統計数理(2009)
第 57 巻 第 1 号 83–95

特集「確率過程の統計解析」
［研究ノート］

拡散過程のノンパラメトリック適合度検定

西山 陽一[†]

（受付 2008 年 6 月 26 日；改訂 2008 年 9 月 29 日）

要　　旨

独立同一分布に従う確率変数列に対する適合度検定問題を考えるとき，Kolmogorov-Smirnov 検定統計量が漸近的に分布不変であることはよく知られている．ところが，拡散過程モデルにおいて，例えばエルゴード性を仮定してその不変分布の経験分布関数から Kolmogorov-Smirnov 型の検定統計量を構成しても，漸近的分布不変にはならない．本稿では，この問題に対し，score marked empirical process に基づく新しいアプローチを用いて漸近的分布不変な検定統計量を構成し，かつそれが一致性をもつことを紹介する．モデルとしては小拡散過程とエルゴード的拡散過程を扱い，また連続観測・離散観測の双方を考察するので，合計 4 通りの場合を調べ尽くす．同時期に提案された Dachian and Kutoyants (2008) の結果にも触れる．

キーワード： 拡散過程，適合度検定，漸近的分布不変，Donsker の不変原理，マルチンゲール，確率場．

1. 序

適合度検定の復習から始めよう．$X_1, X_2, ..., X_n$ を共通の連続分布 F をもつ i.i.d. 確率変数列とする．経験分布関数を

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{X_i \le x\}$$

によって定義する．帰無仮説 $F = F_0$ のもとでの適合度検定統計量として，有名なものは

$$D_n = \sqrt{n}\sup_x |\widehat{F}_n(x) - F_0(x)| \quad \text{(Kolmogorov-Smirnov)}$$

$$W_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}_n(x) - F_0(x)|^2 dF_0(x) \quad \text{(Cramér-von Mises)}$$

である．その極限分布を求める試みは，歴史的には直接的な計算によるアプローチが先行したが，Doob (1949) の示唆に触発された Donsker (1952) が汎関数の意味での中心極限定理を経由する見通しのよいアプローチで，それぞれ

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_t^\circ| \quad \text{および} \quad \int_0^1 |B_t^\circ|^2 dt$$

に分布収束することを示した．ただし $t \rightsquigarrow B_t^\circ$ は標準 Brown 橋である．重要なのは極限が真の分布 F_0 に依存しない（つまり漸近的に分布不変である）ことであり，その本質は

(1.1)　　確率過程 $x \rightsquigarrow \sqrt{n}(\widehat{F}_n(x) - F_0(x))$ が, 確率過程 $x \rightsquigarrow B^\circ_{F_0(x)}$ に弱収束する

[†] 統計数理研究所：〒106–8569 東京都港区南麻布 4–6–7

という事実に由来する．

さて，確率微分方程式

$$X_t = X_0 + \int_0^t S(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

を考えよう．ここに $t \rightsquigarrow W_t$ は標準 Wiener 過程である．この解がエルゴード的な拡散過程であるとし，その不変分布を $F_{S,\sigma}$ とする．その自然な推定量は

$$\widehat{F}_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T 1\{X_t \le x\}dt$$

である．事実，$\sqrt{T}(\widehat{F}_T - F_{S,\sigma})$ は，ある平均ゼロの正規確率場に弱収束する(Negri, 1998)．ところが，その共分散は

$$4\boldsymbol{E}_{S,\sigma}\left(\frac{[F(\xi\wedge x) - F(\xi)F(x)][F(\xi\wedge y) - F(\xi)F(y)]}{\sigma(\xi)^2 f(\xi)^2}\right)$$

となる．ただし $F = F_{S,\sigma}$，$f(x) = dF_{S,\sigma}(x)/dx$ と記し，ξ は不変分布に従う確率変数である．従って，(1.1)のようなことは成り立たず，Kolmogorov-Smirnov や Cramér-von Mises 型の統計量は漸近的にも分布不変にはならない．Kutoyants (2004)はその 5.4 節でこの事実に触れ，さらなる研究が必要であると結んでいる．事実，彼はその後も研究を続け，Dachian and Kutoyants (2008)を著した．この他にも未完成の原稿があるそうであるが，それは入手できなかった．

本稿では，主として Ilia Negri 博士(Kutoyants 教授の元弟子)とともに行った Kutoyants 教授とは異なるアプローチによる適合度検定の研究を紹介する．より具体的には，ドリフト係数 $S = S_0$ の適合度検定をノンパラメトリックな手法で行う．すなわち $\{S(\cdot,\theta);\theta\in\Theta\}$ などとパラメタライズして構造を特定化することなく，一般的な「任意の」対立仮説 $S \neq S_0$ に対応できる理論を展開する．我々はイノヴェーション・マルチンゲール残差に注目したアプローチをとるため，極限は標準 Brown 橋ではなく標準 Brown 運動になる．また，連続的観測のみならず，離散的観測の場合も考察する．2.1 節で小拡散過程・連続観測，2.2 節で小拡散過程・離散観測(Negri and Nishiyama, 2007)，3.1 節でエルゴード的拡散過程・連続観測(Negri and Nishiyama, 2006)，3.2 節でエルゴード的拡散過程・離散観測(Masuda et al., 2008)をそれぞれ扱う．4 節では Dachian and Kutoyants (2008)の結果を紹介する．5 節(付録)では連続マルチンゲール確率場の弱収束に関する Nishiyama (1999, 2000)の理論を手短に紹介する．これは 3 節の結果を導くために使われる．

いくつかの約束を書いてこの節を終える．$C_\rho(T)$ は距離空間 (T,ρ) の上で定義された連続関数全体を表す．$\ell^\infty(T)$ は集合 T の上で定義された有界関数全体を表す．これらの空間には一様距離を入れる．記号 "$\to^p$" および "$\to^d$" によってそれぞれ確率収束および分布収束(弱収束)を表す．$\ell^\infty(T)$ 空間上の弱収束の理論については例えば van der Vaart and Wellner (1996)を参照されたい．記号 "$=^d$" は分布が等しいことを意味する．

2. 小拡散過程

この節では，1 次元の確率微分方程式

$$X_t = x_0 + \int_0^t S(X_s)ds + \varepsilon\int_0^t \sigma(X_s)dW_s, \quad t\in[0,T] \tag{2.1}$$

を考える．ただし S および σ は後に述べるいくつかの性質を満たす関数であり，$t \rightsquigarrow W_t$ は標準 Wiener 過程である．$T>0$ は固定された時刻であり，$\varepsilon\downarrow 0$ とするときの漸近理論を展開

する．より具体的には，拡散係数 σ^2 を未知の攪乱関数とし，ドリフト係数 S の適合度検定問題を考える．

関数 (S,σ) には次の仮定を置く．

A1. ある定数 $C>0$ が存在して

$$|S(x)-S(y)|\le C|x-y|, \quad |\sigma(x)-\sigma(y)|\le C|x-y|.$$

ここで，常微分方程式

$$\frac{dx_t^S}{dt}=S(x_t^S)$$

の初期値 $x_0^S=x_0$ を与えたもとでの解を $x^S=\{x_t^S;t\in[0,T]\}$ と表すことにして，次の仮定を置く．

A2. $\Sigma_{S,\sigma}:=\sqrt{\int_0^T\sigma(x_t^S)^2dt}>0.$

帰無仮説

$H_0:S=S_0$

に対する対立仮説として

$H_1:S\in\mathcal{S}$

をとる．ここに $\mathcal{S}$ は A1-A2 および

$$\int_0^{u_S}(S(x_t^S)-S_0(x_t^S))dt\neq 0 \quad \text{for some } u_S\in[0,T] \tag{2.2}$$

を満たす関数の全体を表す．

2.1 連続観測の場合

我々の検定統計量は，確率場

$$V^\varepsilon(u)=\varepsilon^{-1}\int_0^u[dX_s-S_0(X_s)ds]$$

に基づく．

定理 2.1. 帰無仮説 H_0 のもとで，$V^\varepsilon\to^d G$ in $C[0,T]$．ただし $G=\{G(u);u\in[0,T]\}$ は平均ゼロの正規過程であって共分散が

$$EG(u)G(v)=\int_0^{u\wedge v}\sigma(x_t^{S_0})^2dt$$

であるものとする．

証明. $V^\varepsilon(u)=\int_0^u\sigma(X_t)dW_t$ に対してマルチンゲール中心極限定理を用いればよい．すなわち，X は陰に ε に依存し，Gronwall の不等式によって $\sup_{t\in[0,T]}|X_t-x_t^{S_0}|\to 0$ almost surely であることから

$$\left\langle\int_0^\cdot\sigma(X_t)dW_t\right\rangle_u=\int_0^u\sigma(X_t)^2dt\to^p\int_0^u\sigma(x_t^{S_0})^2dt$$

となる．あるいは，直接

$$\sup_{u\in[0,T]}\left|\int_0^u\sigma(X_t)dW_t-\int_0^u\sigma(x_t^{S_0})dW_t\right|\to^p 0$$

を示すこともできる．□

この結果と連続写像定理を用いることにより，漸近的に分布不変な検定統計量を得ることができるが，ここから先は以下に述べる離散観測の場合と同様であるから省略する．

2.2 離散観測の場合

この小節では，データは次のように得られるものとする．

サンプリング・スキーム：確率過程 $X=\{X_t; t\in[0,T]\}$ が観測される時刻 $0=t_0^\varepsilon<t_1^\varepsilon<\cdots<t_{n(\varepsilon)}^\varepsilon=T$ は $h_\varepsilon=o(\varepsilon^2)$ as $\varepsilon\downarrow 0$ を満たす．ただし $h_\varepsilon=\max_{1\le i\le n(\varepsilon)}|t_i^\varepsilon-t_{i-1}^\varepsilon|$ とする．

我々の検定統計量は，確率場

$$U^\varepsilon(u)=\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}1_{[0,u]}(t_i^\varepsilon)[X_{t_i^\varepsilon}-X_{t_{i-1}^\varepsilon}-S_0(X_{t_{i-1}^\varepsilon})|t_i^\varepsilon-t_{i-1}^\varepsilon|]$$

に基づく．このとき，以下の事実を得る．証明は略すが，この補題こそが本節の核心部分である．

補題 2.2. $\sup_{u\in[0,T]}|U^\varepsilon(u)-V^\varepsilon(u)|\to^p 0$.

証明. Negri and Nishiyama (2007) を見よ．□

従って，次の定理が成り立つ．

定理 2.3. 帰無仮説 H_0 のもとで，$U^n\to^d G$ in $\ell^\infty[0,T]$．ただし G は定理 2.1 で現れる確率過程である．

連続写像定理により，次の系を得る．

系 2.4. $\sup_{u\in[0,T]}|U^\varepsilon(u)|\to^d \sup_{t\in[0,\Sigma^2_{S_0,\sigma}]}|B_t| =^d \Sigma_{S_0,\sigma}\sup_{t\in[0,1]}|B_t|$．ただし $t\rightsquigarrow B_t$ は標準 Brown 運動である．

漸近的に分布不変な検定統計量を得るためには $\Sigma_{S_0,\sigma}$ の一致推定量が必要である．次の補題はその解答を与える．

補題 2.5. 任意の (S,σ) に対し

$$\widehat{\Sigma}^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}|X_{t_i^\varepsilon}-X_{t_{i-1}^\varepsilon}|^2}$$

は $\Sigma_{S,\sigma}$ の一致推定量である．

証明. Negri and Nishiyama (2007) を見よ．□

これらの結果をあわせて，次の主定理を得る．

定理 2.6. $H_0: S=S_0$ のもとで，

$$\frac{\sup_{u\in[0,T]}|U^\varepsilon(u)|}{\widehat{\Sigma}^\varepsilon}\to^d \sup_{t\in[0,1]}|B_t|.$$

この検定統計量において ε の値は分母・分子でキャンセルされることに注意しよう．この事実は実用上重要である．すなわち，i.i.d. データの時のサンプルサイズ n と違い，微小係数 ε (i.i.d. のときの $n^{-1/2}$ に対応する) の値は拡散過程のデータを見ただけではわからない．よって，提案する統計量の計算のときに ε の値を使うことは望ましくない．我々の検定統計量の場

合，分母・分子の数学的解析をする証明の中においては ε は現れるものの，統計家が実際に統計量を計算するときにおいては ε のことは忘れてよい．つまり ε が小さい値であると想定される状況でありさえすれば，ε の値を知ることなく検定が可能なのである．

さて，検定の一致性を議論しよう．関数 S_0 は帰無仮説としていままでに与えられたようなものであるとし，固定する．次の表現 $U^\varepsilon = U_S^\varepsilon + U_\Delta^\varepsilon$,

$$U_S^\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} 1_{[0,u]}(t_i^\varepsilon)[X_{t_i^\varepsilon} - X_{t_{i-1}^\varepsilon} - S(X_{t_{i-1}^\varepsilon})|t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon|],$$

$$U_\Delta^\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} 1_{[0,u]}(t_i^\varepsilon)(S(X_{t_{i-1}^\varepsilon}) - S_0(X_{t_{i-1}^\varepsilon}))|t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon|$$

ができる．従って

$$\sup_{u\in[0,T]}|U^\varepsilon(u)| \geq \sup_{u\in[0,T]}|U_\Delta^\varepsilon(u)| - \sup_{u\in[0,T]}|U_S^\varepsilon(u)|.$$

ところで S は A1-A2 を満たすので，対立仮説のもとで S_0 を S に置き換えて定理 2.3 と同じ議論を繰り返すことにより U_S^ε がある正規確率場に弱収束することが従う．よって右辺の第 2 項は $O_P(1)$ である．第 1 項については，次の主張が成り立つ．

補題 2.7. $u_S \in [0,T]$ を (2.2) におけるものとするとき， $|U_\Delta^\varepsilon(u_S)| \neq O_P(1)$.

証明. Negri and Nishiyama (2007) を見よ．□

よって：

定理 2.8. $H_1 : S \in \mathcal{S}$ のもとで,

$$\frac{\sup_{u\in[0,T]}|U^\varepsilon(u)|}{\widehat{\Sigma}^\varepsilon} \neq O_P(1).$$

3. エルゴード的拡散過程

本節では，1 次元の確率微分方程式

$$X_t = X_0 + \int_0^t S(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s \tag{3.1}$$

を考える．ただし初期値 X_0 は確率 1 で有限な確率変数であり，S と σ は後に述べるある性質を満たす関数であり，$t \rightsquigarrow W_t$ は標準 Wiener 過程である．我々は一意的な強い解 X が存在する状況を考える．さらに X がエルゴード的であること，すなわち不変測度 $\mu_{S,\sigma}$ が存在して任意の可積分関数 h に対し

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(X_t)dt \to \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mu_{S,\sigma}(dx) \quad \text{almost surely}$$

が成り立つことを仮定する．拡散係数 σ^2 は未知の撹乱関数であるとし，ドリフト係数 S の適合度検定問題を考える．

次の 2 つの仮定は，連続観測・離散観測の両方において常に要請する．

B1. ある定数 $C > 0$ が存在して

$$|S(x) - S(y)| \leq C|x-y|, \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C|x-y|.$$

B2. 拡散過程 X は正則であり，スピード測度 $m_{S,\sigma}$ は有限で 2 次のモーメントをもつ．

このとき拡散過程 X はエルゴード的であり，不変測度 $f_{S,\sigma}(x)dx = m_{S,\sigma}(dx)/m_{S,\sigma}((-\infty,\infty))$ をもつ．以下の議論では Nishiyama (1999, 2000) による弱収束理論（付録参照）を用いるので，その準備をしよう．不変密度 $f_{S,\sigma}$ を用いて $[-\infty,\infty]$ 上の距離

$$\rho_{S,\sigma}(x,y) = \sqrt{\int_{x\wedge y}^{x\vee y}(\sigma(z)^2 f_{S,\sigma}(z) + \phi(z))dz} \tag{3.2}$$

を導入する．ただし ϕ は標準正規分布の密度関数である．ϕ がなければ，この $\rho_{S,\sigma}$ は距離を定義せず擬距離に過ぎないかもしれない．以下で使う弱収束理論は ρ が距離であることを要請するので，正規密度 ϕ を加えたのである．空間 $[-\infty,\infty]$ がコンパクトでメトリック・エントロピー条件

$$\int_0^1 \sqrt{\log N([-\infty,\infty],\rho_{S,\sigma};\varepsilon)}d\varepsilon < \infty$$

を満たすことは容易にわかる．ただし，距離空間 (T,ρ) が与えられたとき，$N(T,\rho;\varepsilon)$ は T を ρ-半径 ε の閉球で被覆するときに必要となる最小個数を表す．

3.1 連続観測の場合

我々の検定統計量は確率場

$$V^n(x) = \frac{1}{\sqrt{t_n^n}}\int_0^{t_n^n} 1_{(-\infty,x]}(X_t)[dX_t - S_0(X_t)dt]$$

に基づく．我々はこれを *score marked empirical process* と呼ぶ．

定理 3.1. 定義 (3.2) を思い出して，$\rho = \rho_{S_0,\sigma}$ と書く．このとき，帰無仮説 H_0 のもとで，$V^n \to^d G$ in $C_\rho[-\infty,\infty]$．ただし $G = \{G(x); x \in [-\infty,\infty]\}$ は平均ゼロの正規過程であって共分散が

$$EG(u)G(v) = \int_{-\infty}^{u\wedge v} \sigma(x)^2 f_{S,\sigma}(x)dx$$

であるものとする．

証明． 補題 5.1 を連続マルチンゲールの族 $M^n = \{M^{n,x}; x \in [-\infty,\infty]\}$，

$$M_t^{n,x} = \frac{1}{\sqrt{t_n^n}}\int_0^t 1_{(-\infty,x]}(X_s)\sigma(X_s)dW_s$$

に適用する．メトリック・エントロピー条件が成り立つことはすでに触れた．適合 quadratic modulus は

$$\begin{aligned}\left|||M^n||_{\rho,t_n^n}^*\right|^2 &\le \sup_{x<y}\frac{(t_n^n)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}1_{(x,y]}(z)\sigma(z)^2 l_{t_n^n}(z) m_{S_0,\sigma}((-\infty,\infty)) f_{S_0,\sigma}(z)dz}{\int_{-\infty}^{\infty}1_{(x,y]}(z)(\sigma(z)^2 f_{S_0,\sigma}(z) + \phi(z))dz} \\ &\le \frac{\sup_{z\in(-\infty,\infty)} l_{t_n^n}(z)}{t_n^n} m_{S_0,\sigma}((-\infty,\infty))\end{aligned}$$

を満たす．ここに $l_t(z)$ は拡散過程 X のスピード測度 $m_{S_0,\sigma}$ に関する局所時間である．van Zanten (2003) の定理 3.1 より，$t \to \infty$ とするとき $\sup_{z\in(-\infty,\infty)} l_t(z) = O_P(t)$ である．よって補題 5.1 (ii) が適用できて証明が終わる．□

この結果と連続写像定理を用いることにより，漸近的に分布不変な検定統計量を得ることができるが，ここから先は以下に述べる離散観測の場合と同様であるから省略する．

3.2 離散観測の場合

拡散過程 X が次のように観測されることを仮定する．

サンプリング・スキーム：$X=\{X_t;t\in[0,\infty)\}$ が観測される時刻 $0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n$ は, $n\to\infty$ とするとき, $t_n^n\to\infty$ および $h_n=O(n^{-2/3}(\log n)^{1/3})$ を満たす．ただし $h_n=\max_{1\le i\le n}|t_i^n-t_{i-1}^n|$.

この条件は $nh_n^2\to 0$ より強い．さらに次の仮定を置く．

B3. 拡散係数は有界：$\sup_{x\in(-\infty,\infty)}\sigma(x)^2<\infty$．不変密度も有界：$\sup_{x\in(-\infty,\infty)}f_{S,\sigma}(x)<\infty$. さらに

$$\Sigma_{S,\sigma}:=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(z)^2 f_{S,\sigma}(z)dz}>0.$$

B4. $\sup_{t\in[0,\infty)}E|X_t|^2<\infty$.

これら B3 および B4 の仮定は連続観測の場合の定理 3.1 には必要なく，それを離散近似することができることを示す(以下の)補題 3.3 の証明に使うテクニカルな条件である．我々が現在もつ証明の技術では外すことはできなかったが，緩める，あるいは除去することは可能かもしれず，今後の課題である．

さて，定数の三角列

$$-\infty=x_0^n<x_1^n<x_2^n<\cdots<x_{m(n)}^n<x_{m(n)+1}^n=\infty$$

であって，$n\to\infty$ とするとき

$$\max_{2\le k\le m(n)}|x_k^n-x_{k-1}^n|\to 0,\quad x_1^n\downarrow-\infty,\quad x_{m(n)}^n\uparrow\infty$$

となるものを導入する．例えば $x_k^n=-n+(k/n)$ with $k=1,2,...,2n^2$ のような状況を考えればよい．以下，やや専門的な説明になるが，この定数列は $\sup_{x\in[-\infty,\infty]}$ を $\max_{x_k^n:k=0,1,\dots,m(n)}$ に置き換えることを可能にするために導入するものである．すなわち，連続観測の場合の $V^n(x)$ の x は時間パラメータではなく空間パラメータであるが，これに関する一様な近似を試みる際，空間軸方向の $\sup_x$ には Doob の不等式をはじめとするマルチンゲール理論の道具が使えないので，かわりに empirical process 理論における最大不等式を利用するためにこの置き換えを行うのである．

次に $(-\infty,\infty)$ 上の関数の列 $z\rightsquigarrow\psi_k^n(z)$ を次のように導入する：これらは $1_{(-\infty,x_k^n]}$ の近似である．

定義 3.2. 正の定数列 b_n が与えられたとせよ．各 $k=1,2,...,m(n)$ に対し，ψ_k^n は $(-\infty,\infty)$ で定義された連続かつ区分的に直線の関数

$$\psi_k^n(z)=\begin{cases}1, & z\in(-\infty,x_k^n],\\ \text{line}, & z\in[x_k^n,x_k^n+b_n],\\ 0, & z\in[x_k^n+b_n,\infty)\end{cases}$$

であるとする．さらに $\psi_0^n\equiv 0$ および $\psi_{m(n)+1}^n\equiv 1$ とおく．

この関数は次の性質をもつ：

$$|\psi_k^n(z)-\psi_k^n(z')|\le b_n^{-1}|z-z'|;$$

$$|\psi_k^n(z)-1_{(-\infty,x_k^n]}(z)|\le 1_{[x_k^n,x_k^n+b_n]}(z).$$

ここで次の条件を置く．

B5. 既に課した条件 $h_n = O(n^{-2/3}(\log n)^{1/3})$ に加えて，

(i) $b_n^{-2} h_n \cdot \log n \cdot \log m(n) \to 0$;
(ii) $b_n \log m(n) \to 0$.

典型的には $\log m(n) = O(\log n^{\alpha})$ ($\alpha > 0$ はある定数) である．この場合，上の (i) と (ii) は例えば $b_n = n^{-1/4} \log n$ ととれば満たされる．

さて，以下 B1-B5 がある (S_0, σ) に対して満たされていると仮定する．我々の検定統計量は，確率場

$$U^n(x) = \frac{1}{\sqrt{t_n^n}} \sum_{i=1}^{n} \psi_k^n(X_{t_{i-1}^n})[X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} - S_0(X_{t_{i-1}^n})|t_i^n - t_{i-1}^n|]$$

for $x \in (x_{k-1}^n, x_k^n]$, $1 \le k \le m(n) + 1$ に基づく．ここに $U^n(-\infty) = 0$ とする．我々はこれを *smoothed score marked empirical process* と呼ぶ．この U^n は，連続観測の場合の V^n の近似である．実際，次が成り立つが，この補題こそが我々のアプローチの核心部分である．

補題 3.3. $\sup_{x \in [-\infty, \infty]} |U^n(x) - V^n(x)| \to^p 0$.

証明. Masuda et al. (2008) を見よ．本稿の説明だけではなぜ B5 が必要になるのかがわかりにくいと思われるが，実は証明は，例えば van der Vaart and Wellner (1996) の 2.2 章で解説されている Orlicz ノルムに対する最大不等式の理論を用いることによる．すなわち，連続マルチンゲールに対する指数型大偏差不等式と van der Vaart and Wellner (1996) の補題 2.2.1 および 2.2.2 を組み合わせて U^n と V^n の差の最大値を評価するのである．□

定理 3.1 と補題 3.3 をあわせて，以下を得る．

定理 3.4. 帰無仮説 H_0 のもとで， $U^n \to^d G$ in $\ell^{\infty}([-\infty, \infty])$．ただし G は定理 3.1 のものである．

連続写像定理により，次を得る．

系 3.5. $\sup_{x \in [-\infty, \infty]} |U^n(x)| \to^d \sup_{t \in [0, \Sigma_{S_0,\sigma}^2]} |B_t| =^d \Sigma_{S_0,\sigma} \sup_{t \in [0,1]} |B_t|$．ただし $t \rightsquigarrow B_t$ は標準 Brown 運動である．

漸近的に分布不変な検定統計量を得るためには $\Sigma_{S_0,\sigma}$ の一致推定量があればよい．実際，次が成り立つ．

補題 3.6. 任意の (S, σ) に対して

$$\widehat{\Sigma}^n = \sqrt{\frac{1}{t_n^n} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^2}$$

は $\Sigma_{S,\sigma}$ の一致推定量である．

証明. Masuda et al. (2008) を見よ．□

結局次の主定理を得る．

定理 3.7. $H_0 : S = S_0$ のもとで，

$$\frac{\sup_{x \in [-\infty, \infty]} |U^n(x)|}{\widehat{\Sigma}^n} \to^d \sup_{t \in [0,1]} |B_t|.$$

読者の中には U^n の代わりに

$$\widetilde{U}^n(x) = \frac{1}{\sqrt{t_n^n}} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty,x]}(X_{t_{i-1}^n})[X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} - S_0(X_{t_{i-1}^n})|t_i^n - t_{i-1}^n|]$$

を使った方が自然と思われる方もいるかもしれない．実際，Masuda et al. (2008) では U^n のみならずこの統計量を使ったシミュレーションも併せて行っており，ほぼ同等の数値結果を得ている．このことから，本稿における定数 b_n の選択は重要ではなく，定理自体も $\widetilde{U}^n$ に対しても成立することが予想される．しかし，我々の証明における一様近似 (補題 3.3) は関数 $z \rightsquigarrow \psi_k^n(z)$ の連続性に依存するものであり，V^n に対する結果を $\widetilde{U}^n$ に翻訳するのは現段階においては容易ではない．

検定の一致性を議論しよう．帰無仮説 $S = S_0$ としていままでのようなものをひとつとり，固定する．記号 $\mathcal{S}$ によって，条件 B1-B4 を満たししかも

$$\int_{-\infty}^{x_S} (S(z) - S_0(z)) f_{S,\sigma}(z) dz \neq 0 \quad \text{for some } x_S \in (-\infty, \infty] \tag{3.3}$$

であるような関数 S の全体を表すものとする．我々の検定問題の正式な定式化は，帰無仮説

$H_0 : S = S_0$

に対する対立仮説

$H_1 : S \in \mathcal{S}$

の検定である．いま $S \in \mathcal{S}$ を固定する．表現 $U^n = U_S^n + U_\Delta^n$ を考える．ただし $U_S^n(-\infty) = U_\Delta^n(-\infty) = 0$ で，$x \in (x_{k-1}^n, x_k]$, $1 \le k \le m(n)+1$ については

$$\begin{aligned} U_S^n(x) &= \frac{1}{\sqrt{t_n^n}} \sum_{i=1}^n \psi_k^n(X_{t_{i-1}^n})[X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} - S(X_{t_{i-1}^n})|t_i^n - t_{i-1}^n|], \\ U_\Delta^n(x) &= \frac{1}{\sqrt{t_n^n}} \sum_{i=1}^n \psi_k^n(X_{t_{i-1}^n})(S(X_{t_{i-1}^n}) - S_0(X_{t_{i-1}^n}))|t_i^n - t_{i-1}^n|. \end{aligned}$$

ここで

$$\sup_{x \in [-\infty,\infty]} |U^n(x)| \ge \sup_{x \in [-\infty,\infty]} |U_\Delta^n(x)| - \sup_{x \in [-\infty,\infty]} |U_S^n(x)|.$$

S は B1-B4 を満たすので，S_0 を S に置き換えて定理 3.4 と同じ議論を繰り返すと，U_S^n がある正規確率場に弱収束することが従う．よって，右辺の第 2 項は $O_P(1)$ であり，あとは

$$\sup_{x \in [-\infty,\infty]} |U_\Delta^n(x)| \neq O_P(1)$$

を示せばよい．これは次の補題で達成される．

補題 3.8. $x_S \in (-\infty, \infty]$ を (3.3) におけるように選ぶとき，$|U_\Delta^n(x_S)| \neq O_P(1)$.

証明．Masuda et al. (2008) を見よ．□

結局，検定の一致性を得る：

定理 3.9. $H_1 : S \in \mathcal{S}$ のもとで，

$$\frac{\sup_{x \in [-\infty,\infty]} |U^n(x)|}{\widehat{\Sigma}^n} \neq O_P(1).$$

4. Dachian and Kutoyants による結果

この節では Dachian and Kutoyants (2008) による結果を紹介する．その論文は，彼らの最近の研究成果のレビューをしたものであって，証明の細部には触れていない．詳細は投稿準備中の原稿にあるとしているが，それは入手できなかった．

4.1 小拡散過程

確率微分方程式 (2.1) を考える．Dachian and Kutoyants (2008) は，連続観測の場合について，拡散係数 σ^2 を既知とした上で，検定統計量

$$D^\varepsilon = \left[\int_0^T \frac{\sigma(x_t^{S_0})^2}{S_0(x_t^{S_0})^2}dt\right]^{-1/2} \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{X_t - x_t^{S_0}}{\varepsilon S_0(x_t^{S_0})}\right|$$

を提案し，その極限分布が $\sup_{t\in[0,1]}|B_t|$ であることを主張している．言うまでもなくこれは我々のものとは異なる統計量であるが，その定義の中に常微分方程式の解 $x^{S_0}=\{x_t^{S_0}; t\in[0,T]\}$ を用いているため，その計算をする必要がある．また，離散観測の場合への拡張が自然にできるかどうかは不明である．

4.2 エルゴード的拡散過程

確率微分方程式 (3.1) を考える．やはり拡散係数 σ^2 を既知とした上で，Cramér-von Mises 型統計量

$$W_T^2 = \frac{1}{T^2 \boldsymbol{E}_{(S_0,\sigma)}\sigma(\xi)^2}\int_0^T \left[X_t - X_0 - \int_0^t S_0(X_s)ds\right]^2 dt$$

を提案し，その極限分布が $\int_0^1 |B_t|^2 dt$ であることを主張している．ただし ξ は (S_0,σ) のもとでの不変分布に従う確率変数である．もちろん，Kolmogorov-Smirnov 型統計量を考察することも可能であるが，彼らはそれには触れていない．彼らのアプローチの場合，$\sigma(\xi)^2$ の期待値の計算が必要である．さらに，彼らは接触対立仮説

$$S(x) = S_0(x) + \frac{h(x)}{\sqrt{T}}$$

のもとでの漸近分布が

$$\int_0^1 |\rho_h t + B_t|^2 dt, \quad \rho_h = \frac{\boldsymbol{E}_{(S_0,\sigma)}h(\xi)}{\sqrt{\boldsymbol{E}_{(S_0,\sigma)}\sigma(\xi)^2}}$$

であることを主張しているが，このことから分かるように，$\boldsymbol{E}_{(S_0,\sigma)}h(\xi)=0$ であるような h に対しては局所対立仮説の意味における一致性は成立しない．したがって Ornstein-Uhlenbeck 過程のような例は彼らの守備範囲にはない．ただし我々の結果は固定対立仮説に対するものである一方，彼らは局所対立仮説を考えているわけであるから，優劣の単純な比較はできない．彼らと我々のアプローチの違いは，彼らが確率場のパラメータを時間軸方向にとっているのに対し，我々は空間軸方向にとっている点にある．そもそも i.i.d. の場合の Kolmogorov-Smirnov 検定が空間方向での sup をとったものであり，また時間方向での sup は空間平均がゼロの対立仮説に弱いことを考慮すると，著者は空間軸方向に sup をとる方を推奨したい．なお，彼らは離散観測の場合は考察していない．

5. 付録

ここでは Nishiyama (1999, 2000) による連続マルチンゲール確率場の弱収束理論を手短にまとめる．(T,ρ) は全有界距離空間であるとする．連続マルチンゲールの族 $M^n=\{M^{n,x}; x\in T\}$ が与えられたとする．ただし各 $t\rightsquigarrow M_t^{n,x}$ は共通の確率基 $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,(\mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0},P^n)$ の上の連続マルチ

ンゲールである．有限停止時刻 τ^n が与えられたとする．ここで *quadratic modulus* $t \rightsquigarrow ||M^n||_{\rho,t}$ を

$$||M^n||_{\rho,t} = \sup_{x \neq y} \frac{\sqrt{\langle M^{n,x} - M^{n,y} \rangle_t}}{\rho(x,y)}$$

によって定義する．T は必ずしも可算であるとは仮定していないので，$||M^n||_{\rho,t}$ はいかなる可測性ももたないかもしれない．そこで，適合 quadratic modulus $t \rightsquigarrow ||M^n||^*_{\rho,t}$ を確率 1 で $||M^n||_\rho \leq ||M^n||^*_\rho$ を満たす任意の（$[0,\infty]$-値）適合過程として定義する．$N(T,\rho;\varepsilon)$ によって T を ρ-半径 ε の閉球で被覆するときの最小個数を表す．

補題 5.1. $\int_0^1 \sqrt{\log N(T,\rho;\varepsilon)}d\varepsilon < \infty$ を仮定する．

(i) もしも $||M^n||^*_{\rho,\tau^n} < \infty$ almost surely ならば，確率場 $M^n_{\tau^n} = \{M^{n,x}_{\tau^n}; x \in T\}$ の一様 ρ-連続ヴァージョンが存在する．

(ii) もしも $||M^n||^*_{\rho,\tau^n} = O_P(1)$ であり，かつ定数を極限とする確率収束 $\langle M^{n,x}, M^{n,y} \rangle_{\tau^n} \to^p C^{(x,y)}$ が成り立つならば，確率場 $M^n_{\tau^n}$ は漸近的に確率的一様同程度 ρ-連続であり，かつ G に $C_\rho(T)$ の中で弱収束する．ただし $G = \{G(x); x \in T\}$ は平均ゼロの正規確率場であって共分散が $EG(x)G(y) = C^{(x,y)}$ であるものである．さらに，G の殆ど全てのパスは一様 ρ-連続である．

証明. Nishiyama (2000) の 定理 2.4.3 および 3.4.2 を見よ．本質的には Nishiyama (1999) の定理 2.3 による．□

最後に，我々の検定統計量の帰無仮説のもとでの極限分布として出てくる $\sup_{t\in[0,1]}|B_t|$ の分布関数の公式を紹介する：

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]}|B_t| \leq x\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left(-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{8x^2}\right).$$

例えば Feller (1971) を見よ．この公式は $x \leq 5$ の場合には，最初の 5 項の和を計算しただけで小数点以下 8 桁までの精度の数値を与える．

謝　辞

多くの有益なコメントを頂きました査読者の方に感謝いたします．

参　考　文　献

Dachian, S. and Kutoyants, Yu. A. (2008). On the goodness-of-fit tests for some continuous time processes, *Statistical Models and Methods for Biomedical and Technical Systems* (eds. F. Vonta, M. Nikulin, N. Limnios and C. Huber-Carol), 395–413, Birkhuser, Boston.

Donsker, M. D. (1952). Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems, *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 277–281.

Doob, J. L. (1949). Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems, *Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 393–403.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume II*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.

Kutoyants, Yu. A. (2004). *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer, London.

Masuda, H., Negri, I. and Nishiyama, Y. (2008). Goodness of fit test for ergodic diffusions by discrete time observations: An innovation martingale approach, Research Memorandum, No. 1069, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Negri, I.（1998）. Stationary distribution function estimation for ergodic diffusion process, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **1**, 61–84.

Negri, I. and Nishiyama, Y.（2006）. Goodness of fit test for ergodic diffusion processes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*（to appear）.

Negri, I. and Nishiyama, Y.（2007）. Goodness of fit test for small diffusions by discrete observations, Research Memorandum, No. 1054, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Nishiyama, Y.（1999）. A maximal inequality for continuous martingales and M-estimation in a Gaussian white noise model, *The Annals of Statistics*, **27**, 675–696.

Nishiyama, Y.（2000）. Entropy methods for martingales, *CWI Tract*, **128**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

van der Vaart, A. W. and Wellner, J. A.（1996）. *Weak Convergence and Empirical Processes*: *With Applications to Statistics*, Springer-Verlag, New York.

van Zanten, H.（2003）. On uniform laws of large numbers for ergodic diffusions and consistency of estimators, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **6**, 199–213.

Nonparametric Goodness of Fit Tests for Diffusion Processes

Yoichi Nishiyama

The Institute of Statistical Mathematics

It is well known that the Kolmogorov-Smirnov statistics for the goodness of fit test problem for i.i.d. data is asymptotically distribution free. However, in ergodic diffusion process models, a natural Kolmogorov-Smirnov type test based on the empirical distribution function is not asymptotically distribution free. In this paper, we review some recent results on nonparametric goodness of fit tests in diffusion process models, based on an idea of score marked empirical process. We see that our tests are asymptotically distribution free and consistent. We consider four cases consist of small or ergodic diffusions, and, continuously or discretely observed cases. We also mention some results given by Dachian and Kutoyants (2008).

Key words: Diffusion process, goodness of fit, asymptotically distribution free, Donsker's invariance principle, martingale, random field.