H. (1984b). A variable span scatterplot smoother, Tech. Report, No. 5, Laboratory for Computational Statistics, Stanford University, California.
- Giot, P. (2000). Time transformations, intraday data and volatility models, *Journal of Computational Finance*, **4**, 31–62.
- Giot, P. (2002). Market risk models for intraday data, Discussion Paper 30, University of Namur, Belgium.
- Giot, P. and Laurent, S. (2003). Value-at-risk for long and short trading positions, *Journal of Applied Econometrics*, **18**, 641–663.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of nonsynchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**, 359–379.
- Hoshikawa, T., Nagai, K. and Nishiyama, Y. (2005). Nonparametric methods of estimating integrated multivariate volatilities (mimeo).
- J. P. Morgan (1996). Riskmetrics Technical Document, 4th ed., J. P. Morgan, New York.
- Kroner, F. and Ng, V. (1998). Modelling asymmetric comovements of asset returns, *The Review of Financial Studies*, **11**, 817–844.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **2**, 173–184.
- Morimoto, T. (2005). Estimating and forecasting instantaneous volatility through a duration model: An assessment based on VaR, *Applied Financial Economics* (to appear).
- Tsay, R. (2002). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New York.
- Tse, Y. and Tsui, A. (2002). A multivariate GARCH model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 351–362.



## An Empirical Comparison of GARCH Models Based on Intraday Value at Risk

Takayuki Morimoto<sup>1</sup> and Yoshinori Kawasaki<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Computational Science and Engineering, Nagoya University

<sup>2</sup>The Institute of Statistical Mathematics

In the last decade, one of the main issues of financial study has been risk management as typified by Value at Risk (VaR). Furthermore, an increasing number of financial practitioners, from institutional investors to day traders are employing intraday data in making investment decisions. In the light of these developments, it is important to analyze the intraday downside risk. In this report we execute an empirical comparison of univariate/multivariate GARCH models based on intraday VaR. As an empirical study we analyze high-frequency data of the following companies listed on the Tokyo Stock Exchange (First Section) from 2 July to 28 September 2001. These are Japanese worldwide leading companies in the automobile industry: NISSAN, TOYOTA and HONDA. We also consider a portfolio that consists of three stocks weakly correlated to one another. However, high-frequency data have different characteristics compared with daily or weekly data. Namely, the lengths of trade intervals are not equal, and the data typically exhibit intraday seasonality. Thus, such data cannot be properly analyzed by using conventional time series modeling techniques. To alleviate these difficulties, we change irregularly spaced time series into regularly spaced ones and adjust the intraday seasonality. Then we examine the forecasting performance of one-step-ahead VaR in the following way. First we estimate the parameters of models for a certain period. Second, we simulate a VaR process through the estimated parameters, and calculate the failure rate of risk, that is, how frequently the actual return exceeds the VaR percentile. Finally, we perform a likelihood ratio test on the exceedance rate based on the simulation outcome.