

世帯数の変遷

上田 澄江¹・前原 潤²

(受付 2007 年 4 月 5 日; 改訂 2007 年 6 月 19 日)

要 旨

出生率, 死亡率, 世帯構成に関するいくつかの仮定と, 単純な結婚-出産モデルから, ある種の定常状態での世帯サイズごとの平均世帯数を求める. 時刻 t で, 男女の子供の対の中から, ランダムに選ばれた 1 対が, 時刻 $t+1$ で結婚し, その 2 人を両親として 4 人以下の子供から構成される新しい世帯を作る. 子供の数 k ($k=0, 1, 2, 3, 4$) は, 与えられた確率 a_k に従って決まり, その期待値は $2+\delta$ ($\delta \geq 0$) とする. 男女の性別は等確率で決まる. このとき, 子供のいる世帯のサイズ別の世帯数の比は一定となる, という定常状態での世帯サイズごとの平均世帯数を, a_k ($k=0, 1, 2, 3, 4$), δ, t の関数で推定する.

キーワード: 世帯数の分布, 結婚-出産モデル.

1. はじめに

世帯構成・世帯数などの世帯統計は行政や企業経営にとって有用で重要なデータである(大友, 2003)といわれる. 文化人類学者のハンメルと統計学者のワクターはコンピュータ・シミュレーションによって世帯形態を決定する人口学的要因について調べた(Hammel and Wachter, 1977). 人口や世帯数等の将来推計には, 状態間の推移確率行列を与えて推計する方法(国立社会保障・人口問題研究所, 2003), 世帯主率を仮定する世帯主率法(マイクロ・シミュレーションモデル)(国立社会保障・人口問題研究所, 2005; 稲垣, 2006)等がある.

このノートでは, いくつかの仮定と単純な“結婚-出産”モデルから, ある種の定常状態における世帯のサイズ(家族数)ごとの世帯数を推定するための公式を導く. 以下のことを仮定する.

- 1) 各世帯は両親とその子供たちからなる 2 世代世帯である.
- 2) 男女の出生比は 1 対 1 とする.
- 3) 合計特殊出生率は $2+\delta$ ($\delta \geq 0$), 死亡率は 0 とする. (合計特殊出生率とは, 1 人の女性が一生に生む子供の数の期待値のこと. 死亡率が正 (≤ 2) の場合も, 死亡は 2 人世帯から起こると仮定すれば, 以下の議論は殆ど変わらない.) さらに, 次の単純な“結婚-出産”モデルを想定する:
- 4) 時刻が 1 増すごとに新しい世帯が 1 つ誕生する. 時刻 t で, (兄妹, 姉弟でない) 男女の子供の対の中から, ランダムに選ばれた 1 対が, 時刻 $t+1$ で結婚し, その 2 人を両親として 4 人以下の子供から構成される新しい世帯を作る. 子供の数 $0 \sim 4$ 人は与えられた出生率の比 $a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ に従う乱数によって決まり, 男女の性別は等確率で決まる.

¹ 統計数理研究所: 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

² 琉球大学 教育学部: 〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町千原 1

以下、時刻 $t=0$ での子供の数は非常に大きいと仮定する。時刻 t での、サイズ(家族の人数)が r の世帯数を $n_r = n_r(t)$ で表す。ある時点以降、 t を大きく変えても、3人以上の世帯についての世帯数の比 $n_3:n_4:n_5:n_6$ がほとんど変化しないなら、世帯サイズの分布は、その時点で定常状態にあるという。各 $k=2,3,4$ について、すべての夫婦がちょうど k 人の子供を生むという特殊な場合には、 t が大きくなると、世帯サイズの分布は必ず定常状態に移行することがわかる(5節の命題1,2,3)。このような特殊な場合以外でも、いくつかのシミュレーションの結果は、時刻 t が大きいとき、世帯サイズ分布は定常状態になることを示している。

本論文の主な結果は次のものである：世帯サイズ分布が定常状態にあるとき、世帯数 $n_r(t)$ ($r=2,3,4,5,6$) は近似的に

$$\begin{aligned} n_6(t) &\approx \frac{a_4}{(8+\delta)a} (K(0) + \delta t) \\ n_5(t) &\approx \frac{(8+\delta)a_3 + 8a_4}{(6+\delta)(8+\delta)a} (K(0) + \delta t) \\ n_4(t) &\approx \frac{(6+\delta)(8+\delta)a_2 + 6(8+\delta)a_3 + 6 \cdot 8a_4}{(4+\delta)(6+\delta)(8+\delta)a} (K(0) + \delta t) \\ n_3(t) &\approx C_3(K(0) + \delta t) \\ n_2(t) &\approx \left(\frac{a_0}{a} + 2C_3\right)t + (\text{定数}) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $a = \sum_{i=0}^4 a_i$ 、 $K(0)$ は時刻 0 での子供の総数、

$$C_3 = \frac{(4+\delta)(6+\delta)(8+\delta)a_1 + 4(6+\delta)(8+\delta)a_2 + 4 \cdot 6(8+\delta)a_3 + 4 \cdot 6 \cdot 8a_4}{(2+\delta)(4+\delta)(6+\delta)(8+\delta)a}$$

である。この結果は6節で導かれる。

$\delta=0$ の場合には、定常状態では上の式で $\delta=0$ とおくと、 n_2 以外の比は

$$n_3:n_4:n_5:n_6 \approx \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{1} : \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2} : \frac{a_3 + a_4}{3} : \frac{a_4}{4}$$

という単純な式で表され、 $n_2(t) \approx (\text{定数}) + t$ となる。

注意 1. $\delta < 0$ 、つまり、合計特殊出生率が2より小さい場合は、明らかに、 t が大きくなるにつれて、子供の数 $K(t)$ はどんどん減って行く。

注意 2. $\delta=0$ で $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0, 0, 1, 0, 0)$ の場合は、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 \Pr (時刻 t_0 での“結婚可能な子供の数” $= 0) > \frac{1}{2} - \epsilon$ となるような時刻 t_0 が存在する。従って、この場合、4)のモデルが永続的に機能するとは限らない。

これは次のようにしてわかる。各時刻 t で2人の子供が親になり、平均して2人の子供を生む。従って、各時刻 $t=i$ での子供の数の増分を $\Delta(i)$ で表すと、 $\Delta(i)$, $i=1, 2, 3, \dots$ は同一分布に従う確率変数で、 $E(\Delta(i))=0$ である。また、その標準偏差 σ は0ではない。時刻0での子供の数を $K(0)$ とすると、時刻 t での子供の総数は $K(0) + \sum_{i=1}^t \Delta(i)$ で表される。時刻 t が大きくなる時、 $\frac{1}{t} \sum \Delta(i)$ は、平均0標準偏差 σ/\sqrt{t} の正規分布に近づき、 $(\frac{K(0)}{t})/(\frac{\sigma}{\sqrt{t}}) = K(0)/(\sqrt{t}\sigma) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であるから、 $\Pr(\sum \Delta(i) \leq -K(0)) = \Pr(\frac{1}{t} \sum \Delta(i) \leq \frac{-K(0)}{t}) \rightarrow \frac{1}{2}$ ($t \rightarrow \infty$) である。よって、上に述べたことが成立する。

2. 世帯の構成

時刻 t での r 人世帯で、 i 人の息子と $(r-i-2)$ 人の娘を持つ世帯の数を $n_r^i = n_r^i(t)$ で表す。

すると,

$$n_r = \sum_{i=0}^{r-2} n_r^i \quad (r=2, \dots, 6)$$

である. つまり, r 人世帯には $(r-1)$ 通りの家族構成が可能である. 例えば 6 人世帯 n_6 の可能な構成は, 両親および息子 4 人 (n_6^4), 息子 3 と娘 1 人 (n_6^3), 息子 2 と娘 2 人 (n_6^2), 息子 1 と娘 3 人 (n_6^1), 娘 4 人 (n_6^0) となる. 従って, 時刻 t における 6 人世帯 n_6 から 2 人世帯 n_2 までの家族構成は $1+2+3+4+5=15$ 通り存在する.

男女の出生比を 1 対 1 とすれば, 男の子の数はパラメータ $p=1/2$ の 2 項分布に従うから, 子供の総数が大きいと, 男女比はほぼ 1 : 1 となる. 以下, $n_r^i = n_r^{(r-i-2)}$ と仮定する. すると, $n_r^i = n_r \binom{r-2}{i} / 2^{r-2}$ となる. 例えば, $n_6^0 : n_6^1 : n_6^2 : n_6^3 : n_6^4 = 1 : 4 : 6 : 4 : 1$ であるから, $n_6^3 = (4/16)n_6$ となる.

3. 次世代の世帯数の変化

新しい世帯の両親となる 2 人(♂, ♀)の選び方は家族構成に従い, 次の 10 通りが考えられる.

- (a) ♂♀ともに 6 人世帯の子供
- (b) 一方は 6 人世帯の子供, 他方は 5 人世帯の子供
- (c) 一方は 6 人世帯の子供, 他方は 4 人世帯の子供
- (d) 一方は 6 人世帯の子供, 他方は 3 人世帯の子供
- (e) ♂♀ともに 5 人世帯の子供
- (f) 一方は 5 人世帯の子供, 他方は 4 人世帯の子供
- (g) 一方は 5 人世帯の子供, 他方は 3 人世帯の子供
- (h) ♂♀ともに 4 人世帯の子供
- (i) 一方は 4 人世帯の子供, 他方は 3 人世帯の子供
- (j) ♂♀ともに 3 人世帯の子供

(a) の 6 人世帯から新しく両親となる 2 人♂♀を選ぶ場合, 6 人世帯を息子の人数 $k=0, 1, 2, 3, 4$ で分類し, ♂は息子が 4 人いる世帯から, ♀は息子が 1 人いる世帯から出る場合などと場合分けして考えると, 全部で 16 通りの場合が生ずる. (b)~(j) の場合も同様に多数の場合を考えなければならぬ. 場合の数を数え, それぞれの場合に何通りあるかを計算して合計し, さらに, (各 n_r は十分大きいとして) n_r の 1 次の項を無視すると次のようになる.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------|---------|
| (a) ♂♀ともに 6 人世帯の子供: | $4n_6^2$ 通り | ① |
| (b) 一方は 6 人世帯の子供, 他方は 5 人世帯の子供: | $6n_6n_5$ 通り | ② |
| (c) 一方は 6 人世帯の子供, 他方は 4 人世帯の子供: | $4n_6n_4$ 通り | ③ |
| (d) 一方は 6 人世帯の子供, 他方は 3 人世帯の子供: | $2n_6n_3$ 通り | ④ |
| (e) ♂♀ともに 5 人世帯の子供: | $\frac{9}{4}n_5^2$ 通り | ⑤ |
| (f) 一方は 5 人世帯の子供, 他方は 4 人世帯の子供: | $3n_5n_4$ 通り | ⑥ |
| (g) 一方は 5 人世帯の子供, 他方は 3 人世帯の子供: | $\frac{3}{2}n_5n_3$ 通り | ⑦ |
| (h) ♂♀ともに 4 人世帯の子供: | n_4^2 通り | ⑧ |
| (i) 一方は 4 人世帯の子供, 他方は 3 人世帯の子供: | n_4n_3 通り | ⑨ |
| (j) ♂♀ともに 3 人世帯の子供: | $\frac{1}{4}n_3^2$ 通り | ⑩ |

子供 0 ~ 4 人の出生の比率を $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ とおき $a = \sum_{i=0}^4 a_i$ とする. 時刻 t から $t+1$ に移るときの r 人世帯の数の変化(差分)を Δn_r ($r=2, \dots, 6$) と記す. つまり, $\Delta n_r = n_r(t+1) - n_r(t)$

1) $-n_r(t)$ である。このとき、各 r, x について $\Pr(\Delta n_r = x)$ を計算し、時刻 t での各世帯数が $n_* = (n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ という条件の下での、差分 Δn_r の条件付期待値を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E(\Delta n_6 | n_*) &= \frac{a_4}{a} - \frac{2 \times \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}}{\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10}} \\ E(\Delta n_5 | n_*) &= \frac{a_3}{a} + \frac{2 \times \textcircled{1} + \textcircled{3} + \textcircled{4} - 2 \times \textcircled{5} - \textcircled{6} - \textcircled{7}}{\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10}} \\ E(\Delta n_4 | n_*) &= \frac{a_2}{a} + \frac{2 \times \textcircled{5} + \textcircled{2} + \textcircled{7} - 2 \times \textcircled{8} - \textcircled{3} - \textcircled{9}}{\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10}} \\ E(\Delta n_3 | n_*) &= \frac{a_1}{a} + \frac{2 \times \textcircled{8} + \textcircled{3} + \textcircled{6} - 2 \times \textcircled{10} - \textcircled{4} - \textcircled{7}}{\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10}} \\ E(\Delta n_2 | n_*) &= \frac{a_0}{a} + \frac{2 \times \textcircled{10} + \textcircled{4} + \textcircled{7} + \textcircled{9}}{\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10}} \end{aligned}$$

右辺を合計すると 1 になるから、全世帯数の平均増加率は 1、すなわち

$$\sum_{r=2}^6 E(\Delta n_r | n_*) = 1$$

であり、毎時刻新しい 1 世帯が誕生するという仮定に符合している。さらに、

$$\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10} = \left(\frac{n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6}{2} \right)^2$$

と因数分解することができる。時刻 t での子供の総数を $K = K(t)$ とすると、 $K = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6$ であるから、 $\textcircled{1} + \dots + \textcircled{10} = (K/2)^2$ となり、上の 5 つの式は、

$$(3.1) \quad E(\Delta n_6 | n_*) = \frac{a_4}{a} - \frac{8n_6}{K}$$

$$(3.2) \quad E(\Delta n_5 | n_*) = \frac{a_3}{a} + \frac{8n_6 - 6n_5}{K}$$

$$(3.3) \quad E(\Delta n_4 | n_*) = \frac{a_2}{a} + \frac{6n_5 - 4n_4}{K}$$

$$(3.4) \quad E(\Delta n_3 | n_*) = \frac{a_1}{a} + \frac{4n_4 - 2n_3}{K}$$

$$(3.5) \quad E(\Delta n_2 | n_*) = \frac{a_0}{a} + \frac{2n_3}{K}$$

となる。

4. シミュレーション

時刻 t におけるすべての世帯の構成を 15 次のベクトル

$$f(t) = (f_1^t, f_2^t, f_3^t, \dots, f_{15}^t) = (n_6^4, n_6^3, n_6^2, n_6^1, n_6^0, n_5^3, n_5^2, n_5^1, n_5^0, n_4^2, n_4^1, n_4^0, n_3^1, n_3^0, n_2)$$

で記述する。調べたいのは、世帯サイズごとの世帯数

$$n_* = (n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$$

である。時刻 0 で次世代の両親となる子供 2 人をランダムに選ぶ。その子供 2 人が属していた型の世帯数を f_i^0, f_j^0 とする。その子供 2 人が結婚して作る家族構成の型の世帯数を f_k^0 とする。 f_i^0 ,

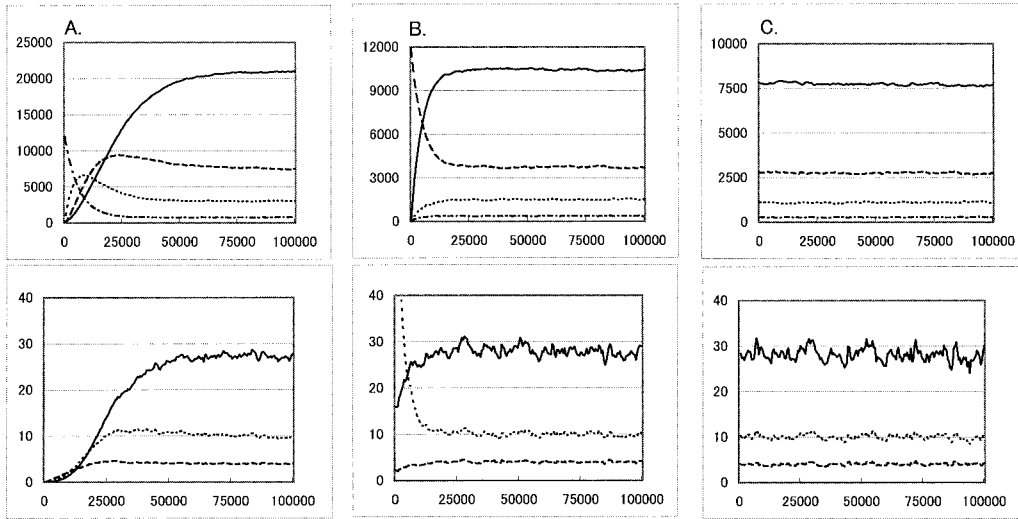


図 1. 異なる初期値から出発した場合の世帯数の変遷 (合計特殊出生率 2).

f_j^0 が 1 減少したときに、それぞれ f_i^0, f_j^0 が 1 ずつ増えるとする。ここで、 $i \neq 5, 9, 12, 14, 15, j \neq 1, 6, 10, 13, 15$ である。すると、次の時刻 1 では世帯の構成は次のように変化する。

$$\begin{aligned} f(1) &= (f_1^1, f_2^1, \dots, f_i^1, \dots, f_j^1, \dots, f_k^1, \dots, f_i^1, \dots, f_j^1, \dots, f_{15}^1) \\ &= (f_1^0, f_2^0, \dots, f_i^0 - 1, \dots, f_j^0 - 1, \dots, f_k^0 + 1, \dots, f_i^0 + 1, \dots, f_j^0 + 1, \dots, f_{15}^0). \end{aligned}$$

これを世帯の大きさにまとめて、

$$\begin{aligned} n_*(1) &= (n_2(1), n_3(1), n_4(1), n_5(1), n_6(1)) \\ &= \left(f_{15}^1, \sum_{i=13}^{14} f_i^1, \sum_{i=10}^{12} f_i^1, \sum_{i=6}^9 f_i^1, \sum_{i=1}^5 f_i^1 \right) \end{aligned}$$

となる。時刻 t までの $n_*(t)$ の変化をシミュレーションしてみる。

図 1 は $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 2, 2, 1)$ のとき、以下の A ~ C の 3 種類の初期値から出発した $n_*(0) \sim n_*(100000)$ を図示したものである。 $N = \sum_{i=1}^{15} f_i^0 = 12000$ としている。

- A. $f_3^0 = n_6^2(0) = N$, 他は 0,
- B. $f_{11}^0 = n_4^1(0) = N$, 他は 0,
- C. $f_3^0 = N/43, f_7^0 = f_8^0 = 2f_3^0, f_{11}^0 = 10f_3^0, f_{13}^0 = f_{14}^0 = 14f_3^0$, 他は 0. すなわち $(\frac{n_3(0)}{n_6(0)}, \frac{n_4(0)}{n_6(0)}, \frac{n_5(0)}{n_6(0)}) = (28, 10, 4)$ である。

図から t が大きいとき、世帯数 $n_*(t)$ は定常状態にあるように見える。 $n_*(t)$ のグラフが図 1 の上段で、下段のグラフは世帯数の比 $(\frac{n_3}{n_6}, \frac{n_4}{n_6}, \frac{n_5}{n_6})$ である。これは t が大きいとき、初期値の配分に関係なく一定値の周辺を分布することを示している。

5. 定常状態への移行

時刻 t での世帯数 $n_r = n_r(t)$ の平均を $\bar{n}_r = \bar{n}_r(t)$ で表す。 1 節で、世帯サイズの分布が定常

状態にあるとはどういうことかを簡単に述べたが、あらためて次のように定義する。 $t \rightarrow \infty$ のとき、比 $\bar{n}_3(t) : \bar{n}_4(t) : \bar{n}_5(t) : \bar{n}_6(t)$ が一定の比に収束する（つまり、 $\frac{\bar{n}_3(t)}{\bar{n}_6(t)}, \frac{\bar{n}_4(t)}{\bar{n}_6(t)}, \frac{\bar{n}_5(t)}{\bar{n}_6(t)}$ がそれぞれ定数に収束する）なら、世帯サイズの分布は定常状態に移行するという。シミュレーションで観察する場合には、ある時点以降、 t を大きく変えても比 $n_3(t) : n_4(t) : n_5(t) : n_6(t)$ がそれほど変動しなければ、その比は $\bar{n}_3(t) : \bar{n}_4(t) : \bar{n}_5(t) : \bar{n}_6(t)$ の極限の定数比にほぼ近いとみなし、世帯サイズの分布はその時点でほしい定常状態にあると考えることになる。

前節のシミュレーションの結果は、合計特殊出生率が2のとき、 t がある程度大きくなった状態で、世帯サイズの分布はほしい定常状態になることを示している。以下に述べる3つの命題は $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ の場合、世帯サイズの分布は $t \rightarrow \infty$ のとき、定常状態に移行することを示している。

命題 1. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 1, 0, 0)$ の場合：世帯サイズの分布は定常状態に移行し、定常状態での平均世帯数は、時刻0での子供の総数 K を用いて、

$$\bar{n}_*(t) \approx (\text{定数} + t, K/2, K/4, 0, 0)$$

と表される。

証明. $n_*(t) = (n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ とする。2人の子供が結婚して両親となり2人の子供を生むから、子供の総数 $K = K(t)$ は定数である。従って、 t が十分大きいとき $n_5 = n_6 = 0$ とみなしてよい。すると、(3.3)~(3.5)から

$$\begin{aligned} E(n_4(t+1) - n_4(t) | n_*(t)) &= 1 - \frac{4n_4(t)}{K} \\ E(n_3(t+1) - n_3(t) | n_*(t)) &= \frac{4n_4(t) - 2n_3(t)}{K} \\ E(n_2(t+1) - n_2(t) | n_*(t)) &= \frac{2n_3(t)}{K} \end{aligned}$$

で、 K は定数であるから、さらに $n_*(t)$ についての期待値をとると、漸化式

$$\begin{aligned} \bar{n}_4(t+1) - \bar{n}_4(t) &= 1 - \frac{4\bar{n}_4(t)}{K} \\ \bar{n}_3(t+1) - \bar{n}_3(t) &= \frac{4\bar{n}_4(t) - 2\bar{n}_3(t)}{K} \\ \bar{n}_2(t+1) - \bar{n}_2(t) &= \frac{2\bar{n}_3(t)}{K} \end{aligned}$$

が得られる。第1の式から、 $\bar{n}_4(t) = (\bar{n}_4(0) - \frac{K}{4}) \left(\frac{K-4}{K}\right)^t + K/4 = K/4 + o(1) (t \rightarrow \infty)$ となる。これを第2の漸化式に代入して解くと、 $\bar{n}_3(t) = K/2 + o(1) (t \rightarrow \infty)$ が得られる。ゆえに、世帯サイズの分布は定常状態に移行する。また、定常状態では、第3の漸化式から $\bar{n}_2(t) = (\text{定数}) + t$ となる。

命題 2. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 1, 0)$ の場合：世帯サイズの分布は定常状態に移行し、定常状態での平均世帯数は、 $\bar{n}_*(t) \approx (\frac{16t}{35}, \frac{8t}{35}, \frac{6t}{35}, \frac{t}{7}, 0)$ となる。

証明. 明らかに $K(t) = K(0) + t$ であり、 $\bar{n}_6 \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ である。以下、 $n_6(t) \equiv 0$ と仮定する。すると(3.2)~(3.5)から、

$$\begin{aligned} \bar{n}_5(t+1) - \bar{n}_5(t) &= 1 - \frac{6\bar{n}_5(t)}{K(0) + t} \\ \bar{n}_4(t+1) - \bar{n}_4(t) &= \frac{6\bar{n}_5(t) - 4\bar{n}_4(t)}{K(0) + t} \end{aligned}$$

$$\bar{n}_3(t+1) - \bar{n}_3(t) = \frac{4\bar{n}_4(t) - 2\bar{n}_3(t)}{K(0) + t}$$

$$\bar{n}_2(t+1) - \bar{n}_2(t) = \frac{2\bar{n}_3(t)}{K(0) + t}$$

が得られる. 第 1 の漸化式から, $\bar{n}_5(t) = t/7 + o(t)$ が得られる. これと第 2 の漸化式から, $\bar{n}_4(t) = \frac{6t}{35} + o(t)$ が得られる. さらに第 3 の漸化式から, $\bar{n}_3(t) = \frac{8t}{35} + o(t)$ となる. (これらの漸化式の解は Mathematica や Maple を用いて容易に求められる.) 従って世帯サイズの分布は定常状態に移行する. 定常状態では, 最後の漸化式から $\bar{n}_2(t) = \frac{16t}{35} + o(t)$ となり, $\bar{n}_*(t) \approx (\frac{16t}{35}, \frac{8t}{35}, \frac{6t}{35}, \frac{t}{7}, 0)$ となる.

命題 3. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0, 1)$ の場合: 世帯サイズの分布は定常状態に移行し, 定常状態での平均世帯数は $\bar{n}_*(t) \approx (\frac{t}{5}, \frac{t}{5}, \frac{t}{5}, \frac{t}{5})$ となる.

証明. この場合も, $K(t) = K(0) + 2t$ であるから, 命題 1, 2 と同様に, (3.1)~(3.5) から, $\bar{n}_r(t)$ に関する漸化式が得られ, これらを解いて, $\bar{n}_*(t) \approx (\frac{t}{5}, \frac{t}{5}, \frac{t}{5}, \frac{t}{5})$ が得られる.

次の例は, 出生数の分布が $(0, 0, 0, 1, 0)$ と $(0, 0, 0, 0, 1)$ および $(1, 1, 2, 4, 2)$ (従って, $\delta = 1, 2$ および 0.5 の場合) のシミュレーション結果を示している. $\delta = 1, 2$ の場合, 世帯数の比は命題 2, 3 の定数比に近づくことが見て取れる. $\delta = 0.5$ の場合も, 世帯サイズ分布は定常状態になることを示している.

例(図 2). 初期値を $n_2(0) = 0, \sum_{r=3}^6 n_r(0) = n_4^2(0) = 12000$ とする. 上段のグラフが世帯数 $n_*(t)$ を示し, 下段のグラフが世帯数の比 $(\frac{n_2(t)}{n_{k+2}(t)}, \dots, \frac{n_{k+1}(t)}{n_{k+2}(t)}), (k=3, 4)$ を示している.

- A. 平均出生数 3, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 1, 0), t = 0, \dots, 2000000$: $n_*(t)$ の分布は t が大きいところでは単調増加, $t = 2000000$ のとき $(\frac{n_2(t)}{n_5(t)}, \frac{n_3(t)}{n_5(t)}, \frac{n_4(t)}{n_5(t)}) \approx (3.155, 1.60, 1.20)$ となる. この比は命題 2 で得られた比とほぼ一致している.

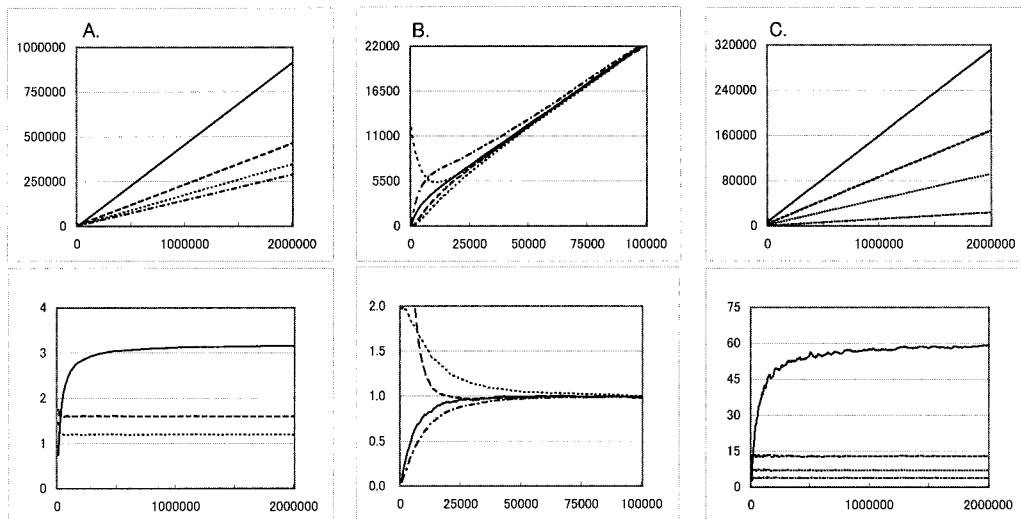


図 2. 合計特殊出生率が 3, 4 および 2.5 の場合の世帯数の変遷.

- B. 平均出生数 4, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0, 1), t = 0, \dots, 100000 : n_*(t)$ の分布は t が大きいところでは単調増加で, $t = 100000$ のとき, $(\frac{n_2(t)}{n_6(t)}, \frac{n_3(t)}{n_6(t)}, \frac{n_4(t)}{n_6(t)}, \frac{n_5(t)}{n_6(t)}) \approx (0.98, 1.00, 0.99, 0.98)$ である. この比は命題 3 で得られた比とほぼ一致している.
- C. $\delta = 0.5, (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 4, 2), t = 0, \dots, 2000000$ のとき, $n_*(t)$ の分布は定常状態に近づき, $(\frac{n_2}{n_6}, \frac{n_3}{n_6}, \frac{n_4}{n_6}, \frac{n_5}{n_6}) \approx (59.02, 12.99, 7.05, 3.85)$ となる.

6. 定常状態における平均世帯数

合計特殊出生率を $2 + \delta$ ($\delta \geq 0$) とし, 人数別の出生比率を $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ とする. 出生比率が $(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ などの(出生について deterministic な)場合には, 世帯サイズ分布は定常状態に移行することがわかった. そのほかの場合も, いくつかのシミュレーションの結果(図 1 の A, B, C および図 2 の C)は, t が大きいとき世帯サイズ分布がだいたい定常状態になることを示している.

以下, 世帯サイズ分布が定常状態にあるとしたときの平均世帯数(の推定値)を求めよう. 一般の場合は, 子供の総数 $K(t)$ と各世帯数 $n_r(t)$ が独立な確率変数とはならないので, 命題 1, 2, 3 のようにして(3.1)~(3.5)から $\bar{n}_r(t)$ についての漸化式を導くことはできない. そこで, $E(\frac{n_r(t)}{K(t)})$ の代わりに $\bar{n}_r(t)/\bar{K}(t)$ を用いることにする. $\bar{n}_r(t+1) - \bar{n}_r(t) = E(\Delta n_r(t))$ であり, 定常状態では

$$\bar{n}_3(t+1) : \bar{n}_4(t+1) : \bar{n}_5(t+1) : \bar{n}_6(t+1) = \bar{n}_3(t) : \bar{n}_4(t) : \bar{n}_5(t) : \bar{n}_6(t)$$

である. よって, ある定数 ε を用いて $E(\Delta n_r(t)) = \varepsilon \bar{n}_r(t)$ ($r = 3, 4, 5, 6$) とおくことができる. 一方, $\bar{K}(t+1) = \bar{K}(t) + \delta$ で, $K(t) = n_3(t) + 2n_4(t) + 3n_5(t) + 4n_6(t)$ であるから, $E(\Delta n_3(t)) + 2E(\Delta n_4(t)) + 3E(\Delta n_5(t)) + 4E(\Delta n_6(t)) = \delta$ である. 従って, $\varepsilon(\bar{n}_3(t) + 2\bar{n}_4(t) + 3\bar{n}_5(t) + 4\bar{n}_6(t)) = \delta$ となる. $\bar{n}_3(t) + 2\bar{n}_4(t) + 3\bar{n}_5(t) + 4\bar{n}_6(t) = \bar{K}(t)$ であるから, $\varepsilon = \delta/\bar{K}(t)$ が得られる. すると, (3.1)~(3.4)から $E(\frac{n_r(t)}{K(t)})$ の代わりに $\bar{n}_r(t)/\bar{K}(t)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{a_4}{a} - \frac{8\bar{n}_6(t)}{\bar{K}(t)} &= \frac{\delta\bar{n}_6(t)}{\bar{K}(t)} \\ \frac{a_3}{a} + \frac{8\bar{n}_6(t) - 6\bar{n}_5(t)}{\bar{K}(t)} &= \frac{\delta\bar{n}_5(t)}{\bar{K}(t)} \\ \frac{a_2}{a} + \frac{6\bar{n}_5(t) - 4\bar{n}_4(t)}{\bar{K}(t)} &= \frac{\delta\bar{n}_4(t)}{\bar{K}(t)} \\ \frac{a_1}{a} + \frac{4\bar{n}_4(t) - 2\bar{n}_3(t)}{\bar{K}(t)} &= \frac{\delta\bar{n}_3(t)}{\bar{K}(t)} \end{aligned}$$

となり, (3.5)からは

$$E(\Delta n_2(t)) = \frac{a_0}{a} + \frac{2\bar{n}_3(t)}{\bar{K}(t)}$$

が得られる. ゆえに,

$$(6.1) \quad \bar{n}_6(t) = \frac{a_4}{(8+\delta)a} \bar{K}(t)$$

$$(6.2) \quad \bar{n}_5(t) = \frac{(8+\delta)a_3 + 8a_4}{(6+\delta)(8+\delta)a} \bar{K}(t)$$

$$(6.3) \quad \bar{n}_4(t) = \frac{(6+\delta)(8+\delta)a_2 + 6(8+\delta)a_3 + 6 \cdot 8a_4}{(4+\delta)(6+\delta)(8+\delta)a} \bar{K}(t)$$

$$(6.4) \quad \bar{n}_3(t) = C_3 \bar{K}(t)$$

$$(6.5) \quad \bar{n}_2(t) = \left(\frac{a_0}{a} + 2C_3 \right) t + o(t)$$

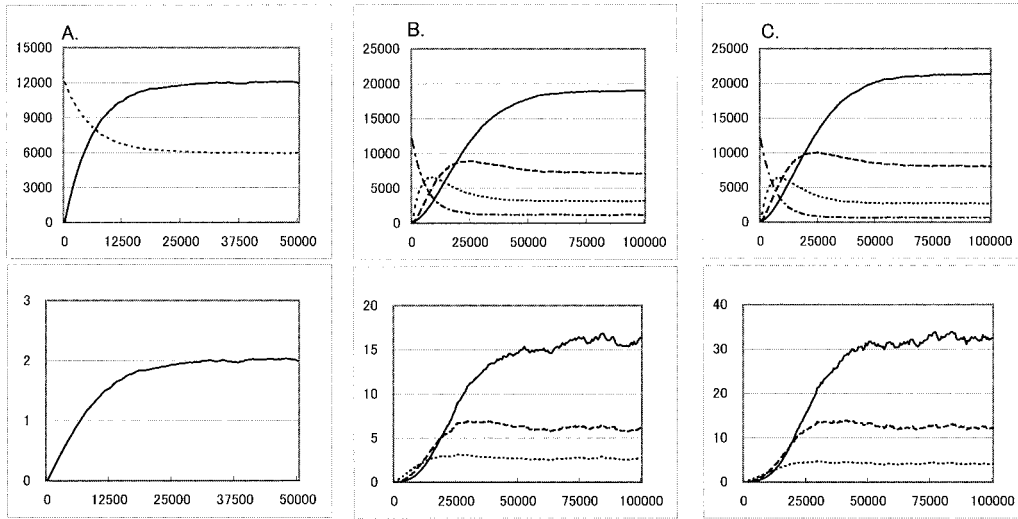


図 3. 出生比が異なる場合の世帯数の変遷 (合計特殊出生率 2).

となる. ここで,

$$C_3 = \frac{(4 + \delta)(6 + \delta)(8 + \delta)a_1 + 4(6 + \delta)(8 + \delta)a_2 + 4 \cdot 6(8 + \delta)a_3 + 4 \cdot 6 \cdot 8a_4}{(2 + \delta)(4 + \delta)(6 + \delta)(8 + \delta)a}$$

である. 合計特殊出生率は $2 + \delta$ であるから, $\bar{K}(t) = K(0) + \delta t$ である.

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ の場合を調べてみると, (6.1)~(6.5) は確かに命題 1, 2, 3 で得られた $n_*(t)$ に一致することがわかる. また, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 4, 2)$ の場合 $\delta = 0.5$ となるから, (6.1)~(6.5) から比を計算すると $(\frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_6}, \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_6}, \frac{\bar{n}_4}{\bar{n}_6}, \frac{\bar{n}_5}{\bar{n}_6}) \approx (60.21, 12.93, 7.02, 3.85)$ となるが, これは図 2 の C のシミュレーションで得られた比 $(59.02, 12.99, 7.05, 3.85)$ とだいたい適合している.

特に $\delta = 0$ の場合は, (6.1)~(6.5) から \bar{n}_2 以外の比について

$$(6.6) \quad \bar{n}_3 : \bar{n}_4 : \bar{n}_5 : \bar{n}_6 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{1} : \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2} : \frac{a_3 + a_4}{3} : \frac{a_4}{4}$$

という単純な式が得られる. 次のシミュレーションの結果は, 時刻 0 での子供の数が非常に大きければ, $\delta = 0$ の場合, t がある程度大きくなると, (6.6) に示すような定常状態になることを示している.

例 (図 3). 合計特殊出生率を 2 とする. 0~4 人の子供の出生の比率 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ が次の 3 通りの場合について, シミュレーションによる $n_*(t) = (n_2(t), \dots, n_6(t))$ と, (6.6) の右辺の比を比較してみた. 初期値を $n_2(0) = 0, \sum_{r=3}^6 n_r(0) = n_6^2(0) = 12000$ とし, 上側に世帯数 $n_*(t)$, 下側に世帯数の比 $(\frac{n_3(t)}{n_6(t)}, \frac{n_4(t)}{n_6(t)}, \frac{n_5(t)}{n_6(t)})$, $t = 0, \dots, 100000$, を図示してある.

- A. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 1, 0, 0)$ のとき: n_* は $(t, 2u, u, 0, 0)$ の周辺に分布していて, (6.6) の比に一致する.
- B. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1, 1, 1)$ のとき: n_* は $(t, 16u, 6u, \frac{8}{3}u, u)$ の周辺に分布し, (6.6) の比に一致する.
- C. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 3, 2, 1)$ のとき: n_* は $(t, 32u, 12u, 4u, u)$ の周辺に分布し, やはり

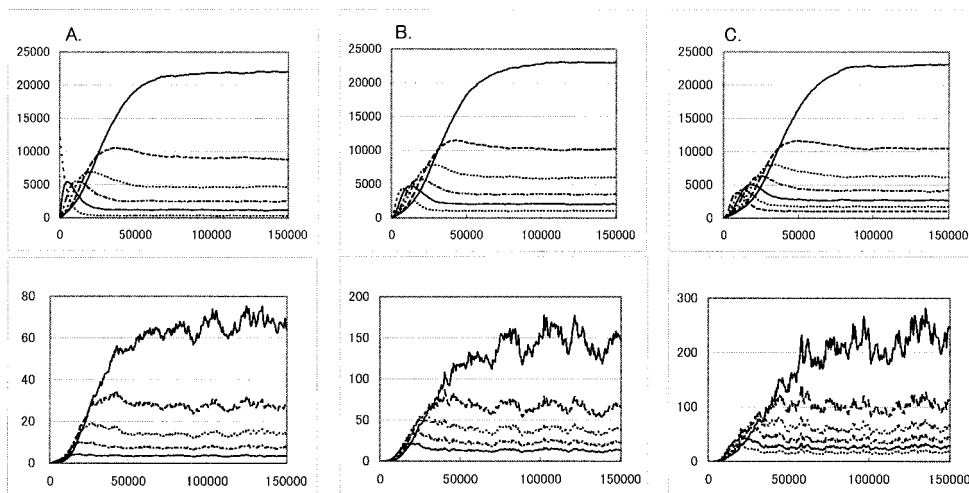


図 4. 出生数の上限が 5 以上の場合の世帯数の変遷 (合計特殊出生率 2).

(6.6) の比に一致する.

7. 出生数の上限が 5 以上の場合

出生数の上限 k が 5 以上の場合でも, 同様なモデルを考えることができ, 世帯サイズ分布は t が大きくなる時定常状態になると考えられるが, 確率の計算などが複雑になることが予想されるので, 特別な場合のシミュレーションを行うにとどめた. 以下のシミュレーションは $\delta=0$ で子供の出生数を $0\sim 6$, $0\sim 8$, $0\sim 10$ 人と変化させた場合を扱っている. これらのシミュレーションの結果は, (6.6) と類似な式

$$(7.1) \quad \bar{n}_3 : \bar{n}_4 : \bar{n}_5 : \cdots : \bar{n}_{k+2} \\ \approx \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{1} : \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k}{2} : \cdots : \frac{a_{k-1} + a_k}{k-1} : \frac{a_k}{k}$$

が成り立つことを確信させる. 従って, $\delta > 0$, $k \geq 5$ の場合も (6.1) ~ (6.5) に類似な推定が可能であろうと予想できる.

例 (図 4). 合計特殊出生率を 2 とする. $0\sim k$ 人 ($k=6, 8, 10$) の子供の出生の比率 (a_0, a_1, \dots, a_k) を次のように A, B, C とした場合の $n_*(t) = (n_2(t), \dots, n_{k+2}(t))$ の分布をシミュレーションによって求める. いずれの場合も初期値を $n_2(0) = 0$, $n_{k+2}^{k/2}(0) = \sum_{r=3}^{k+2} n_r(0) = 12000$ とする. 上段のグラフが世帯数 $n_*(t)$ を示し, 下段のグラフが世帯数の比 $(\frac{n_3(t)}{n_{k+2}(t)}, \dots, \frac{n_{k+1}(t)}{n_{k+2}(t)})$, $t=0, \dots, 150000$, を示している. 但し, 0 に近い比の図示は一部省略した.

- $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$ のとき: $n_*(t)$ は $(t, 66u, 27u, 14u, \frac{15}{2}u, \frac{18}{5}u, u)$ の周辺に分布し, 比 $n_3 : n_4 : \cdots : n_6$ は (7.1) の比に一致する.
- $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ のとき: $n_*(t)$ は $(t, 144u, 64u, \frac{112}{3}u, 22u, \frac{64}{5}u, \frac{20}{3}u, \frac{24}{7}u, u)$ の周辺に分布し, 比 $n_3 : n_4 : \cdots : n_8$ は (7.1) の比に一致する.
- $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}) = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$ のとき: $n_*(t)$ は $(t, 220u, 100u, 60u, 40u, 26u, \frac{50}{3}u, 10u, \frac{25}{4}u, \frac{10}{3}u, u)$ の周辺に分布し, 比 $n_3 : n_4 : \cdots : n_{10}$ は (7.1) の比

にほぼ一致する。

謝 辞

原稿を丁寧に読んで、貴重なコメント、ご意見を下さったレフリーに感謝いたします。そのおかげで、この論文は大きく改良できました。

参 考 文 献

- 大友 篤(2003). 『人口でみる世界：各国人口の規模と構造』, 古今書院, 東京.
- Hammel, E. A. and Wachter, K. W. (1977). Primonuptiality and ultimontiality: Their effects on stem-family household frequencies, *Population Patterns in Past* (ed. R. D. Lee), 113-134, Academic Press, New York.
- 国立社会保障・人口問題研究所 編(2003). 日本の世帯数の将来推計(全国推計): 2000年～2025年, 人口問題研究資料, 第308号.
- 国立社会保障・人口問題研究所 編(2005). 日本の世帯数の将来推計(都道府県別推計): 2000年～2025年, 人口問題研究資料, 第312号.
- 稲垣誠一(2006). 結婚・出産・離家の将来推計: 若年フリーター増加の影響, ISM フォーラム資料.

On the Transition of Household-size Distributions

Sumie Ueda¹ and Hiroshi Maehara²¹The Institute of Statistical Mathematics²College of Education, University of the Ryukyus

Suppose that each household consists of parents and their children. We assume the following simple “Marriage-delivery” model: At time t , a boy and a girl are chosen at random from all children as a couple, and at time $t + 1$, they marry, have k new children with probability a_k , and make a new household of size $r = k + 2$, where $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Let $\bar{n}_r(t)$ denote the mean number of households of size $r (\geq 2)$. Furthermore, suppose that the birth rates of male and female are equal, the expected value of k is equal to $2 + \delta (\delta \geq 0)$, and no child dies and no parents die until their children are all married. Under these assumptions, the household-size distribution is said to be in steady state if the ratio $\bar{n}_3(t) : \bar{n}_4(t) : \bar{n}_5(t) : \bar{n}_6(t)$ is approximately constant. We estimate each $\bar{n}_r(t)$ in steady state, in terms of $a_k (k = 0, 1, 2, 3, 4)$, δ and t .