統計数理(2006)
第 54 巻 第 1 号 147–175

特集「統計科学とリスク解析」
[研究詳解]

リスクモデルにおける離散確率分布の漸化式

北野 昌志[1]・青山 一基[2]・清水 邦夫[3]

(受付 2005 年 8 月 31 日;改訂 2006 年 1 月 17 日)

要　旨

集合的リスクモデルにおいて,クレーム件数の分布が Panjer 漸化式を満たしクレーム額が非負整数値をとる確率変数のとき,クレーム総額分布の確率関数は漸化式で表されるという事実はその確率関数の値を計算するのに便利であり,よく知られている.しかし,Panjer 漸化式を満たす分布族は,一点分布,ポアソン分布,負の二項分布,二項分布に限られるので,より一般的な Sundt–Jewell 分布族,Schröter 分布族,Sundt 分布族においてクレーム総額分布の確率関数が従う漸化式の研究が行われてきた.本稿では,従来の研究を概観し Panjer 分布族以外の分布の例をあげるとともに,より一般的な(Sundt 分布族に関しては項数 2 の場合を含む) Kitano et al. (2005)によって提案された分布族およびその分布族に属する分布のいくつかの例について紹介する.一般化負の二項分布やポアソンパラメータのガンマ分布の積の分布による混合分布は Sundt–Jewell 分布族,Schröter 分布族,Sundt 分布族(項数 2)に含まれないが,提案された分布族には含まれる.また,Kitano et al. (2005)による一般化 Charlier 級数分布も提案された分布族の一員である.この分布について性質が述べられるとともに,クレーム件数の分布が Kitano et al. (2005)によって提案された分布族に属しクレーム額が非負整数値をとる確率変数のときクレーム総額分布の確率関数は漸化式で表されることも示される.

キーワード: 集合的リスクモデル,Panjer 分布族,Schröter 分布族,Sundt 分布族,Sundt–Jewell 分布族,一般化 Charlier 級数分布.

1. はじめに

集合的リスクモデル(collective risk model)では,一つのクレームに対するクレーム額とクレーム件数(number of claims)を両方とも確率変数とみなし,ある固定された時間内での保険者に対するクレーム総額(total amount of claims)を複合分布(compound distribution)として扱う.

Panjer (1981)は,独立同一分布に従うクレーム額確率変数列 $Z_1, Z_2, \ldots$ が非負整数値をとり,クレーム件数 $K\ (\geq 0)$ の確率関数 $p_k = \Pr(K = k)$ が漸化式

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (a, b \text{ は } p_k \text{ が確率関数を満たす定数}) \tag{1.1}$$

を満たす,すなわち K の分布が Panjer 分布族(Panjer family)もしくは Katz 分布族(Johnson

[1] 住友信託銀行 年金信託部:〒107–0061 東京都港区北青山 2–11–3 青山プラザビル
[2] 慶應義塾大学大学院 理工学研究科:〒223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3–14–1
[3] 慶應義塾大学 理工学部数理科学科:〒223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3–14–1

et al., 1992, pp. 76–81)に属するならば，クレーム総額

$$X=\begin{cases}\sum_{i=1}^{K} Z_i, & K>0,\\ 0, & K=0\end{cases} \tag{1.2}$$

の確率関数は漸化式の形で表現できることを証明した．ところで (1.1) を満たす分布は一点分布，ポアソン分布，負の二項分布，二項分布に限られることが知られている(2.1 節参照)のでその適用範囲はそれほど広くない．

Panjer 分布族を拡張させたものとして，Sundt and Jewell (1981)は，p_k が $k=2$ から始まる漸化式

$$p_k=\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}, \quad k\geq 2 \tag{1.3}$$

のときの複合変数確率関数の漸化式を与え，Schröter (1991)は

$$p_k=\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}+\frac{c}{k}p_{k-2}, \quad k\geq 2 \tag{1.4}$$

(ただし，a,b,c は p_k が確率関数を満たす定数)のときの漸化式を与えた．また，Sundt (1992)は分布族

$$p_k=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{b_i}{k}\right)p_{k-i}, \quad k\geq 1 \tag{1.5}$$

(ただし，$k<0$ のとき $p_k=0$ で，$a=(a_1,\ldots,a_n)',b=(b_1,\ldots,b_n)'$ は p_k が確率関数を満たすベクトル)において複合変数確率関数の漸化式を考察している．本稿では，さらに漸化式(Kitano et al., 2005)

$$p_k=\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}+\left(c+\frac{d}{k}+\frac{e}{k-1}\right)p_{k-2}, \quad k\geq 2 \tag{1.6}$$

(ただし，a,b,c,d,e は p_k が確率関数を満たす定数)を満たす確率関数を持つ分布族についても考察を与える．

2 節では，確率関数が (1.1)，(1.3)∼(1.6) を満たす分布族の性質と，それぞれの分布族に含まれる分布を具体的にあげ，その性質について述べる．Sundt–Jewell 分布族(Johnson et al., 1992, p. 81)は Panjer 分布族に属する分布，対数級数(logarithmic series)分布およびそれらを 0 で修正した分布を含む．Schröter 分布族に属する分布の例としては，Charlier 級数(Charlier series)分布(Ong, 1988)やエルミート(Hermite)分布(Kemp and Kemp, 1966; Johnson et al., 1992)などがあげられる．また，Sundt 分布族に属する分布の例としては，非心負の二項(non-central negative binomial)分布(Ong and Lee, 1979)があげられる．(1.6) を確率関数として持つ分布の例としては，Kempton のモデル(Kempton, 1975)およびその一般化である負の二項分布の一般化(Gupta and Ong, 2004)，Ong のモデル(Ong and Muthaloo, 1995)があげられる(2.2 節参照)．また，3 節では Charlier 級数分布を拡張させた一般化 Charlier 級数(generalized Charlier series)分布(Kitano et al., 2005)を紹介する．これも (1.6) を満足する分布となる．4 節では，複合分布に関する若干の説明と例の後に，K の確率関数が (1.6) を満たすときの複合変数 X の確率関数を漸化式で表現できることを示す．最後に，確率関数の漸化式 (1.6) に関係して本稿で現れる分布のパラメータを表にまとめる．

2. 確率関数の漸化式

2.1 二項漸化式

Panjer 分布族

非負整数値をとる確率変数 K **の確率関数** p_k **が** Panjer **分布族** (1.1) **を満たす分布は，確率** 1 **で** 0 **の値を取る一点分布**

(2.1)
$$p_k = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$$

ポアソン分布：Po **(**λ**)**

(2.2)
$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geq 0,\ \lambda > 0,$$

負の二項分布：NB **(**α,p**)**

(2.3)
$$p_k = \frac{(\alpha)_k}{k!}p^k(1-p)^\alpha, \quad k \geq 0,\ \alpha > 0,\ 0<p<1,$$

ただし，Pochhammer **記号** $(\alpha)_k = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1), & k \geq 1, \\ 1, & k=0, \end{cases}$

二項分布：Bi **(**N,p**)**

(2.4)
$$p_k = \binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}, \quad k=0,1,\ldots,N \ (N \text{ は正の整数}), \quad 0<p<1$$

のみに限られる(Sundt and Jewell, 1981**)．証明は** Dickson **(**2005, pp. 64–67**)に見ることができるが，本稿では** Sundt–Jewell **分布族の特別な場合として導く(後述)．**

Panjer **分布族は，次の性質を持つ．**

- **モーメント(**moment**)**. r **次の原点回りのモーメント(**r-th moment about zero**)**$\mu'_r = E(K^r)$ **は，**$r \geq 1$ **に対して，**

$$\mu'_r = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^r p_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}((a+b)+ak)(k+1)^{r-1}p_k$$

より，漸化式

$$\mu'_r = \sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(a\mu'_{j+1} + (a+b)\mu'_j)$$

を満たす．特に平均(mean**)，分散(**variance**)は**

$$E(K) = \frac{a+b}{1-a}, \qquad \mathrm{Var}(K) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

と表せる．

- **確率母関数(**probability generating function**)**. **確率母関数** $G(t) = E(t^K)$ **は**

$$G(t) = \left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{-(a+b)/a}, \quad 1-at > 0$$

となる．これより r 次の下降階乗モーメント（r-th descending factorial moment）$\mu'_{[r]}=E[K(K-1)\cdots(K-r+1)]$ は，漸化式

$$\mu'_{[r]}=\left(\frac{b+ar}{1-a}\right)\mu'_{[r-1]},\quad r\geq 1,\quad \mu'_{[0]}=1$$

で表現できる．証明は，次の通り．確率母関数

$$G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k p_k=p_0+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}$$

を変形した式

$$(1-at)G(t)=p_0+b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}p_{k-1}$$

において，両辺を t で微分して整理すると

$$\frac{a+b}{1-at}G(t)=G'(t)$$

となり，このときの $G(1)=1$ の条件の下での $G(t)$ の解は与式である．また，$G(t)$ を t で r 回微分すると

$$\frac{d^rG(t)}{dt^r}=\left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{a}+1\right)\cdots\left(\frac{a+b}{a}+r-1\right)\left(\frac{a}{1-a}\right)^r\left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{-(a+b)/a-r}$$

なので，$\mu'_{[r]}=\left.\frac{d^rG(t)}{dt^r}\right|_{t=1}$ より

$$\begin{aligned}\mu'_{[r]}&=\frac{(a+b)(2a+b)\cdots(ra+b)}{a^r}\frac{a^r}{(1-a)^r}\\&=\frac{(a+b)(2a+b)\cdots(ra+b)}{(1-a)^r}=\left(\frac{b+ar}{1-a}\right)\mu'_{[r-1]}\end{aligned}$$

となる．ただし，$G(1)=1$ より，$\mu'_{[0]}=1$ である．

Sundt–Jewell 分布族

Sundt–Jewell 分布族の確率関数の漸化式 (1.3) は，$k\geq 2$ であるところが Panjer 分布族の漸化式 (1.1) を一般化している．従って，Sundt–Jewell 分布族は Panjer 分布族を含み，Panjer 分布族確率関数を $k=0$ において修正することができる．二つの修正方法が考えられる．一つは Panjer 分布族確率関数を $k\geq 1$ で分布となるように $k=0$ で打ち切った（zero-truncated）分布であり，残りの一つは $k=0$ で修正した（zero-modified）分布である．0 で修正した分布において $p_0=0$ とおけば 0 で打ち切った分布に帰着するので，ここでは後者について述べる．

始めに以下の定義を与える．

定義．0 で修正した分布．確率関数 P_k $(k\geq 0)$ を 0 で修正した分布とは，修正

$$p_0=w+(1-w)P_0,\quad p_k=(1-w)P_k,\quad k\geq 1$$

を施した分布 p_k のことである．ただし，w は $p_0\geq 0$，$P_k>0$ に対して $p_k>0$ となる条件を満たさなければならないため $-P_0/(1-P_0)\leq w<1$ である．また，$w=0$ のときは，明らかに修正を施さない元の分布を表す．

さて，Sundt–Jewell 分布族に属する分布が，Panjer 分布族に属する分布，対数級数分布，およびそれらを 0 で修正した分布のみであることを証明する．漸化式 (1.3) において，p_2 が非負

であるためには $a+b/2\geq 0$ でなければならない．$a+b/2=0$ のとき，$p_k=0,\ k\geq 2$ なので，$p_0+p_1=1$ となるベルヌーイ分布，$p_0=1$ となる一点分布または $p_1=1$ となる一点分布のいずれかである．$a+b/2>0$ のとき，a の値で場合分けをして考えると

[1]　$a=0$ のとき

$$p_k=\frac{b}{k}p_{k-1}=\cdots=\frac{b^{k-1}}{k!}p_1$$

について，$k=1$ から ∞ まで和をとると

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b^k}{k!}p_1$$

より

$$1-p_0=\frac{p_1}{b}(e^b-1)$$

となる．これより $b=\lambda$ とおけば

$$p_k=\frac{1-p_0}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\geq 1 \tag{2.5}$$

を得る．これは 0 で修正されたポアソン分布を表し，$p_0=e^{-\lambda}$ のとき，通常のポアソン分布となる．

[2]　$a>0$ のとき

$$\begin{aligned}p_k&=\left(a+\frac{b}{k}\right)\left(a+\frac{b}{k-1}\right)\cdots\left(a+\frac{b}{2}\right)p_1\\&=a^{k-1}\left(\frac{k+b/a}{k}\right)\left(\frac{(k-1)+b/a}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{2+b/a}{2}\right)p_1\end{aligned}$$

であり，$\sum_{k=1}^{\infty}p_k<1$ でなければならないので $0<a<1$ である．

$b/a\neq -1$ のとき，$b/a+1=\alpha$ とおけば

$$p_k=\frac{a^{k-1}}{\alpha}\frac{(\alpha)_k}{k!}p_1$$

と書けるので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\frac{p_1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}\frac{(\alpha)_k}{k!}=\frac{p_1}{\alpha}\frac{1}{a(1-a)^{\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}a^k(1-a)^{\alpha}$$

より

$$1-p_0=\frac{p_1}{\alpha}\frac{1}{a(1-a)^{\alpha}}\{1-(1-a)^{\alpha}\}$$

を得る．よって $a=p$ とおけば

$$p_k=\frac{1-p_0}{1-(1-p)^{\alpha}}p^k(1-p)^{\alpha}\frac{(\alpha)_k}{k!},\quad k\geq 1 \tag{2.6}$$

を得る．これは，0 で修正された負の二項分布であり，$p_0=(1-p)^{\alpha}$ のとき，通常の負の二項分布となる．

$b/a=-1$ のときは，

$$p_k=a^{k-1}\frac{p_1}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} a^{k-1}$$

より

$$1 - p_0 = \frac{p_1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k} = \frac{p_1}{a} \{-\log(1-a)\}$$

である．よって，$a = p$ とおけば

$$p_k = \frac{1-p_0}{-\log(1-p)} \frac{p^k}{k}, \quad k \geq 1$$

を得る．これは，0 で修正された対数級数分布であり，$p_0 = 0$ のとき，対数級数分布となる．

[3] $a < 0$ のとき，確率が負になることはないので $a + b/(N+1) = 0$ となる自然数 N が存在しなければならない．つまり，$N = -(a+b)/a$ である．また，

$$\begin{aligned} p_k &= a^{k-1} \left(\frac{k + b/a}{k} \right) \left(\frac{(k-1) + b/a}{k-1} \right) \cdots \left(\frac{2 + b/a}{2} \right) p_1 \\ &= \frac{(-a)^{k-1}}{N} \binom{N}{k} p_1 \end{aligned}$$

であり，$0 < p < 1$ に対して $-a = p/(1-p)$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k-1} \binom{N}{k} p_1 = \frac{p_1(1-p)}{N(1-p)^N p} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

となり

$$1 - p_0 = \frac{p_1(1-p)}{N(1-p)^N p} \{1 - (1-p)^N\}$$

を得る．これより

$$p_k = \frac{1-p_0}{1-(1-p)^N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k \geq 1 \tag{2.7}$$

を得る．これは，0 で修正された二項分布であり，$p_0 = (1-p)^N$ のとき，通常の二項分布となる．

次に，Sundt–Jewell 分布族の特別な場合である Panjer 分布族に含まれる分布が，一点分布，負の二項分布，二項分布，ポアソン分布のみであることを示す．

[1] $a = 0$ のとき．$p_1 = (a+b)p_0 = \lambda p_0$ を (2.5) 式に代入すれば，$p_0 = e^{-\lambda}$ を得るので，これはポアソン分布である．

[2] $a > 0$ のとき．$a/b \neq -1$ のときは，$p_1 = (a+b)p_0 = p\alpha p_0$ を (2.6) 式に代入すれば，$p_0 = (1-p)^{\alpha}$ を得るので，これは負の二項分布である．$a/b = -1$ のとき，$p_1 = (a+b)p_0 = 0$ となり，これは $p_0 = 1$ の一点分布である．

[3] $a < 0$ のとき．$p_1 = (a+b)p_0 = \{pN/(1-p)\}p_0$ を (2.7) 式に代入すれば，$p_0 = (1-p)^N$ を得るので，これは負の二項分布である．

2.2　三項漸化式

(a) Schröter 分布族

確率関数が (1.4) を満たす Schröter 分布族は，Panjer 分布族を一般化しているとともに，Sundt 分布族の特別な場合でもある．分布族の原点回りのモーメントは，Sundt 分布族の特別な場合として簡単に導けるので，ここでは Schröter 分布族を満たす分布である Charlier 級数分布(Ong，1988)について述べる．

Charlier 級数分布

$X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda p)$，$X_2 \sim \mathrm{Bi}(N,p)$，$X_1 \perp X_2$ のとき，$K = X_1 + X_2$ の従う分布を Charlier 級数分布という．ただし，$\sim$ により左辺の確率変数が右辺の分布に従うことを意味する．その確率関数は，

$$p_k = e^{-\lambda}\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}{}_1F_1(N+1;N-k+1;\lambda q) \tag{2.8}$$
$$= e^{-\lambda p}(\lambda p)^k q^N C_k(N;-\lambda q)/k!,\quad k\geq 0$$

で与えられる．ただし，$0<p=1-q<1,\ \lambda>0,\ N$ は正の整数である．ここで，${}_1F_1$ は合流型超幾何関数(confluent hypergeometric function)

$${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j}{(c)_j}\frac{x^j}{j!}$$

を表し，$C_k(x;a)$ は Charlier 多項式(Charlier polynomial)

$$C_k(x;a)=(x-k+1)_k(-a)^{-k}{}_1F_1(-k;x-k+1;a)$$

である．確率関数 p_k は $k\geq N$ のとき，$C_k(x;a)=C_x(k;a)$ という性質から

$$p_k = e^{-\lambda p}(\lambda p)^k q^N C_N(k;-\lambda q)/k!$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-N}p^k}{(k-N)!}{}_1F_1(k+1;k-N+1;\lambda q)$$

と解釈されることに注意する．

Charlier 級数分布の確率関数の漸化式，確率母関数，下降階乗モーメントは，3 節の一般化 Charlier 級数分布における特別な場合として簡単に導ける．また，その他の特徴として Ong (1988)は次のことを述べている．

- 二項分布のポアソン分布による混合．$K|U\sim \mathrm{Bi}(n+U,p)$，$U\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ のとき，混合変数 K は Charlier 級数分布に従う．なぜなら，K の確率母関数 $G(t)$ は

$$G(t)=\sum_{u=0}^{\infty}(q+pt)^{u+n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^u}{u!}$$
$$=(q+pt)^n e^{\lambda p(t-1)}$$

となり，これは Charlier 級数分布の確率母関数である．

- 非心ベータ分布との関係. 確率変数 U がパラメータ ν,λ，自由度 α の非心ベータ(non-central beta)分布に従うとは確率密度関数

$$f(u)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\frac{u^{\nu+j-1}(1-u)^{\alpha-1}}{B(\nu+j,\alpha)},\quad 0<u<1$$

を持つことである．ただし，$\nu,\lambda,\alpha>0$，B はベータ関数（beta function）

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0,\ q>0$$

を表す．非心ベータ分布は，U の確率密度関数 $f(u)$ が

$$f(u)=\frac{1}{B(\nu+j,\alpha)}u^{\nu+j-1}(1-u)^{\alpha-1}, \quad 0<u<1,\ \nu>0$$

を持ち，$j\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ のときの混合分布と同等である．なお，Charlier 級数分布の確率変数 K とパラメータ $N-k+1,\lambda$，自由度 k の非心ベータ分布の確率変数 U は

$$\Pr(K\geq k)=\Pr(U\geq q)$$

という関係を持つことがいえる．証明は，次の通り．Charlier 級数分布の上側確率は，二項分布のポアソン分布による混合を使って

$$\Pr(K\geq k)=\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\binom{N+i}{j}p^j q^{N+i-j}$$

となる．ここで $0<p<1$ に対して二項分布とベータ分布の間に成り立つ公式（Johnson et al., 1992, p. 63）

$$\sum_{y=k}^{N}\binom{N}{y}p^y q^{N-y}=\int_0^p\frac{t^{k-1}(1-t)^{N-k}}{B(k,N-k+1)}dt$$

を使って

$$\begin{aligned}\Pr(K\geq k)&=1-\int_0^q\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{u^{N-k+i}(1-u)^{k-1}}{B(N-k+1+i,k)}du\\&=1-\Pr(U\leq q)\end{aligned}$$

を得る．よって，上記の関係式が得られる．

- 2 変量ポアソン分布との関係．確率変数（X,Y）の分布を同時確率母関数

$$G(s,t)=\exp\{(\lambda_1-\rho)(s-1)+(\lambda_2-\rho)(t-1)+\rho(st-1)\}$$

を持つ 2 変量ポアソン分布とする．ただし，$\lambda_1,\lambda_2>0,\ 0\leq\rho\leq\min(\lambda_1,\lambda_2)$ である．$X=x$ が所与のときの確率変数 Y の条件付き確率母関数の式

$$G_{Y|x}(t)=\frac{\partial^x G(s,t)/\partial s^x|_{s=0,t=t}}{\partial^x G(s,t)/\partial s^x|_{s=0,t=1}}$$

を適用することによって

$$G_{Y|x}(t)=[1-(\rho/\lambda_1)+(\rho/\lambda_1)t]^x\exp\{(\lambda_2-\rho)(t-1)\}$$

を得，$p=\rho/\lambda_1,\ \lambda=\lambda_1(\lambda_2-\rho)/\rho$ を代入すると Charlier 級数分布の確率母関数を得る．

（b）Sundt 分布族

ここでは，確率関数が漸化式

$$p_k=\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}+\left(c+\frac{d}{k}\right)p_{k-2}, \quad k\geq 1 \tag{2.9}$$

を持つ場合を考える．ただし，$p_{-1}=0$ である．(2.9) は確率関数の族が (1.5) を満たす Sundt 分布族の三項漸化式の場合 $(n=2)$ である．

Panjer 分布族のときと同様に原点回りのモーメントの関係式

$$\mu_r' = \sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}\left\{(a+2^{r-j-1}c)\mu_{j+1}' + (a+b+2^{r-j-1}(2c+d))\mu_j'\right\}, \quad r \geq 1$$

が導ける．なぜなら

$$\mu_r' = \sum_{k=1}^{\infty} k^r p_k = p_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)^r p_{k+2}$$

において，右辺第 2 項を次のように変形して，$\mu_0' = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1} + p_0$ を使うことによって導ける．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)^r\left(\frac{a(k+1)+(a+b)}{k+2}\right)p_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)^r\left(\frac{ck+(2c+d)}{k+2}\right)p_k \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(a(k+1)^{j+1}+(a+b)(k+1)^j)p_{k+1} \\
&\quad\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}2^{r-1-j}(ck^{j+1}+(2c+d)k^j)p_k.
\end{aligned}$$

漸化式 (2.9) を満たす分布の例として，非心負の二項分布（Ong and Lee, 1979）があげられる．ここでは，その性質について述べる．

非心負の二項分布

確率変数 K が

$$K|\theta \sim \mathrm{Po}(\theta), \quad \theta|N \sim \mathrm{Ga}(v+N, p/q), \quad N \sim \mathrm{Po}(\lambda) \ ,$$

ただし，$0<p=1-q<1,\ v>0,\ \lambda>0$，という混合分布に従うときに K の分布を 非心負の二項分布（Non-central Negative Binomial Distribution）と呼び，NNBD (p,v,λ) と書く．ただし，平均 $\alpha\beta$，分散 $\alpha\beta^2$ のガンマ分布を $\mathrm{Ga}(\alpha,\beta)$ で表す．なお，θ はパラメータ v,p,λ の非心ガンマ分布に従う．

K の確率関数 p_k は

$$\begin{aligned}
p_k &= \int_0^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(v+n)}\lambda^n\left(\frac{q}{p}\right)^{v+n}\theta^{v+n-1}e^{-(\lambda+q\theta/p)}d\theta \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}f(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

となる．ただし，$f(\theta)$ はベッセル関数（Bessel function）分布（Laha, 1954）の確率密度関数

$$f(\theta) = \left(\frac{q}{p}\right)^{(v+1)/2}\left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{(v-1)/2}e^{-(\lambda+q\theta/p)}I_{v-1}\left(2\sqrt{\frac{\lambda\theta q}{p}}\right)$$

であり，I_v は次数 v の第一種変形ベッセル関数（modified Bessel function of the first kind and order v）

$$I_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(v+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v}$$

を表す．非心負の二項分布はポアソン分布のパラメータ θ が上のベッセル関数分布の確率密度関数 $f(\theta)$ に従う混合分布とも考えることができる．第一種変形ベッセル関数に関する積分公式(Sneddon, 1961)

$$\int_0^\infty e^{-b^2y^2} y^{c-1} I_v(ay)dy = \frac{a^v\Gamma(c/2+v/2)}{2^{v+1}b^{c+v}\Gamma(v+1)} {}_1F_1\left(\frac{c}{2}+\frac{v}{2}; v+1; \frac{a^2}{4b^2}\right) \tag{2.10}$$

および Kummer 変換(Erdélyi et al., 1953, p. 253, eq. (7)) ${}_1F_1(\alpha;\beta;y) = e^y {}_1F_1(\beta-\alpha;\beta;-y)$ によって p_k は

$$p_k = e^{-\lambda p} q^v p^k L_k^{v-1}(-\lambda q), \quad k \geq 0$$

とも表される．ただし，L は一般化ラゲール多項式(generalized Laguerre polynomial)

$$L_n^\alpha(y) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; \alpha+1; y)$$

を表す．

負の二項分布が「ポアソン分布のパラメータがガンマ分布に従う」として作られる混合分布であるのに対して,「ポアソン分布のパラメータが非心ガンマ分布に従う」ようにして作られる混合分布であることが非心負の二項分布の用語の由来である．

ラゲール多項式の漸化式

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)$$

より，$\mathrm{NNBD}(p,v,\lambda)$ の確率関数に関する漸化式

$$p_{-1} = 0, \quad p_0 = e^{-\lambda p} q^v,$$

$$p_k = \left(2p + \frac{(v+\lambda q-2)p}{k}\right)p_{k-1} + \left(-p^2 + \frac{-p^2(v-2)}{k}\right)p_{k-2}, \quad k \geq 1$$

を得る．

その他の特徴として，次があげられる．

- 確率母関数．ラゲール多項式に関する母関数式

$$\sum_{k=0}^\infty L_k^\alpha(x)t^k = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\alpha+1} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right), \quad 1-t>0$$

を使うことによって，確率母関数

$$G(t) = \left(\frac{q}{1-pt}\right)^v \exp\left\{\lambda\left(\frac{q}{1-pt}-1\right)\right\}, \quad 1-pt>0$$

を得る．

- 他の分布との関係．

(1) $\lambda \to 0$ のとき，負の二項分布となる．

(2) $v \to 0$ のとき，Pólya-Aeppli 分布となる．この分布は負の二項分布とポアソン分布の混合分布であり，確率関数が

$$p_k = \sum_{t=0}^\infty \binom{k+t-1}{k} p^k (1-p)^t e^{-\lambda} \frac{\lambda^t}{t!}$$

となる分布のことをいう．

(3) vp が定数$(=c)$となるように $p \to 0$ $(v \to \infty)$ とするならばポアソン分布 $\mathrm{Po}(c)$ に収束する．

・**再生性．確率変数** X_1，X_2 **が** $X_1 \sim$ NNBD (p, v_1, λ_1)，$X_2 \sim$NNBD (p, v_2, λ_2)，$X_1 \perp X_2$ **のとき，** $X = X_1 + X_2$ **は確率母関数の形を見ても明らかなように** NNBD $(p, v_1 + v_2, \lambda_1 + \lambda_2)$**に従う．**

・**条件付き確率．** X_1 **と** X_2 **が独立で** $i = 1, 2$ **に対して** NNBD (p, v_i, λ_i)**に従うならば条件付き確率** $\Pr(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$ **は**

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{\Pr(X_1 = k)\Pr(X_2 = n - k)}{\Pr(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{L_k^{v_1 - 1}(-\lambda_1 q) L_{n-k}^{v_2 - 1}(-\lambda_2 q)}{L_n^{v_1 + v_2 - 1}(-(\lambda_1 + \lambda_2)q)}\end{aligned}$$

となる．この分布は，一般化負の超幾何(generalized negative hypergeometric**)分布ということができる．なぜなら，** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ **の特別な場合に，** $L_n^{\alpha}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$ **を使うことによって，与式は負の超幾何分布の確率関数**

$$\frac{\dbinom{k + v_1 - 1}{k}\dbinom{n - k + v_2 - 1}{n - k}}{\dbinom{n + v_1 + v_2 - 1}{n}}$$

に帰着するからである．

・**モーメント．** r **次の下降階乗モーメントは，ベッセル関数分布の** r **次モーメントに等しく，**

$$\mu'_{[r]} = E[K(K-1)\cdots(K-r+1)] = r!\left(\frac{p}{q}\right)^r L_r^{v-1}(-\lambda)$$

となる．これより平均，分散は

$$E(K) = \left(\frac{p}{q}\right)(v + \lambda), \quad \mathrm{Var}(K) = \left(\frac{p}{q}\right)(v + \lambda) + \left(\frac{p}{q}\right)^2 (v + 2\lambda)$$

である．証明は，次の通りである．

$$\begin{aligned}\mu'_{[r]} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)\int_0^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}f(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{k+r}}{k!}f(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\infty}\theta^r f(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\infty}\theta^r\left(\frac{q}{p}\right)^{(v+1)/2}\left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{(v-1)/2} e^{-(\lambda + q\theta/p)} I_{v-1}\left(2\sqrt{\frac{\lambda\theta q}{p}}\right)d\theta\end{aligned}$$

において， $\xi = \sqrt{q\theta/p}$ **と変数変換(**$2\xi d\xi = (q/p)d\theta$**)すると**

$$\mu'_{[r]} = \frac{2e^{-\lambda}}{(q/p)^r \lambda^{(v-1)/2}}\int_0^{\infty}\xi^{2r+v+1-1}e^{-\xi^2}I_{v-1}\left(2\sqrt{\lambda}\xi\right)d\xi$$

となり， Sneddon **の結果** (2.10) **より**

$$\mu'_{[r]} = \frac{e^{-\lambda}\Gamma(r+v)}{(q/p)^r\Gamma(v)}\,{}_1F_1(r+v; v; \lambda)$$

を得る．ここでさらに Kummer 変換を用いることにより結果を導ける．

また，Ong and Lee (1979) はモーメント法(method of moments)を用いてパラメータの推定を行うことにより，事故によって起こる保険請求の数の推定を行い，NNBD がポアソン分布や Pólya-Aeppli 分布よりもデータへの適合がよいことを紹介している．

(c) より一般的な分布族

この節では三項漸化式の場合の Sundt 分布族を拡張し，K の確率関数 p_k が (1.6) を満たす分布族を考える．

(1.6) は，$c=d=e=0$ のとき Sundt–Jewell 分布族，$c=d=e=0$ かつ $p_1=(a+b)p_0$ のとき Panjer 分布族，$c=e=0$ のとき Schröter 分布族，$e=0$ かつ $p_1=(a+b)p_0$ のとき Sundt 分布族 $(n=2)$ に帰着することは明らかである．

(1.6) を満たす分布には例えば次が今までに知られている．

負の二項分布の一般化(Gupta and Ong, 2004)

確率変数 K は

$$K|\theta \sim \mathrm{Po}(\theta), \quad \theta \sim \mathrm{GGa}(\lambda, m, \alpha, n)$$

に従うとする．すなわち，確率変数 θ はパラメータ (λ, m, α, n) の一般化ガンマ分布に従う．$\mathrm{GGa}(\lambda, m, \alpha, n)$ の確率密度関数 $f(\theta)$ は

$$f(\theta) = \frac{\alpha^{m-\lambda}}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)} \frac{\theta^{m-1} e^{-\alpha\theta}}{(\theta+n)^\lambda}, \quad \theta > 0 \tag{2.11}$$

である．ただし，$\lambda \geq 0,\ m, \alpha, n > 0$ であり，

$$\Gamma_\lambda(m, \alpha n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1} e^{-y}}{(y+\alpha n)^\lambda} dy$$

は一般化ガンマ関数を表す．$\lambda = 0$ のとき，一般化ガンマ関数は通常のガンマ関数 $\Gamma(m)$ に帰着するので，(2.11) は通常のガンマ分布 Ga $(m, 1/\alpha)$ に帰着する．

混合変数 K の混合分布確率関数 p_k は，

$$\begin{aligned}
p_k &= \int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} f(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^\infty \frac{\alpha^{m-\lambda} \theta^{m+k-1} e^{-\theta(\alpha+1)}}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)(\theta+n)^\lambda} d\theta \\
&= \frac{1}{k!} \frac{(\alpha+1)^{\lambda-m-k}}{\alpha^{\lambda-m}} \frac{\Gamma_\lambda(m+k, (\alpha+1)n)}{\Gamma_\lambda(m, \alpha n)} \\
&= \frac{(m)_k}{k!} n^k \frac{\Psi(m+k, m+k-\lambda+1; (\alpha+1)n)}{\Psi(m, m-\lambda+1; \alpha n)} \\
&= \frac{(m)_k}{k!} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{m-\lambda} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^k \frac{\Psi(\lambda, \lambda-m+1-k; (\alpha+1)n)}{\Psi(\lambda, \lambda-m+1; \alpha n)}, \quad k \geq 0
\end{aligned}$$

と表現される．最後の式変形では

$$\Psi(a, c; x) = x^{1-c} \Psi(1+a-c, 2-c; x)$$

を使った．ただし，Ψ は第二種合流型超幾何関数(confluent hypergeometric function of the second kind, Erdélyi et al., 1953, p. 255, eq. (2))

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} t^{a-1}}{(1+t)^{a-c+1}} dt = \frac{x^{-c+1}}{\Gamma(a)} \Gamma_{a-c+1}(a, x), \quad a > 0,\ x > 0$$

を表す．また，Ψ の漸化式(Erdélyi et al., 1953, p. 257, eq. (5))

$$(c-a-1)\Psi(a,c-1;x)-(c-1+x)\Psi(a,c;x)+x\Psi(a,c+1;x)=0$$

から，確率関数は漸化式

$$(1+\alpha)p_k=\left(1+\frac{-1-\lambda+m-(\alpha+1)n}{k}\right)p_{k-1}+\left(\frac{(-m+2)n}{k}+\frac{(m-1)n}{k-1}\right)p_{k-2},\quad k\geq 2$$

を持つ．ただし，

$$p_0=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{m-\lambda}\frac{\Psi(\lambda,\lambda-m+1;(\alpha+1)n)}{\Psi(\lambda,\lambda-m+1;\alpha n)}$$

である．また，確率母関数は

$$G(t)=(1+\alpha^{-1}-t/\alpha)^{\lambda-m}\frac{\Gamma_\lambda(m,\alpha n(1+\alpha^{-1}-t/\alpha))}{\Gamma_\lambda(m,\alpha n)},\quad t<\alpha+1$$

となる．また，その他の特徴として下降階乗モーメント $\mu'_{[r]}$ は

$$\mu'_{[r]}=\alpha^{-r}\frac{\Gamma_\lambda(m+r,\alpha n)}{\Gamma_\lambda(m,\alpha n)}=\frac{n^r\Gamma(m+r)}{\Gamma(m)}\frac{\Psi(m+r,m+r-\lambda+1;\alpha n)}{\Psi(m,m-\lambda+1;\alpha n)} \tag{2.12}$$

である．特に，$\lambda=0$ のときは負の二項分布，$\alpha\to 0$ のときは Kempton's full beta model (Kempton, 1975)となる．Kempton のモデルは

$$K|\lambda\sim\mathrm{Po}(\lambda),\quad \lambda|a\sim\mathrm{Ga}(p,1/a),\quad a\sim\mathrm{Ga}(q,b)$$

と混合して作られる分布である．すなわち，確率変数 λ は第二種ベータ分布(beta distribution of the second kind)に従う確率変数を b で除した分布に従い，その確率密度関数 $f(\lambda)$ は

$$f(\lambda)=\frac{\lambda^{p-1}}{B(p,q)b^q}\left(\frac{b}{1+b\lambda}\right)^{p+q}$$

である．このとき，混合変数 K の混合分布確率関数 p_k は，

$$\begin{aligned}p_k&=\frac{1}{B(p,q)}\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{b^p\lambda^{p-1}}{(1+b\lambda)^{p+q}}d\lambda\\&=\frac{\Gamma(p+k)}{k!B(p,q)b^k}\Psi(p+k,k-q+1;1/b),\quad k\geq 0\end{aligned}$$

と表される．ただし，$b>0,\ p>0,\ q>0$ である．上式は，一般化負の二項分布の確率関数において $m=p,\ \lambda=p+q,\ n=1/b$ とおき $\alpha\to 0$ としても得られる．

Kempton モデルの下降階乗モーメント $\mu'_{[r]}$ は

$$\mu'_{[r]}=\frac{B(p+r,q-r)}{b^rB(p,q)},\quad q\geq r$$

で与えられる．式 (2.12) からも求められるが，直接的に次のように求められる．

$$\mu'_{[r]}=\int_0^\infty\frac{b^p\lambda^{p-1}}{B(p,q)(1+b\lambda)^{p+q}}\left\{\sum_{k=0}^\infty k(k-1)\cdots(k-r+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right\}d\lambda$$

の中括弧内の無限級数式はポアソン分布の r 次下降階乗モーメントの式だから値は λ^r である．よって，ベータ関数の定義より

$$\mu'_{[r]}=\int_0^\infty\frac{b^{p+r}\lambda^{p+r-1}}{B(p,q)b^r(1+b\lambda)^{p+q}}d\lambda=\frac{B(p+r,q-r)}{b^rB(p,q)}$$

を得る．

Ong のモデル（Ong and Muthaloo, 1995）
確率変数 K は

$$K|\lambda \sim \mathrm{Po}(\lambda), \quad \lambda|u \sim \mathrm{Ga}(\alpha, 1/u), \quad 1/u \sim \mathrm{Ga}(\beta, \gamma), \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$$

と定義される混合変数とする．すると，確率変数 λ はガンマ分布の積の分布となり，λ の確率密度関数 $f(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{u^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-u\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-1/(\gamma u)}}{\gamma^\beta \Gamma(\beta) u^{\beta+1}} du \\ &= \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{(\alpha+\beta)/2-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} K_{\alpha-\beta}\left(2\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

である．ただし，$K_p(x)$ は次数 p の第三種変形ベッセル関数（modified Bessel function of the third kind and order p）

$$K_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^p \int_0^\infty \exp\left\{-\left(t + \frac{x^2}{4t}\right)\right\} t^{-(p+1)} dt, \quad x > 0$$

を表す．確率関数 p_k は $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$ に対して

$$\begin{aligned} p_k &= \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} f(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! \gamma^\beta} \Psi(k+\beta, \beta-\alpha+1; 1/\gamma), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

となる．Ψ の漸化式（Erdélyi et al., 1953, p. 257, eq. (4)）

$$a(a+1-c)\Psi(a+1, c; x) - (x+2a-c)\Psi(a, c; x) + \Psi(a-1, c; x) = 0$$

より漸化式

$$p_k = \left(2 + \frac{\alpha+\beta-3+1/\gamma}{k}\right) p_{k-1} + \left(-1 + \frac{(\alpha-2)(\beta-2)}{k} - \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{k-1}\right) p_{k-2}, \quad k \geq 2$$

を得る．
　その他の性質として，r 次の下降階乗モーメント $\mu'_{[r]}$ は

$$\mu'_{[r]} = (\alpha)_r (\beta)_r \gamma^r$$

となる．証明は，次の通り．
　確率関数 p_k 内の第二種合流型超幾何関数を積分形で書き直すと

$$\begin{aligned} \mu'_{[r]} &= \sum_{k=0}^\infty k(k-1)\cdots(k-r+1) p_k \\ &= \sum_{k=0}^\infty k(k-1)\cdots(k-r+1) \int_0^\infty \frac{(\alpha)_k \gamma^k}{k! \Gamma(\beta)} \frac{e^{-t} t^{\beta+k-1}}{(1+\gamma t)^{\alpha+k}} dt \end{aligned}$$

である．ここで，負の二項分布の r 次下降階乗モーメント式

$$\sum_{k=0}^\infty k(k-1)\cdots(k-r+1) \frac{(\alpha)_k}{k!} \left(\frac{\gamma t}{1+\gamma t}\right)^k \left(\frac{1}{1+\gamma t}\right)^\alpha = (\alpha)_r (\gamma t)^r$$

を使えば結果が得られる．

3. 一般化 Charlier 級数分布

この節では Charlier 級数分布の一般化である一般化 Charlier 級数分布（Kitano et al., 2005）について紹介する．

3.1 定義

合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ のテイラー展開による公式（Erdélyi et al., 1953, p. 283, eq. (2)）

$$(3.1)\qquad {}_1F_1(a;c;\Lambda x) = \Lambda^{1-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c)_k}{k!}(1-\Lambda)^k{}_1F_1(a;c-k;x), \quad c \neq 0, \pm1, \pm2, \dots$$

において，$\Lambda^{-1} = q = 1-p (0<p<1)$, $\Lambda x = \lambda(\lambda>0)$, $a = s(s \geq 0)$, $c = N+1$（N は正の整数）を代入することにより，確率関数

$$(3.2)\qquad p_k = \binom{N}{k}p^kq^{N-k}\frac{{}_1F_1(s;N-k+1;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}, \quad k \geq 0$$

を得る．ただし，(3.2) は，$k \geq N$ のとき，

$$p_k = \frac{N!\lambda^{k-N}p^k(s)_{k-N}}{k!(k-N)!}\frac{{}_1F_1(s+k-N;k-N+1;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}$$

と解釈する．この式は，$k \geq N$ のとき，(3.2) における

$$\binom{N}{k}{}_1F_1(s;N-k+1;\lambda q)$$

の分子，分母共に 0 を含む部分を約分して式を整理することによって得られる．より厳密な導出については，Kitano et al.（2005）の論文を参照のこと．(3.2) を確率関数として持つ分布を一般化 Charlier 級数（generalized Charlier series）分布と呼ぶ．この名前の由来は $s = N+1$ のとき

$${}_1F_1(s;N+1;z) = e^z$$

より Charlier 級数分布の確率関数 (2.8) に帰着するからである．また，Charlier 級数分布と同様に (3.2) を Charlier 級数を用いて表現することが可能であり，$N = M-r$, $s = M+1$ と置き換えると，

$$p_k = e^{-\lambda p}(\lambda p)^k\frac{q^M}{k!}\frac{C_{k+r}(M;-\lambda q)}{C_r(M;-\lambda)}$$

と表現できる．

3.2 性質

・漸化式．Charlier 多項式の漸化式

$$aC_{n+1}(x;a) = (n+a-x)C_n(x,a) - nC_{n-1}(x;a)$$

もしくは合流型超幾何関数の漸化式（Erdélyi et al., 1953, p. 254, eq. (3)）

$$(3.3)\qquad c(c-1){}_1F_1(a;c-1;x) - c(c-1+x){}_1F_1(a;c;x) + (c-a)x{}_1F_1(a;c+1;x) = 0$$

より確率関数 p_k は漸化式

$$p_0 = q^N\frac{{}_1F_1(s;N+1;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}, \quad p_1 = Npq^{N-1}\frac{{}_1F_1(s;N;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)},$$

$$p_k = \frac{p}{q}\left(-1 + \frac{N+\lambda q+1}{k}\right)p_{k-1} + \frac{\lambda p^2}{q}\left(\frac{N+2-s}{k} - \frac{N+1-s}{k-1}\right)p_{k-2}, \quad k \geq 2$$

を満たす．これは一般化 Charlier 級数分布が三項漸化式 (1.6) を満足する確率分布であることを示している．

• 確率母関数．(3.1) を使うことによって確率母関数は，

$$E(t^K) = (pt+q)^N \frac{{}_1F_1(s;N+1;\lambda(pt+q))}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}$$

で与えられる．

• 特別な場合．$s=0$ もしくは $\lambda \to 0$ のとき，パラメータ N,p の二項分布となる．また，$s=N+1$ のとき，Charlier 級数分布となる．これらは，確率母関数に代入することにより容易に言える．

• モーメント．r 次の下降階乗モーメント $\mu'_{[r]}$ は

$$\mu'_{[r]} = N_{[r]}p^r \frac{{}_1F_1(s;N-r+1;\lambda)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}, \quad r \geq 1$$

で与えられる．ただし，

$$N_{[r]} = N(N-1)\cdots(N-r+1)$$

であり，確率関数の解釈のときと同様に $r \geq N$ ならば

$$\mu'_{[r]} = \frac{N!\lambda^{r-N}p^r(s)_{r-N}}{(r-N)!} \frac{{}_1F_1(s+r-N;r-N+1;\lambda)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}$$

と解釈する．実際，$r \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k_{[r]}p_k &= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{N!}{(k-r)!(N-k)!}p^k q^{N-k} \frac{{}_1F_1(s;N-k+1;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)} \\ &= N_{[r]}p^r \frac{{}_1F_1(s;N-r+1;\lambda)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N-r)!}{k!(N-k-r)!}p^k q^{N-k-r} \frac{{}_1F_1(s;N-r-k+1;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N-r+1;\lambda)}\end{aligned}$$

となり，最終式で $\sum$ 内の関数は 一般化 Charlier 級数分布の確率関数となるため和は 1 である．よって，与式が得られる．

• 和の分布としての表現．Charlier 級数分布と同様に一般化 Charlier 級数分布も次のように 2 つの確率変数の和の分布として表現することが出来る．X_1 と X_2 が独立で X_1 がパラメータ N,p を持つ二項分布とする．その確率母関数は

$$G_{X_1}(t) = (pt+q)^N$$

である．そして X_2 の確率母関数 $G_{X_2}(t)$ が確率母関数

$$G_{X_2}(t) = E(t^{X_2}) = \frac{{}_1F_1(s;N+1;\lambda(pt+q))}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)} \tag{3.4}$$

を持つならば，確率変数 $X = X_1 + X_2$ の従う分布は一般化 Charlier 級数分布である．X_2 の確率関数 $f_2(x)$ は (3.4) を t に関して微分することによって

$$f_2(x) = \frac{(s)_x}{x!(N+1)_x}(\lambda p)^x \frac{{}_1F_1(s+x;N+1+x;\lambda q)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}, \quad x \geq 0 \tag{3.5}$$

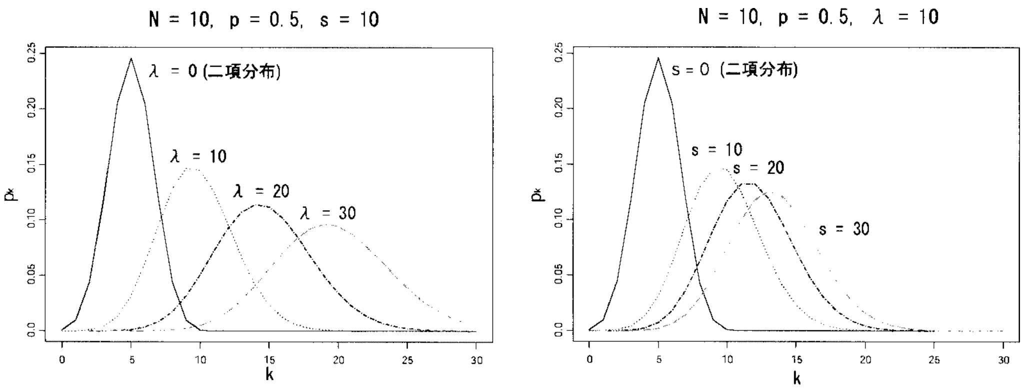

図 1. **一般化** Charlier **級数分布.**

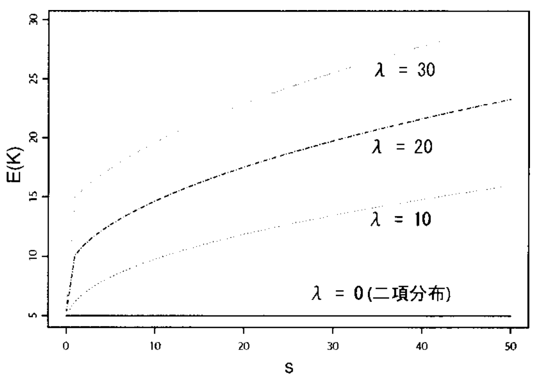

図 2. $N=10, p=0.5$ **のときの一般化** Charlier **級数分布の平均値**$(\lambda=0,10,20,30)$**.**

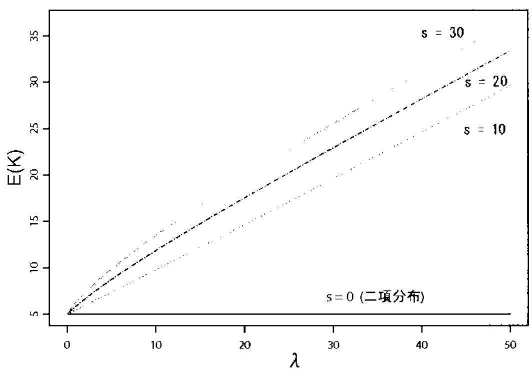

図 3. $N=10, p=0.5$ **のときの一般化** Charlier **級数分布の平均値**$(s=0,10,20,30)$**.**

と求められる．ただし，$s \geq 0,\ \lambda > 0,\ N > -1,\ 0 < p = 1 - q < 1$ である．この確率関数 $f_2(x)$ においてパラメータ N は正の整数に限らず $-1 < N$ と拡張できることに注意する．この分布に関しての特徴については，4.2 節で説明する．

・分布の形，パラメータの意味．一般化 Charlier 級数分布は，4 パラメータの分布であるが N, p に関しては分布の特徴から見ても二項分布に関係したパラメータであるので比較的理解しやすいパラメータといえる．よって，残り二つのパラメータ s, λ が分布に対してどういう影響を与えているのかが問題である．図 1 は λ, s のそれぞれを 0，10，20，30 と変化させ，残りの三つのパラメータを固定しながら確率関数のグラフを描いたものである．また，図 2，図 3 はそれぞれ λ, s を 0，10，20，30 と変化させたときの s, λ と平均との関係を描いたものである．$s = 0$ もしくは $\lambda \to 0$ のとき，二項分布となることに注意する．

4. 複合分布

4.1 定義と性質

損害保険の分野における集団的リスクモデルでは，ある固定した時間内での保険者に対するクレーム総額のモデル化として複合分布が使われる．保険に関する基本的な理論や応用に関しては Daykin et al.（1994）が参考になる．

この節では複合分布の定義と基本的な性質について述べる．

定義．複合分布．K を非負整数値をとる確率変数で確率関数 $p_k = \Pr(K = k)$ を持ち，$Z_1, Z_2, \ldots$ は，独立で同一の分布関数 $S(z)$，確率関数（もしくは密度関数）$s(z)$ を持つ確率変数列であり，K と Z_i もまた独立であるとする．(1.2) で定義した確率変数 X を複合変数と呼び，その分布を複合分布と呼ぶ．

これを損害保険に当てはめてみると確率変数 K はある一定期間内に起こるクレームの数，Z_i は一つのクレームに対するクレーム額，X はある一定期間内で保険者が支払わなくてはならないクレーム総額となる．以降，K を “クレーム件数の確率変数”，Z_i を “クレーム額の確率変数” と呼ぶこととする．X の分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, S^{k*}(x)$$

と表される．ただし，$S^{k*}(x) = \Pr(\sum_{i=1}^{k} Z_i \leq x)$ を表す．また，$x < 0$ ならば $S^{0*}(x) = 0,\ x \geq 0$ ならば $S^{0*}(x) = 1$ と約束する．同様に Z_i が離散の場合，X の確率関数は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^{k*}(x)$$

と表される．ただし，$s^{k*}(x)$ は畳み込み（convolution）

$$s^{k*}(x) = \Pr(X = x | K = k),\ k \geq 1$$

を表す．$k = 0$ に対しては便宜上 $s^{0*}(0) = 1,\ s^{0*}(x) = 1(x \geq 1)$ とする．一方，Z_i が連続の場合は X は一般に点 0 において確率を持つ混合型の変数となり

$$\Pr(X = 0) = p_0, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, s^{k*}(x), \quad s^{k*}(x) = \frac{d}{dx} S^{k*}(x), \quad x > 0$$

という形となることに注意する．

注．複合分布を英語に書き直すと “compound distribution” である．この呼び方は Daykin et al.（1994）で紹介されているものであるが，名前の呼び方に関してはさまざまな本や論文で違った呼び方をしている．例えば，Johnson et al.（1992）では “stopped-sum distribution” と呼び，Feller（1968）では K の分布が $\mathcal{F}_K$, Z_i の分布が $\mathcal{F}_Z$ であるとき，“$\mathcal{F}_K$ generalized by generalizing $\mathcal{F}_Z$ distribution” と呼び，Galliher et al.（1959）では “stuttering distribution” とさまざまである．しかも，Johnson et al.（1992）では混合分布を “compound distribution” と呼んでいたり非常に混乱しやすいので注意が必要である．

複合変数の確率母関数，モーメント母関数やモーメントについて考える．X のモーメント母関数を $M_X(t)=E(e^{tX})$, K のモーメント母関数を $M_K(t)$，Z_i のモーメント母関数を $M_Z(t)$ とすると

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[M_X(t)|K]=E\left[\{M_Z(t)\}^K\right] \\ &= E\left[e^{K\log M_Z(t)}\right]=M_K(\log M_Z(t))=M_K(\psi_Z(t)) \end{aligned}$$

を得る．ただし，ψ_Z は Z_i のキュムラント母関数を表す．同様に X の確率母関数 $G_X(t)$ は K の確率母関数を $G_K(t)$, Z_i の確率母関数を $G_Z(t)$ とすると

$$G_X(t)=G_K(G_Z(t)) \tag{4.1}$$

と書け，平均は

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kE(X|K=k)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kE\left[\sum_{i=1}^{K}Z_i|(K=k)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}kp_kE(Z_1)=E(K)E(Z_1)$$

となる．

例．確率変数 K が平均 μ のポアソン分布に従うとき（このときの X の分布を複合ポアソン分布と呼ぶ），複合変数 X のキュムラント母関数 $\psi_X(t)=\log M_X(t)$ は

$$\psi_X(t)=\mu(\exp(\psi_Z(t))-1)$$

である．j 次のキュムラント $\kappa_j=\psi_X^{(j)}(0)$ は

$$\kappa_j=\psi_X^{(j)}(0)=\mu M_Z^{(j)}(0)=\mu E(Z^j)$$

と表される．

分布関数などの定義式の形より明らかなように，Z_i の和の分布が閉じた形（例えば再生性を用いて表せる分布）で書けなければ複合分布の表現は非常に困難になる．例として，いくつかの複合変数 X の「確率密度関数」 $f(x)$ を与えるが，特殊関数や無限級数を用いた表現になってしまうことは避けられない事がわかる．

例．(a) $K\sim\mathrm{Po}(\lambda)$，$Z_i$ は平均 σ の指数分布のとき，複合変数 X は原点に確率 $\Pr(X=0)=e^{-\lambda}$ を持ち「確率密度関数」は次数 1 の第一種変形ベッセル関数を用いて

$$f(x)=e^{-(\lambda+x/\sigma)}\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma x}}I_1\left(2\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}x}\right),\quad x>0$$

となる．また，λ を $\lambda/2$，σ を $2\mu/\lambda$ と再パラメータ化を行った場合の分布は自由度 0 の非心 χ^2（non-central χ^2 with zero degrees of freedom）分布（Siegel, 1985）と呼ばれている．

(b) エルミート分布．$K \sim \mathrm{Po}(\lambda)$，$Z_i$ はパラメータ $2, p$ の二項分布に従うときを考え，パラメータ変換 $\alpha = \sqrt{2\lambda}p, \beta = \sqrt{2\lambda}q$ ($\alpha > 0,\ \beta > 0$) を行ったときの複合分布をエルミート分布といい，X の確率母関数 $G_X(t)$ は (4.1) より

$$G_X(t) = \exp\left(\alpha\beta t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} - \alpha\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

となる．これをマクローリン展開することにより確率関数

$$P_{2r} = e^{-\alpha\beta-\alpha^2/2}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^r \frac{1}{r!}{}_1F_1\left(-r; \frac{1}{2}; -\frac{\beta^2}{2}\right),$$
$$P_{2r+1} = e^{-\alpha\beta-\alpha^2/2}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^r \frac{\alpha\beta}{r!}{}_1F_1\left(-r; \frac{3}{2}; -\frac{\beta^2}{2}\right), \quad r \geq 0$$

が得られる．

合流型超幾何関数の関係式

$$b{}_1F_1(a;b;z) - z{}_1F_1(a;b+1;z) = b{}_1F_1(a-1;b;z),$$
$$a{}_1F_1(a+1;b,z) - (b-1){}_1F_1(a;b-1,z) = (1+a-b){}_1F_1(a;b,z)$$

をそれぞれ確率変数の値が偶数のとき，奇数のときに使うと，確率関数は

$$P_{-1} = 0,\ P_0 = e^{-\alpha\beta-\alpha^2/2},$$
$$P_k = \frac{\alpha\beta}{k}P_{k-1} + \frac{\alpha^2}{k}P_{k-2}, \quad k \geq 1 \tag{4.2}$$

という漸化式を持つ．

(c) K が (2.3) の確率関数を持つ負の二項分布，Z_i が平均 λ の指数分布に従うときの複合変数の分布は

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^\alpha, & x = 0, \\ \dfrac{\alpha p(1-p)^\alpha}{\lambda} e^{-x/\lambda}{}_1F_1\left(\alpha+1; 2; \dfrac{px}{\lambda}\right), & x > 0 \end{cases}$$

と書き表せる．

4.2 ベルヌーイ分布による一般化合流型超幾何分布

3.2 節で一般化 Charlier 級数分布の特徴の一つとして二項分布に従う確率変数 X_1 と確率関数 (3.5) を持つ確率変数 X_2 の和で表されると述べた．確率変数 X_2 は次の複合変数と同値である．

クレーム件数の確率変数 K が合流型超幾何 (confluent hypergeometric) 分布 (Hall, 1956; Bhattacharya, 1966)，すなわち確率母関数

$$G(t) = \frac{{}_1F_1(a;b;t\theta)}{{}_1F_1(a;b;\theta)}, \quad a > 0,\ b > 0,\ \theta > 0 \tag{4.3}$$

を持つ確率変数とする．クレーム額の確率変数 Z_i はパラメータ p のベルヌーイ分布 ($0 < p < 1$) に従うとすると，複合変数 X の確率母関数 $G_X(t)$ は (4.1) より

$$E(t^S) = G(pt+q) = \frac{{}_1F_1(a;b;(pt+q)\theta)}{{}_1F_1(a;b;\theta)} \tag{4.4}$$

となり，これは X_2 の確率母関数 (3.4) と同じ型となる．

(4.4) を確率母関数として持つ分布を以降ベルヌーイ分布による一般化合流型超幾何分布 (confluent hypergeometric distribution generalized by a generalizing Bernoulli distribution) と呼

ぶ.（少々長い名前になっているが，どの分布同士による複合分布かが分かり易いように Feller 流の名前の呼び方をここでは使った.）

これをより一般化させた命題が次のものである．

命題．確率変数 U の確率関数 $f(u)$ がべき級数分布（power series distribution）に従うとき，以下の二つの確率変数 X,Y の分布は同じ分布となる．

（1）$X \sim \mathrm{Bi}(U,p),\ 0<p<1$.
（2）複合変数 $Y=\sum_{i=1}^{U} Z_i$　(Z_i は独立にパラメータ p のベルヌーイ分布に従う)．

ここで，べき級数分布とは，確率関数が

$$f(u)=\frac{b(u)}{u!a(\theta)}\theta^u, \quad u \ge 0,$$

ただし，$a(\theta)=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{b(u)}{u!}\theta^u$，$\theta>0,\ b(u)>0$，で表される分布である．例としては，Panjer 分布族である二項分布，負の二項分布，ポアソン分布，また Sundt–Jewell 分布族である対数級数分布がある．

証明. X の確率母関数 $G_X(t)$ は

$$G_X(t)=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{b(u)[(pt+q)\theta]^u}{a(\theta)u!}=\frac{a((pt+q)\theta)}{a(\theta)}$$

であり，一方，Y の確率母関数 $G_Y(t)$ は (4.1)，U,Z の確率母関数 $G_U(t)=a(\theta t)/a(\theta)$，$G_Z(t)=pt+q$ より

$$G_Y(t)=G_U(G_Z(t))=\frac{a(\theta(pt+q))}{a(\theta)}$$

となり，題意を示せる．

この命題の例として，$U\sim \mathrm{Po}(\lambda)$ のとき，X も Y も $\mathrm{Po}(\lambda p)$ となることは，2.2 節で紹介した Charlier 級数分布の性質とも関連していることを注意したい．

その他，(3.5) の分布の分かっている性質について列挙する．

・漸化式 (3.3) を使うことによって確率関数 (3.5) は漸化式

$$f(x)=\frac{p}{q}\left(-1-\frac{N-\lambda q-1}{x}\right)f(x-1)+\frac{\lambda p^2}{q}\left(\frac{2-s}{x}+\frac{s-1}{x-1}\right)f(x-2), \quad x\ge 2$$

を満たす．従って，(3.5) の分布は漸化式 (1.6) の分布族の一員である．

・他の分布との関係．$s=N+1$ ならば，(3.5) は平均パラメータ λp のポアソン分布に帰着する．$p\to 1$ ならば，(3.5) は (4.3) のパラメータを $a=s, b=N+1, \theta=\lambda$ と変換させた合流型超幾何分布に帰着する．

・下降階乗モーメント．確率関数 (3.5) の r 次下降階乗モーメント $\mu'_{[r]}$ は

(4.5)
$$\mu'_{[r]}=(\lambda p)^r\frac{(s)_r}{(N+1)_r}\frac{{}_1F_1(s+r;N+1+r;\lambda)}{{}_1F_1(s;N+1;\lambda)}, \quad r\ge 1$$

を満たし，さらに (3.3) から

$$\mu'_{[r]}=-\lambda^2 p(N+r-1-\lambda)\mu'_{[r-1]}+\lambda^3p^2(s+r-2)\mu'_{[r-2]}, \quad r\ge 2$$

となる．(4.5) を $\mu'(r,N,s|\lambda,p)$ と書き直したとき，r 次の下降階乗モーメントと t 次の下降階乗モーメントの比は次の下降階乗モーメントを使った式で

$$\frac{\mu'(r,N,s|\lambda,p)}{\mu'(t,N,s|\lambda,p)} = \mu'(r-t,N+t,s+t|\lambda,p), \quad r \geq t$$

と表現できる．

4.3 Minkova による古典離散分布の一般化

Minkova (2002) は，確率変数 Z がべき級数分布に従い確率変数 K が移動幾何分布に従うとし，複合変数 X の従う分布を考え，べき級数分布の一般化を行った．ここで，移動幾何分布の確率関数と確率母関数はそれぞれ

$$p_k = \rho^{k-1}(1-\rho), \quad k \geq 1, \quad G(t) = \frac{(1-\rho)t}{1-\rho t}, \quad |\rho t| < 1$$

で与えられる．X の従う分布を Inflated-parameter Power Series Distribution (IPSD) と呼び，特に，Z が二項分布，負の二項分布，ポアソン分布のときの X の分布をそれぞれ，Inflated-parameter 二項分布 (IPBi)，Inflated-parameter 負の二項分布 (IPNB)，Inflated-parameter ポアソン分布 (IPPo) と呼ぶ．IPBi，IPNB，IPPo は確率関数に関して次の三項漸化式

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} + c\left(1 - \frac{2}{k}\right) p_{k-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \ p_{-1} = 0$$

を満たす．従って，これらの分布は Sundt 分布族の一員である．定数 a, b, c は次の式を満たす．

- $Z \sim \mathrm{Po}(\theta)$ のとき，$a = 2\rho$，$b = \theta(1-\rho) - 2\rho$，$c = -\rho^2$
- $Z \sim \mathrm{NB}(n,\theta)$ のとき，$a = (1-\rho)(1-\theta) + 2\rho$，$b = (r-1)(1-\rho)(1-\theta) - 2\rho$，$c = -\rho(1-\theta(1-\rho))$
- $Z \sim \mathrm{Bi}(n,\theta)$ のとき，$a = 2\rho - \theta(1-\rho)$，$b = (n+1)\theta(1-\rho) - 2\rho$，$c = -\rho(\rho - \theta(1-\rho))$

次に，これらの IPSD をさらに一般化するために Aoyama and Shimizu (2005) による GIT (generalized inverse trinomial) のサブクラスである GIT_8 を考える．GIT_8 は確率母関数が

$$G(t) = \left(\frac{p_1 + p_2 t}{1 - p_3 t}\right)^n, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

で与えられる分布で，これを $\mathrm{GIT}_8(n; p_1, p_2, p_3)$ と書く．特に $p_3 = 0$ のとき二項分布に，$p_2 = 0$ のとき負の二項分布となる．また，$\mathrm{GIT}_8(1; 0, p_2, p_3)$ は移動幾何分布である．

ここで，確率変数 Z が $\mathrm{GIT}_8(n; p_1, p_2, p_3)$ に従い，確率変数 K は $\mathrm{GIT}_8(1; q_1, q_2, q_3)$ に従うとするとき，複合変数 X の従う分布を考える．これは，Minkova の IPBi と IPNB を一般化している．X の確率母関数は

$$G(t) = \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 t}{1 - \gamma_3 t}\right)^n$$

となる．ただし，$\gamma_1 = (p_1 + p_2 q_1)/(1 - p_3 q_1)$，$\gamma_2 = (-p_1 q_3 + p_2 q_2)/(1 - p_3 q_1)$，$\gamma_3 = (p_3 q_2 + q_3)/(1 - p_3 q_1)$，$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$，$-1 \leq \gamma_2 \leq 1$，$0 \leq \gamma_1, \gamma_3 \leq 1$ である．

4.4 漸化式

前述したように，複合分布は確率関数を明白な形で書き下せないことが多く，確率の値を求める際に計算回数が多くなるという問題点がある．そのため，リスク理論におけるクレーム総額の分布を複合ポアソン分布に従うと仮定して話を進めていくことが多い．しかし，実社会上では天災や飛行機事故等の様に一つの事故で多数の人が被害を被ることによって非常に多数の

クレームが短期間で発生することがありうるため，裾が重くないポアソン分布の適用はあまり好ましくないときもある．クレーム件数の分布がポアソン分布より裾が重いとき複合確率関数の値を得る問題を解決するための一つの手段として，複合変数の確率関数の漸化式について考える．

以下，この節では Z_i は特に断りがなければ非負整数値をとる確率変数であると仮定して話を進める．

Panjer (1981) は K の確率関数 p_k が (1.1) を満たすとき，複合変数 X の確率関数が漸化式で表現できることを紹介している．この結果は Daykin et al. (1994, pp. 119–120) や Dickson (2005, pp. 72–74) でも見ることができる．しかし，2.1 節で述べたように Panjer 分布族は，わずかの分布しか含まない．なお，Dickson (2005, pp. 75–76) は Schröter 分布族に対する漸化式を紹介している．Kitano et al. (2005) は，これらをさらに拡張させ，K が (1.6) に従うときの X の確率関数の漸化式を考えた．漸化式 (1.6) を満たす分布の例は 2.2 節で述べられている．紹介した例の中で，例えばポアソン分布を混合させた非心負の二項分布は，ポアソン分布よりも裾が重い分布になる．実際，ポアソン分布の変動指数(ID= (分散)/(平均)) は 1 であり，NNBD (p, v, λ) では，ID$=1+(p/q)\cdot(v+2\lambda)/(v+\lambda)>1$ となる．一方，一般化 Charlier 級数分布は，パラメータの値によって ID<1 から ID>1 の場合を表現できるので，柔軟性を持つ分布である．クレーム件数がこれらの分布を含む (1.6) の分布族に従うときのクレーム総額の確率関数の漸化式を与える次の拡張は意義のあるものである．

複合変数 X の確率関数 $f(x)$ は $x=0$ のとき，漸化式の初期値として

$$f(0)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^{k*}(0)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\{s(0)\}^k=G_K(s(0))$$

を満たし(ただし，G_K はクレーム件数の確率変数 K の確率母関数とする)，次の定理で漸化式が表現できる．

定理． K が 漸化式 (1.6) を満たすとき，$f(x)$ は $x>0$ で次の漸化式を持つ．

$$f(x)=\frac{1}{1-as(0)-c\,(s(0))^2}\Biggl(\{p_1-(a+b)p_0+eH_K\,(s(0))\}\,s(x)$$
$$+\sum_{j=1}^{x}\left[\left(a+\frac{bj}{x}\right)s(j)+\left(c+\frac{dj}{2x}\right)s^{2*}(j)\right]f(x-j)$$
$$+e\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}s(x-i)s(j)f(i-j)\Biggr), \tag{4.6}$$

ただし

$$H_K(t)=\int_0^t G_K(u)du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}p_k t^{k+1}$$

である．

証明． まず

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k s^{k*}(x) \tag{4.7}$$

$$= p_1 s(x) + a\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1} s^{(k+2)*}(x)}_{\text{(A)}} + b\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} p_{k+1} s^{(k+2)*}(x)}_{\text{(B)}}$$

$$+ c\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^{(k+2)*}(x)}_{\text{(C)}} + d\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} p_k s^{(k+2)*}(x)}_{\text{(D)}} + e\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} p_k s^{(k+2)*}(x)}_{\text{(E)}}$$

に注意し，次の四つの式 (4.8)∼(4.11) を(A)∼(E)の計算に使用する．

畳み込みの性質より，$n \geq 0$ に対して

$$s^{(n+2)*}(x) = \sum_{j=0}^{x} s(j) s^{(n+1)*}(x-j) \tag{4.8}$$

$$= \sum_{j=0}^{x} s^{2*}(j) s^{n*}(x-j) \tag{4.9}$$

が得られ，条件付き期待値の性質より

$$E\left[Z_1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} Z_i = x\right] = \frac{x}{n+1}$$
$$= \frac{\sum_{j=0}^{x} j s(j) s^{n*}(x-j)}{s^{(n+1)*}(x)},$$

従って

$$\frac{s^{(n+1)*}(x)}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{x} j s(j) s^{n*}(x-j) \tag{4.10}$$

が得られる．また,

$$E\left[Z_1 + Z_2 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+2} Z_i = x\right] = \frac{2x}{n+2}$$
$$= \frac{\sum_{j=0}^{x} j s^{2*}(j) s^{n*}(x-j)}{s^{(n+2)*}(x)}$$

から

$$\frac{s^{(n+2)*}(x)}{n+2} = \frac{1}{2x} \sum_{j=0}^{x} j s^{2*}(j) s^{n*}(x-j) \tag{4.11}$$

が得られる．式 (4.8)∼(4.11) から, (A)∼(E)は

$$\text{(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1} s^{(k+2)*}(x) = \sum_{j=0}^{x} s(j) f(x-j) - p_0 s(x) \quad \text{((4.8) から)}$$

$$= s(0) f(x) + \sum_{j=1}^{x} s(j) f(x-j) - p_0 s(x), \tag{4.12}$$

$$\text{(B)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} p_{k+1} s^{(k+2)*}(x) = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{x} j s(j) f(x-j) - p_0 s(x) \quad \text{((4.10) から)}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{x} js(j)f(x-j) - p_0 s(x), \tag{4.13}$$

$$(\mathrm{C}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^{(k+2)*}(x) = \sum_{j=0}^{x} s^{2*}(j)f(x-j) \quad ((4.9)\ \text{から})$$

$$= (s(0))^2 f(x) + \sum_{j=1}^{x} s^{2*}(j)f(x-j), \tag{4.14}$$

$$(\mathrm{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} p_k s^{(k+2)*}(x) = \frac{1}{2x}\sum_{j=0}^{x} js^{2*}(j)f(x-j) \quad ((4.11)\ \text{から})$$

$$= \frac{1}{2x}\sum_{j=1}^{x} js^{2*}(j)f(x-j) \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} p_k s^{(k+2)*}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} p_k \sum_{i=0}^{x} s(i) s^{(k+1)*}(x-i) \\ &= \sum_{i=0}^{x-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k+1)*}(x-i)}{k+1} s(i) p_k + \sum_{k=0}^{\infty} s(x) \frac{(s(0))^{k+1}}{k+1} p_k \\ &= \sum_{j=0}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-j} \frac{i}{x-j} s(j)s(i)f(x-j-i) \\ &\quad + s(x) H_K(s(0)) \quad ((4.8)\ ,(4.10)\ \text{から}) \\ &= \sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} s(x-i)s(j)f(i-j) + s(x)H_K(s(0)) \end{aligned} \tag{4.16}$$

と求められる．式 (4.12)∼(4.16) を (4.7) に代入して $f(x)$ を左辺に整理することによって与式 (4.6) が得られる．

漸化式 (4.6) について以下のことがいえる．

（1） $c=d=e=0$ かつ $p_1=(a+b)p_0$ ならば，(4.6) は Panjer（1981）によって与えられた漸化式の結果に帰着し，$c=d=e=0$ ならば Sundt–Jewell 分布族，$c=e=0$ ならば Schröter 分布族，$e=0$ かつ $p_1=(a+b)p_0$ ならば Sundt 分布族 $(n=2)$ の場合にそれぞれ帰着する．

（2） p_k の満たす漸化式が

$$\begin{aligned} p_k &= p_{k-1}\left(a_1 + \frac{a_2}{k}\right) + p_{k-2}\left(b_1 + \frac{b_2}{k} + \frac{b_3}{k-1}\right) + \cdots \\ &\quad + p_{k-\ell}\left(c_1 + \frac{c_2}{k} + \frac{c_3}{k-1} + \cdots + \frac{c_{\ell+1}}{k-\ell+1}\right), \quad k \geq \ell \end{aligned}$$

の形ならば，$f(x)$ は漸化式の形で表現可能である．しかし，その表現は非常に煩雑なため省略する．

例．複合確率関数漸化式に関しての例として エルミート分布について考えてみる．
まず始めに初期値 $f(0)$ は

$$G_K(t) = \exp(-\lambda(1-t)), \quad s(0) = (1-p)^2$$

より，

$$f(0)=\exp(-\lambda p(2-p))=\exp\left(-\alpha\beta-\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

である．次に，$K\sim \mathrm{Po}(\lambda)$ なので，漸化式 (4.6) に $a=c=d=e=0,\ b=\lambda$ を代入することにより

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\min(x,2)}\left(\frac{\lambda}{x}j\right)\binom{2}{j}p^j(1-p)^{2-j}f(x-j)$$

を得る．$x=1$ のとき，

$$f(1)=2\lambda p(1-p)f(0)=\alpha\beta f(0),$$

$x\geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\lambda}{x}\right)2pqf(x-1)+\left(\frac{2\lambda}{x}\right)p^2f(x-2)\\ &= \frac{\alpha\beta}{x}f(x-1)+\frac{\alpha^2}{x}f(x-2) \end{aligned}$$

を得る．この連続三項の漸化式は 4.1 節で導いた漸化式 (4.2) と同じ式である．

また，クレーム額 Z_i が連続型非負実数値確率変数の場合，複合変数 X は一般に 0 で確率を持ち，正の値で「確率密度関数」を持つが，離散の場合と同様な式変形を行うことによって

$$\begin{aligned} f(0)&=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^{k*}(0)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\{s(0)\}^k=G_K(s(0)),\\ f(x)&=p_1s(x)-\left(a+\frac{b}{2}\right)p_1s^{2*}(x)+p_2s^{2*}(x)\\ &\quad+\int_0^x\left[\left(a+\frac{b}{x}j\right)s(j)+\left(c+\frac{d}{2x}j\right)s^{2*}(j)\right]f(x-j)dj\\ &\quad+\frac{e}{x}\int_0^x\int_0^{x-i}js(i)s(j)f(x-i-j)djdi,\quad x>0 \end{aligned}$$

を得る．

最後に，定理を使用するときの便利のために，(1.6) を満たす確率分布と各々の定数との関係を表 1 にまとめる．

表 1．確率関数の漸化式の係数．

分布	a	b	c	d	e
ポアソン (λ)	0	λ	0	0	0
負の二項 (α, p)	p	$(\alpha-1)p$	0	0	0
二項 (N, p)	$-p/(1-p)$	$(N+1)p/(1-p)$	0	0	0
対数級数 (p)	p	$-p$	0	0	0
非心負の二項 (p, v, λ)	$2p$	$(v+\lambda q-2)p$	$-p^2$	$-p^2(v-2)$	0
エルミート (α, β)	0	$\alpha\beta$	0	α^2	0
負の二項分布の一般化 (λ, m, α, n)	$1/(1+\alpha)$	$(-1-\lambda+m)/(1+\alpha)-n$	0	$(-m+2)n/(1+\alpha)$	$(m-1)n/(1+\alpha)$
Kempton's full beta (b, p, q)	1	$-1-q-1/b$	0	$(2-p)/b$	$(p-1)/b$
Ong's model (α, β, γ)	2	$\alpha+\beta-3+1/\gamma$	-1	$(\alpha-2)(\beta-2)$	$-(\alpha-1)(\beta-1)$
Charlier 級数 (N, p, λ)	$-p/q$	$p(N+\lambda q+1)/q$	0	$\lambda p^2/q$	0
一般化 Charlier 級数 (N, p, λ, s)	$-p/q$	$p(N+\lambda q+1)/q$	0	$\lambda p^2(N+2-s)/q$	$-\lambda p^2(N+1-s)/q$
ベルヌーイ分布による一般化 合流型超幾何 (N, p, λ, s)	$-p/q$	$-p(N-\lambda q-1)/q$	0	$\lambda p^2(2-s)/q$	$\lambda p^2(s-1)/q$
IPBi(n, θ, ρ)	$2\rho-\theta(1-\rho)$	$(n+1)\theta(1-\rho)-2\rho$	$-\rho(\rho-\theta(1-\rho))$	$2\rho(\rho-\theta(1-\rho))$	0
IPNB(r, θ, ρ)	$(1-\rho)(1-\theta)+2\rho$	$(r-1)(1-\rho)(1-\theta)-2\rho$	$-\rho(1-\theta(1-\rho))$	$2\rho(1-\theta(1-\rho))$	0
IPPo(θ, ρ)	2ρ	$\theta(1-\rho)-2\rho$	$-\rho^2$	$2\rho^2$	0

参 考 文 献

Aoyama, K. and Shimizu, K. (2005). A generalization of the inverse trinomial, *KSTS/RR–05/003*, Department of Mathematics, Keio University, Yokohama.

Bhattacharya, S. K. (1966). Confluent hypergeometric distributions of discrete and continuous type with applications to accident proneness, *Bulletin of the Calcutta Statistical Association*, **15**, 20–31.

Daykin, C. D., Pentikäinen, T. and Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London.

Dickson, D. C. M. (2005). *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, Cambridge.

Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed., Vol. 1, Wiley, New York.

Galliher, H. P., Morse, P. M. and Simond, M. (1959). Dynamics of two classes of continuous review inventory systems, *Operations Research*, **7**, 362–384.

Gupta, R. C. and Ong, S. H. (2004). A new generalization of the negative binomial distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, **45**, 287–300.

Hall, W. J. (1956). Some hypergeometric series distributions occurring in birth-death processes at equilibrium (abstract), *Annals of Mathematical Statistics*, **27**, p. 221.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Kemp, A. W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*, 2nd ed., Wiley, New York.

Kemp, A. W. and Kemp, C. D. (1966). An alternative derivation of the Hermite distribution, *Biometrika*, **53**, 627–628.

Kempton, R. A. (1975). A generalized form of Fisher's logarithmic series, *Biometrika*, **62**, 29–38.

Kitano, M., Shimizu, K. and Ong, S. H. (2005). The generalized Charlier series distribution as a distribution with two-step recursion, *Statistics & Probability Letters*, **75**, 280–290.

Laha, R. G. (1954). On some properties of Bessel function distributions, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **46**, 59–72.

Minkova, L. D. (2002). A generalization of the classical discrete distributions, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **31**(6), 871–888.

Ong, S. H. (1988). A discrete Charlier series distribution, *Biometrical Journal*, **30**, 1003–1009.

Ong, S. H. and Lee, P. A. (1979). The non-central negative binomial distribution, *Biometrical Journal*, **21**, 611–627.

Ong, S. H. and Muthaloo, S. (1995). A class of discrete distributions suited to fitting very long-tailed data, *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **24**, 929–945.

Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions, *Astin Bulletin*, **12**, 22–26.

Schröter, K. J. (1991). On a family of counting distributions and recursions for related compound distributions, *Scandinavian Actuarial Journal*, 161–175.

Siegel, A. F. (1985). Modelling data containing exact zoroes using zero degrees of freedom, *Journal of the Royal Statistical Society*, **47**, 267–271.

Sneddon, I. N. (1961). *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh.

Sundt, B. (1992). On some extensions of Panjer's class of counting distributions, *Astin Bulletin*, **22**, 61–80.

Sundt, B. and Jewell, W. S. (1981). Further results on recursive evaluation of compound distributions, *Astin Bulletin*, **12**, 27–39.

Recursion Formulae for Discrete Probability Distributions

Masashi Kitano[1], Kazuki Aoyama[2] and Kunio Shimizu[3]

[1]The Sumitomo Trust & Banking Co., Ltd.
[2]School of Fundamental Science and Technology, Keio University
[3]Department of Mathematics, Keio University

The paper studies recursion formulae for the number of claims and the total amount of claims (aggregate claims) in a collective risk model as an insurance application.

A brief description of recursive formulae for counting distributions is given. The Panjer or Katz family contains Poisson, binomial and negative binomial distributions as non-trivial distributions. The Sundt–Jewell family extends the Panjer family and includes the zero-modified Poisson, negative binomial, binomial and logarithmic distributions. The Schröter family is more extended and includes the Hermite distribution and the Charlier series distribution. The non-central negative binomial distribution is not included in the Schröter family, but is a member of the Sundt (two-step recursion) family.

There can be many distributions that are not included in the above families. The family proposed by Kitano, Shimizu and Ong is a more extended family of distributions and includes the generalized negative binomial distribution by Gupta and Ong, which is an extension of Kempton's full beta model, and Ong's model, in which an inverted gamma (Pearson Type V) distribution is used instead of the gamma distribution as a mixing distribution in Kempton's model. The generalized Charlier series distribution by Kitano et al. also belongs to this family. These distributions with some properties such as the moment generating function and the relation between other distributions are discussed in the paper.

Recursive calculation for the probability function of the total amount of claims is also studied, where the number of claims obeys the family by Kitano et al. The result generalizes the recursive calculation in the Panjer, Sundt-Jewell, Schröter, and Sundt (two-step recursion) families.

Key words: Collective risk model, generalized Charlier series distribution, Panjer family, Schröter family, Sundt family, Sundt-Jewell family.