統計数理（2009）
第 57 巻 第 1 号 97–118

特集「確率過程の統計解析」
［研究詳解］

飛躍型確率過程に対する離散観測による閾値推定法

清水 泰隆†

（受付 2008 年 5 月 19 日；改訂 2008 年 6 月 2 日）

要　旨

ある飛躍型確率微分方程式の解として定まる連続時間型の確率過程を，時間に関して離散的に観測するモデルを考える．モデルに含まれる未知母数やその解から定まる汎関数を離散観測から推定することは，応用上多くの場面で遭遇する現実的で重要な問題である．このような離散観測モデルに対する統計推測理論の発展には近年目覚しいものがあるが，中でもある閾値に基づいて飛躍の有無を判別しながら推定量を構成する閾値推定法は，直感的理解が容易であり，その柔軟性と漸近的性質の良さという点でも利便性の高い手法である．本稿ではこの閾値推定のさまざまな応用法について，難解な証明には立ち入らず，直感的で平易な解説を試みる．最後に実用上の問題点と今後の課題について触れる．

キーワード： 飛躍型確率過程，離散観測，閾値推定法，漸近推測論，閾値選択．

1. はじめに

1.1 飛躍をもつ確率過程

フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P;(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 上の $\mathbb{R}$-値確率過程 $X^T=(X_t)_{t\in[0,T]}$ が，各 $\omega\in\Omega$ と，ある定数 $\varepsilon>0$ に対して以下の確率微分方程式を満たすとする．

$$dX_t=a(t,\omega)\,dt+b(t,\omega)\,dW_t+dL_t^\varepsilon,\quad X_0=x. \tag{1.1}$$

ここに，x は確率変数，a,b は発展的可測な確率過程，W は 1 次元ウィナー過程，L^ε は，1 次元レヴィ過程で次のような分解 $L^\varepsilon=B^\varepsilon+J^\varepsilon$ を持つとする．

$$B_t^\varepsilon:=\int_0^t\int_{|z|\leq\varepsilon}z(\mu(ds,dz)-\nu(dz)dt),\quad J_t^\varepsilon:=\int_0^t\int_{|z|>\varepsilon}z\,\mu(ds,dz) \tag{1.2}$$

ただし，μ は L^ε に対する飛躍の計数測度，すなわち，点 a におけるディラック測度 ϵ_a と飛躍 $\Delta L_t^\varepsilon=L_t^\varepsilon-L_{t-}^\varepsilon$ を用いて

$$\mu(\omega;dt,dz)=\sum_{s>0}\mathbf{1}_{\{\Delta L_s^\varepsilon(\omega)\neq 0\}}(\omega)\epsilon_{(s,\Delta L_s^\varepsilon(\omega))}(dt,dz) \tag{1.3}$$

と表される整数値ランダム測度である．また，ν は $\nu(dz)dt=E[\mu(dt,dz)]$ で定まる確定的な測度である．L^ε はパスに飛躍を発生させる項であり，$\mu\equiv 0$ なら $L^\varepsilon\equiv 0$ となり，そのパスは連続で伊藤過程などと言われる．特に，X がマルコフ性を持つとき拡散過程と言われる．また，

† 大阪大学大学院 基礎工学研究科：〒560–8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3

a, b が定数なら X は一般的なレヴィ過程の表現である．本稿では(1.1)の X を一般に，飛躍型確率過程と呼ぶことにする．

確率微分方程式(1.1)は，自然科学や社会科学において多くの場面で用いられており，特にファイナンスや保険の分野において証券や資産価格過程に対するモデルとして注目されている．X がある現象のモデルとして用いられるとき，係数 a, b やレヴィ測度 ν は一般に未知であり，それらの汎関数の推定が応用上の課題である．

確率過程に対する連続観測に基づいた統計の一般理論については多くの研究があり，例えば，Prakasa Rao (1999), Kutoyants (1984, 2003) やそれらの参考文献等でその概要や応用を広く知ることができるであろう．ところが，実際の現象に対する観測の多くは時間に関して離散的であるため，連続時間確率過程の離散観測による推定理論の構築が必要になる．(1.1)のような飛躍型モデルに対する離散観測推定が本稿の主題である．

本節では，以後の理解の助けのために，X の性質やパスの様子を直感的に把握するための要点を簡単に記しておくことにする．これらの詳細な解説には，Sato (1999), Protter (2003), Jacod and Shiryaev (2003), 和書では，佐藤(1990), 伊藤(1991)等が参考になるであろう．

測度 ν はレヴィ測度と言われ，L^ε の飛躍を特徴付ける量である．飛躍項 L_t^ε の特性関数は ν と 1 対 1 に対応しており(Sato, 1999)，この意味で，ν は L^ε の特性量(characteristic)と言われる．定義より，$\nu(A)$ は大きさが集合 A に入るような飛躍の時間 $[0,1]$ における期待回数となることは直感的にもわかるであろう．ν は

$$\int_{|z|\le 1} z^2 \nu(dz) < \infty$$

を満たすことが知られている．

飛躍項 J^ε は ε より大きなサイズの飛躍を生成し，時間 $[0,1]$ における飛躍回数の期待値(強度，intensity)は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lambda_\varepsilon := E\left[\int_0^1 \int_{|z|>\varepsilon} \mu(dt, dz)\right] = \int_{|z|>\varepsilon} \nu(dz) < \infty$$

となることが知られている．これは J^ε の飛躍，すなわち ε より大きな飛躍が有限時間内に高々有限回しか起こらないことを意味している．一方，B^ε は ε より小さいサイズの飛躍を生成するが，その回数はいつも有限とは限らない．したがって，B_t^ε の中の個々の積分値，

$$\int_0^t \int_{|z|\le\varepsilon} z\,\mu(ds, dz), \quad \int_0^t \int_{|z|\le\varepsilon} z\,\nu(dz)ds \tag{1.4}$$

は，一般には収束するとは限らない．しかし，$\mu(dt, dz)$ を $\nu(dz)dt$ によって補正(compensate)することによって $B_t^\varepsilon < \infty$ となり，これが B_t^ε の積分の中の測度 $\mu(dt, dz)$ と $\nu(dz)dt$ を分けて書かない理由である．B^ε は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールとなっており，この意味で $\nu(dz)dt$ はランダム測度 $\mu(dt, dz)$ のコンペンセイター(compensator)と言われる．

もし，(1.4)のどちらか一方の積分が存在すれば，他方も存在して，

$$B_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{|z|\le\varepsilon} z\,\mu(ds, dz) - \int_0^t \int_{|z|\le\varepsilon} z\,\nu(dz)ds \tag{1.5}$$

と書ける．これらを考え合わせると，任意の $\delta \in (0, \varepsilon)$ に対して $\alpha := \int_{\delta<|z|\le\varepsilon} z\,\nu(dz)$ は常に存在して，$L_t^\varepsilon + \alpha t = L_t^\delta$ と書けるので，

$$dX_t = \{a(t,\omega) - \alpha\}\,dt + b(t,\omega)\,dW_t + dL_t^\delta$$

は(1.1)と同値である．もちろん $\delta \geq \varepsilon$ についても同様である．このとき dt-積分の項(ドリフト項)の変化に注意が要るが，α が定数であることに注意すると，モデルの出発点としては(1.1)の $\varepsilon > 0$ はどのように設定してもかまわない．簡単のため，$\varepsilon = 1$ と設定されることが多い．

飛躍回数が有限か無限かでは，取り扱いの複雑さに大きな差があり，それらを別々に議論することはしばしば有効である．そこで，$\lambda_0 := \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon$ に対して

$$\lambda_0 < \infty$$

となる場合を特に有限頻度(finite activity)型と呼ぶことにする．この場合，(1.1)において $\varepsilon = 0$ なる設定が可能で，そのときの飛躍項 $L^0 = B^0 + J^0$ は，強度 λ_0 のポアソン過程 N と，分布 $\lambda_0^{-1}\nu$ を持つ I.I.D. 確率変数列 $(Z_i)_{i=0,1,\ldots}$ を用いて，

$$B_t^0 \equiv 0, \qquad J_t^0 = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \tag{1.6}$$

なる複合ポアソン過程になることが知られている．一方，

$$\lambda_0 = \infty$$

の時は任意の時間内において“小さな”飛躍が無限回起こるというモデルになり，これを無限頻度(infinite activity)型と呼ぶことにする．具体的な無限頻度型の L^ε の例については，Sato (1999)などを参照されたい．

1.2 離散観測モデルの統計理論

飛躍を持たない通常の拡散過程モデルに対する離散観測推定理論は 1980 年代頃から盛んに研究されてきており，例えば Prakasa Rao (2000)や Aït-Sahalia (2007)によって一連の主要な成果を知ることができる．また，レヴィ過程の場合の離散観測モデルについては Woerner (2001)に詳しい研究がある．本稿ではこれらのモデルを含む飛躍型確率過程を考え，その離散観測推定理論を扱う(図 1)．

正数列 h_n に対して，X が時刻 $t_i^n = ih_n (i = 0, 1, \ldots, n)$ において観測されていると仮定する．我々の興味は $n+1$ 個の離散的観測

$$\left\{X_{t_0^n}, X_{t_1^n}, \ldots, X_{t_n^n}\right\}$$

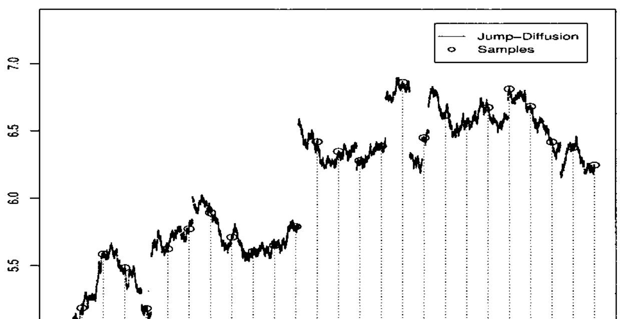

図 1． 飛躍型確率過程のパスの例と離散観測のイメージ．

に基づく(1.1)に対する統計推測である．通常，$n \to \infty$ の下での統計量の漸近挙動が研究対象となり，推測の対象に応じて $T = nh_n$ を固定とする設定と，$T \to \infty$ とする設定が使い分けられる．このような漸近設計の必要性は，連続観測の場合の簡単な例によって理解することができる．例えば，定数 $\beta > 0$ に対して $b^2(t,\omega) \equiv \beta$, $\lambda_0 < \infty$ とし，更に(1.6)において $Z_i \equiv 1$ となる場合を考えよう．$h_n \downarrow 0$ を仮定して，固定された $T > 0$ に対する X の二次変分 $[X]_T$ を観察すると，

$$[X]_T := P\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \beta T + N_T \tag{1.7}$$

(ただし，P-lim は確率収束を表す)となるので，N_T が既知のとき，この時点で $T^{-1}[X]_T$ によって β を知ることができる．つまり，$T < \infty$ で十分な情報が得られている．一般に，$T < \infty$ の連続観測を使えば，β はしばしば完全に特定される．しかし，λ_0 を知るためには，大数の法則

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N_T}{T} = \lambda_0 \quad \text{a.s.} \tag{1.8}$$

に注意して，更に $T \to \infty$ が必要となろう．一般の場合にもドリフト項の一致推定には，連続観測であっても $T \to \infty$ が必要とされる．後述するようにこの違いは統計量の収束レートに現れる(3.3，3.4 節参照)．

飛躍型確率過程の離散観測モデルにおける統計推測は大きく二つの話題に分かれる．第一に，パスが飛躍を持つかどうかを決定する問題であり，第二に，パスが飛躍をもつという仮定の下でその飛躍の大きさと時刻を直接推定する問題である．前者はモデルを決めるための根本的な問題でもあり，確率過程を用いたデータ解析を行う際の最初の問題の一つだろう．後者は飛躍型モデルにおける母数推定など，より具体的な推定問題に応用される．本稿の主な興味の対象は後者であるが，前者についても，最近の話題についてここで簡単に触れておこう．

第一の問題に対して最近注目を集めているのは，Barndorff-Nielsen and Shephard (2004) によって導入された以下のような離散観測増分の冪乗絶対積和である．

$$V_T^n(X; r, s) := h_n^{1-\frac{r+s}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s. \tag{1.9}$$

ここに，r, s は $r + s > 0$ なる非負の実数で，$\Delta_i^n X = X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}$ である．これは，$T = nh_n$ を固定した下で，(1.7)のように

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} V_T^n(X; 2, 0) = [X]_T$$

となるので，(1.9)の極限は二次変分の一般化になっており bipower variation (BV) と呼ばれている．これは元々，ファイナンスで用いられるリスク指標 integrated volatility (IV) $\int_0^T b^2(t,\omega)\,dt$ の推定のために導入された．すなわち，モデル(1.1)では

$$[X]_T = \int_0^T b^2(t,\omega)\,dt + \int_0^T \int_{|z|>0} z^2\,\mu(dt,dz)$$

となって，通常の二次変分 $[X]_T$ では IV を飛躍項の二次変分と分離できないが，

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} V_T^n(X; 1, 1) = \gamma_0^2 \int_0^T b^2(t,\omega)\,dt$$

(ただし，γ_0 はある既知の定数)となることを利用して IV のみを取り出すことができるのである．Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) は，帰無仮説 $\mu \equiv 0$ の下で $V_T^n(X; 2, 0)$ と $\gamma_0^{-2} V_T^n(X; 1, 1)$ が漸近同等となることに注目し，X に対していくらか制限的な仮定の下ではあるが，非常に

簡便な検定統計量を与えた．その後，BV に関する極限定理が Barndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b) 等により発展させられ，Aït-Sahalia and Jacod (2008) ではかなり一般的な設定の下での飛躍検定法が与えられている．

一方，飛躍の存在を認めた時，第二の問題のようにその飛躍の大きさと回数が推定できれば，a,b,ν に関するより詳細な推定が可能になるであろう．例えばパス X^T が観測されていると仮定すると，レヴィ過程 J^ε は $[0,T]$ において連続観測されていると見なせる．この時，レヴィ過程の連続観測推定理論が援用できて，Basawa and Brockwell (1978), Akritas and Johnson (1981), Höpfner and Jacod (1994) 等が示すように，観測される J^ε の飛躍の大きさと回数のデータを用いて ν に関する推定が可能になる．また，飛躍を排除したデータを使って，拡散過程の推測論を援用した a,b の推定を考えることもできよう．しかし，離散観測の場合，飛躍は直接的には観測されないので連続観測に基づく理論を直接適用することはできない．そこで，データから飛躍の大きさや回数を推定し，連続観測の理論に類似した方法を考えようとするのは自然であろう．実際，レヴィ過程や拡散過程の離散観測推定では，それぞれ Woerner (2001) や Yoshida (1992) のように連続観測の尤度を離散化するという手法がとられ，その有効性が示されている．Mancini (2004, 2006) や Shimizu and Yoshida (2006), Shimizu (2006a, 2007) 等は，飛躍型確率（拡散）過程においてもこのようなアイデアを実践しており，それが，本稿の主題となる**閾値推定法**である．次節でその本質的な部分となる飛躍判別法について述べる．

なお，以下のすべての議論は，X を $\mathbb{R}^d$-値 $(d \geq 1)$ 確率過程の場合に拡張できるが，本稿では表記の簡単のために $d=1$ として議論する．より詳しくは，各節に挙げる文献を参照されたい．

2. 閾値推定の考え方

2.1 飛躍判別フィルター

X が有限頻度型であるとする．このとき，(1.6) により飛躍の回数はポアソン過程に従うので，区間 $(t_{i-1}^n, t_i^n]$ における飛躍の回数は

$$\Delta_i^n N \sim Po(\lambda_0 h_n)$$

であり，この区間で飛躍が起こる確率は $1-e^{-\lambda_0 h_n}$ である．閾値推定のアイデアは，各区間における飛躍の有無を区間増分 $\Delta_i^n X$ の大きさを使って検出することである．

以後，各 i に対して $(t_{i-1}^n, t_i^n]$ での飛躍の回数を J_i^n で表すことにする．閾値推定法では，適当な実数 $r_n > 0$ を閾値として選び，$|\Delta_i^n X| > r_n$ の時 $J_i^n \neq 0$ と判定する．そこで，

$$\mathcal{H}_i^n := \{\omega \in \Omega; |\Delta_i^n X| > r_n\} \in \mathcal{F}_{t_i^n} \tag{2.1}$$

なる集合を，区間 $(t_{i-1}^n, t_i^n]$ における**飛躍判別フィルター**と呼ぶことにする．つまり，定義関数 $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}(\omega)$ は飛躍検出器となり，$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}(\omega)=1$ は，その ω にたいするパスにおいて $J_i^n \neq 0$ と判定することを意味している．

閾値 r_n は観測者が勝手に決めるものであり判定を誤ることもあるが，h_n が小さくなるほどその判定が確かになることは直感的に明らかであろう．そこで，閾値推定の漸近論においては $h_n \to 0$ という仮定が標準的である．更に，閾値の列を $r_n \to 0$ となるように適切に選ぶことで，漸近的にはすべての飛躍が検出可能となり，$|\Delta_i^n X| \leq r_n$ の時 $J_i^n = 0$ という判定も可能になる．もちろん，r_n の選び方が本質的であり，モデルの特性に応じて決定されねばならないが，これについては次の 2.2 節で詳しく述べる．

一方，X が無限頻度型の場合には，任意の長さの区間にいくらでも小さな飛躍が無数に存在するという状況になるので，$J_i^n \neq 0$ なる区間の検出ということには意味がない．しかし，この場合にも上記のフィルターは無意味ではない．

飛躍のマルチンゲール部分である B^ε は，ε が十分小さければ非常に小さなノイズと考えてよい．例えば，

$$\sigma^2(\varepsilon) := \int_{|z|\le\varepsilon} z^2\,\nu(dz)$$

に対して $\varepsilon^{-1}\sigma(\varepsilon)\to\infty\,(\varepsilon\to 0)$ のとき，$\sigma^{-1}(\varepsilon)B^\varepsilon$ は $\varepsilon\to 0$ のときにブラウン運動に分布収束することが知られている (Asmussen and Rosinski, 2001)．このとき，B^ε の項は dW_t-積分の項(拡散項)と同程度の影響力しか持たない．そこで，$\varepsilon_n\downarrow 0\,(n\to\infty)$ なる列をうまく選んで L^{ε_n} の分解を考えれば，n が十分大きいとき，モデル (1.1) は，飛躍が複合ポアソン過程 J^{ε_n} のみから生成されるような有限頻度型モデルによって近似されるであろう．このような考え方を使って，J_i^n を

(2.2)　　“$(t_{i-1}^n, t_i^n]$ における ε_n よりも大きな飛躍の回数”

と読み直してみると，(2.1) が“大きい”飛躍に対する判別フィルターとして意味を持ってくる (Shimizu, 2006b)．この時，$\Delta_i^n X \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}$ の増分に含まれる飛躍は ε_n 以下であるから，漸近的に飛躍の影響は排除され，結果として拡散項のみの情報を取り出すことが可能になるのである．これについては後述するが，もちろんこの場合にも，r_n は個々のモデルと ε_n に応じて注意深く決定されねばならない．

2.2　理論的閾値

前節で，有限頻度型の飛躍判別フィルターの重要性について述べた．そこで，この節ではまず，X を有限頻度型として議論することにしよう．

閾値 r_n は X の連続マルチンゲール部分の構造に基づいて決定される．簡単のために $T\in(0,\infty)$ を固定し，$b(t,\omega)\equiv 1$，$a(t,\omega)$ は $[0,T]$ において確率 1 で有界と仮定しよう．$J_i^n=0$ のとき，

$$\Delta_i^n X = \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} a(s,\omega)\,ds + \Delta_i^n W$$

であるから，h_n が十分小さい時 $h_n \le 2\log(1/h_n)$ となることに注意して，

$$\frac{|\Delta_i^n X|}{r_n} \le \left(C + \frac{|\Delta_i^n W|}{\sqrt{2h_n\log(1/h_n)}} \right) \frac{\sqrt{2h_n\log(1/h_n)}}{r_n} \tag{2.3}$$

とできる．ただし，C はある正の定数である．ここで，W のパスの連続度 (modulus of continuity) に関する事実

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le i\le n} \frac{|\Delta_i^n W|}{\sqrt{2h_n\log(1/h_n)}} \le 1$$

(Karatzas and Shreve, 1991, Theorem 2.9.25) に注意すると，r_n として

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2h_n\log(1/h_n)}}{r_n} = 0 \tag{2.4}$$

となるものを閾値として選ぶことによって，(2.3) により $|\Delta_i^n X|\le r_n$ が導かれる．すなわち，十分大きな n に対して

$$J_i^n = 0 \quad\Rightarrow\quad |\Delta_i^n X| \le r_n$$

が正当化される．逆に $J_i^n\ne 0$ であれば，$h_n\to 0$ としても $|\Delta_i^n X|>0$ なるギャップが残ることは直感的にも理解されるであろう．実際，

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Delta_i^n X| > r_n \mid J_i^n \ne 0) = 1$$

となることが示される(Mancini, 2006)．そこで，r_n を

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \tag{2.5}$$

と選ぶことで，十分大きな n に対して $J_i^n \neq 0 \Rightarrow |\Delta_i^n X| > r_n$，すなわち，

$$|\Delta_i^n X| \leq r_n \quad \Rightarrow \quad J_i^n = 0$$

が示される．したがって，閾値を(2.4)かつ(2.5)と選べば，漸近的に

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} \approx \mathbf{1}_{\{J_i^n \neq 0\}}, \quad \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c} \approx \mathbf{1}_{\{J_i^n = 0\}}$$

となることが理解されよう．上記の議論は b が有界な確率過程の場合にも同様に拡張される．より詳細な議論や証明には，Mancini (2006)を参照されたい．

さて，a,b が有界という仮定は応用上しばしば制限的であって，例えば定数 $\theta \neq 0$ に対して，$a(t,\omega) = \theta X_t(\omega)$，$b \equiv 1$ とし，$T \to \infty$ とするような状況では，X_t の分布の台が有界にならず有界性は強すぎる仮定である．そこで，Shimizu and Yoshida (2006)に従って

$$a(t,\omega) = U(X_t(\omega)), \quad b(t,\omega) = V(X_t(\omega)) \tag{2.6}$$

というマルコフ型の設定の下で有界条件をはずし，閾値 r_n の候補を与えておこう．以下，$\nu(dz) = f(z)\,dz$ としてレヴィ密度 f の存在を仮定するが，これは表記や計算上の便利のためで本質的な条件ではない．また，次のように記号を定義する．$k = 0,1$ に対して

$$D_{i,k}^n := \mathcal{H}_i^n \cap \{J_i^n = k\}, \quad D_{i,2}^n := \mathcal{H}_i^n \cap \{J_i^n \geq 2\}$$
$$C_{i,k}^n := (\mathcal{H}_i^n)^c \cap \{J_i^n = k\}, \; C_{i,2}^n := (\mathcal{H}_i^n)^c \cap \{J_i^n \geq 2\}.$$

したがって，

$$\mathcal{H}_i^n = \bigcup_{k=0}^{2} D_{i,k}^n, \quad (\mathcal{H}_i^n)^c = \bigcup_{k=0}^{2} C_{i,k}^n$$

に注意しておく．ただし，A^c は集合 A の補集合である．更に，確率過程 Y に対して，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\sup_{t \geq 0} |Y_t| < C \quad \text{a.s.} \tag{2.7}$$

となるとき，Y は一様有界である，ということにする．

以下の命題は Shimizu and Yoshida (2006)，Lemma 2.1, 2.2 の証明と全く同様にして得られる．

命題 2.1. 確率過程 a, b は(2.6)を満たし U, V はリプシッツ連続とする．定数 $K > 0, \gamma > -1$ が存在して $f(z)\mathbf{1}_{\{|z| \leq 1\}} \leq K|z|^\gamma$，任意の $q > 0$ に対して $\int_{|z|>0} z^q f(z)\,dz < \infty$ を仮定する．このとき，任意の $p \geq 1$ に対して n を十分大きくとれば，以下が成り立つ．

$$P(D_{i,0}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}) = R_1((\sqrt{h_n} r_n^{-1})^p, X_{t_{i-1}^n}), \; P(C_{i,0}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}) = e^{-\lambda_0 h_n} - P(D_{i,0}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}),$$
$$P(D_{i,1}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}) = R_2(h_n, X_{t_{i-1}^n}), \qquad P(C_{i,1}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}) = R_3(h_n r_n^{1+\gamma}, X_{t_{i-1}^n}),$$
$$P(D_{i,2}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}) \leq \lambda_0^2 h_n^2, \qquad P(C_{i,2}^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}) \leq \lambda_0^2 h_n^2.$$

ただし，$R_j(u_n, x)$ は数列 u_n と定数 $C > 0$ に対して $R_j(u_n, x) \leq C u_n (1 + |x|)^C$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ の関数である．

注意 1.　この命題は a,b がマルコフ型でなくとも，一様有界であれば同様に成り立ち，各 R_j は $R_j(u_n,x)\le Cu_n$ を満たす関数と書き換えることができる．

命題 2.1 の結果から，閾値 r_n が

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{h_n}}{r_n}+r_n\right)=0 \tag{2.8}$$

を満たすように選ばれると，適当な正則条件の下で

$$\lim_{n\to\infty}P(C_{i,1}^n)/P(D_{i,1}^n)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}P(D_{i,0}^n)/P(C_{i,0}^n)=0 \tag{2.9}$$

となることが期待されるであろう．このことは，漸近的に

$$\mathbf{1}_{D_{i,1}^n}\approx\mathbf{1}_{\{J_i^n=1\}},\quad \mathbf{1}_{C_{i,0}^n}\approx\mathbf{1}_{\{J_i^n=0\}} \tag{2.10}$$

であることを示唆しており，同様に考えると，

$$\lim_{n\to\infty}P(D_{i,1}^n)/P(\mathcal{H}_i^n)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}P(C_{i,0}^n)/P((\mathcal{H}_i^n)^c)=1 \tag{2.11}$$

が期待されるので，漸近的に

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}\approx\mathbf{1}_{\{J_i^n=1\}},\quad \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}\approx\mathbf{1}_{\{J_i^n=0\}}$$

となることが示唆される．したがって，$\mathcal{H}_i^n$ は各区間における 1 回の飛躍を検出する漸近フィルターであると考えることができる．更に，h_n が十分小さいとき，直感的には $J_i^n=1$ なる区間において Δ_i^nX が飛躍サイズのよい近似になっているであろう．したがって，検出された 1 回の飛躍サイズを Δ_i^nX によって推定し，飛躍の回数は $\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}$ で推定することができる．ただし，上記の議論はやや乱暴で，実際には (2.8) は必要条件であって，r_n は (2.9) における $P(C_{i,1}^n)$ や $P(D_{i,0}^n)$ が確実に無視できるほど小さくなるように更に注意深く選ばれねばならない．Shimizu and Yoshida (2006) では，$\rho\in(0,1/2)$ なる定数に対して

$$r_n=h_n^\rho \tag{2.12}$$

を用いている．

X が無限頻度型の場合には，$(t_{i-1}^n,t_i^n]$ における ε より大きな飛躍の回数を $J_i^n(\varepsilon)$ と書くことにすると，2.1 節でも述べたように，適当な列 ε_n とある正則条件の下で

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}\approx\mathbf{1}_{\{J_i^n(\varepsilon_n)\neq0\}},\quad \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}\approx\mathbf{1}_{\{J_i^n(\varepsilon_n)=0\}} \tag{2.13}$$

とすることができる．これについては 3.4 節で述べる．

これらの飛躍判別フィルターを用いて $\Delta_i^nX\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}$ と $\Delta_i^nX\mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}$ にデータを分類し，飛躍部分と連続部分を分けて推定しようというのが閾値推定法のアイデアである．3 章では，推定対象に応じた推定量の構成方法について更に詳しく見ていくことにする．

3.　閾値推定法の実践

3.1　拡散項の推定

X を無限頻度型とする．ファイナンスにおいて，X が証券や資産価格のモデルとして用いられるとき，1.2 節でも触れたように integrated volatility

$$v^T:=\int_0^T b^2(s,\omega)\,ds\quad (T>0) \tag{3.1}$$

の推定は重要な問題である．ここでは，v^T の閾値推定を考えてみよう．

v^T は T が固定されていないと意味がないが，推定は 1.2 節でも述べたように，$T=nh_n$ を固定した下で可能である．飛躍判別フィルターを用いると v^T の推定量の直感的な構成が可能である．数学的には，$([X]_t)_{t\in[0,T]}$ を確率過程と見たときのパスの連続部分が $(v^t)_{t\in[0,T]}$ であり，$\Delta[X]_t=(\Delta X_t)^2$ であることが知られている(例えば Protter, 2003, II.6 を参照)．ただし，確率過程 $(Y_t)_{t\geq 0}$ に対して，$\Delta Y_t := Y_t - Y_{t-}$ である．したがって，各 $\varepsilon>0$ に対して

$$v^T=[X]_T-\sum_{t\leq T}(\Delta J_t^\varepsilon)^2-\sum_{t\leq T}(\Delta B_t^\varepsilon)^2$$

となるが，飛躍 ΔJ_t^ε は $[0,T]$ において有限個しかないので，$[X]$ の定義(1.7)より

$$v^T=P\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^n(\Delta_i^n X)^2\mathbf{1}_{\{J_i^n(\varepsilon)=0\}}-\sum_{t\leq T}(\Delta B_t^\varepsilon)^2$$

となることは直感的に理解されるだろう．ここで $\varepsilon\to 0$ のとき

$$E\left[\sum_{t\leq T}(\Delta B_t^\varepsilon)^2\right]=\sigma^2(\varepsilon)\to 0$$

であるから，$\sum_{t\leq T}(\Delta B_t^\varepsilon)^2$ は，ε を小さくとれば，確率的にはいくらでも小さくできる．このような連続観測に基づく考察から，例えば $\varepsilon=r_n$ と取ることにより，v^T の推定量として

$$\hat{v}_n^T:=\sum_{i=1}^n(\Delta_i^n X)^2\mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c} \tag{3.2}$$

を考えることができよう．この推定量の妥当性は Mancini (2006) による次の定理によって保証される．

以下本稿を通して, 平均ベクトル m, 分散行列 Σ の k 次元正規分布への分布収束を $\to^d N_k(m,\Sigma)$ のように表すことにする．

定理 3.1. 確率過程 a,b は確率 1 で $[0,T]$ 上有界とし，閾値 r_n は(2.4)，および(2.5)を満たすとする．このとき，固定された $T>0$ に対して次が成り立つ．

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat{v}_n^T=v^T.$$

特に，X が有限頻度型で a,b のパスが右連続左極限を持つならば，$n\to\infty$ のとき

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{v}_n^T-v^T\right)}{\sqrt{2\hat{q}_n^T}}\to^d N_1(0,T).$$

ただし，$\hat{q}_n^T=(3h_n)^{-1}\sum_{i=1}^n(\Delta_i^n X)^4\mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}$ である．

統計量 $\hat{q}_n^T$ は $\int_0^T b^4(t,\omega)\,dt$ (integrated quarticity)の一致推定量である．Barndorff-Nielsen et al. (2006a)によれば $\mu\equiv 0$ のとき $(3h_n)^{-1}\sum_{i=1}^n(\Delta_i^n X)^4\to^p\int_0^T b^4(t,\omega)\,dt$ となるので，$\hat{q}_n^T$ の一致性は直感的には明らかであろう．

3.2 飛躍特性量の推定

本節では有限頻度型の ν に対する離散観測推定を考えよう．このとき，(1.6)のようにかけることを再び注意しておく．

我々は，真のレヴィ測度 ν に対するある母数 θ_0：

$$\theta_0=\nu(\eta):=\int_{\mathbb{R}}\eta(z)\,\nu(dz)<\infty \tag{3.3}$$

に興味があるとする．ここに $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は既知の関数である．設定(3.3)はいわゆるセミパラメトリックモデルで，ν を特定の θ の関数としては規定しない．例えば，$\eta_s(z)=z^s\,(s\geq 0)$ とおくと $\lambda_0=\nu(\eta_0)$ であるし，$m_s:=\nu(\eta_s)/\nu(\eta_0)$ は飛躍 Z_i の s 次積率を表す．したがって，任意に与えられた η に対して汎関数 $\nu(\eta)$ が推定できるなら，ν を特定するにはしばしば十分であろう(例えば，Billingsley, 1968, Theorem 1.3 とそれに関連するコメントを参照されたい)．

離散観測による推定の基本は，連続観測による推定量を模倣することであることは既に述べてきたとおりである．そこで，連続観測の場合に θ がどのように推定されるかを考えてみよう．

以下，再び(1.6)の記号を使う．パス X^T が完全に既知であるとすると，$[0,T]$ におけるすべての飛躍 $(Z_i)_{i=1,2,\ldots,N_T}$ は既知である．したがって，

$$\frac{1}{N_T}\sum_{i=1}^{N_T}\eta(Z_i)$$

は Z_i の分布に関する汎関数 $\lambda_0^{-1}\nu(\eta)$ の自然な推定量であろう．一致性のためには $N_T\to\infty$ となることが必要であるから，漸近設計としては $T\to\infty$ が不可欠である(1.2 節)．ここで，大数の法則(1.8)に注意すると，θ_0 の自然な推定量として

$$\theta_T:=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N_T}\eta(Z_i)$$

が考えられる．実際，次の定理は容易に証明できる．

定理 3.2. ある $\delta>0$ に対して $\nu(\eta^{2+\delta})<\infty$ を仮定する．このとき，

$$\sqrt{T}(\theta_T-\theta_0)\to^d N_1\left(0,\nu(\eta^2)\right)\quad (T\to\infty) \tag{3.4}$$

が成り立つ．

この θ_T は, 適当な損失関数に対する漸近ミニマックス限界を達成することもわかり(Nishiyama, 2008)，漸近有効といえる．したがって，離散観測による推定の際の目標は，上記(3.4)の漸近分散 $\nu(\eta^2)$ を達成するような推定量を構成することであろう．

さて，離散観測を用いて θ_T を離散化してみよう．以下，簡単のため ν がレヴィ密度 f を持つと仮定する．すなわち，

$$\nu(dz)=f(z)\,dz$$

とする．2.2 節で述べたように，飛躍判別フィルター(2.1)の閾値 r_n を適切に選べば，飛躍の大きさを Δ_i^nX で，飛躍の回数を $\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}$ で近似できる．したがって，

$$\hat{\theta}_n:=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\eta(\Delta_i^nX)\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} \tag{3.5}$$

が θ_T の直接的な離散化であり，直感的にも自然であろう．実際，Shimizu and Yoshida (2006)，Proposition 3.6 の系として，以下の定理を得る．

定理 3.3. ある定数 $C>0$ が存在して $|\eta(z)|\leq C(1+|z|)^C$ とし，命題 2.1 が成り立つ条件を仮定する．このとき，$h_n\to 0$，$nh_n\to\infty$ の下で，以下が成り立つ．

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_n=\theta_0.$$

以下，漸近正規性を示すために a,b の一様有界性(2.7)を仮定するが，これは煩わしい仮定の羅列を防ぐためで本質的な仮定ではない．以下の定理が成り立つ．

定理 3.4. 係数 a,b は一様有界で，命題 2.1 が成り立つとする．また，関数 η は微分可能で，その微分 $\partial\eta$ と η，レヴィ密度 f は有界とする．更に，$n\to\infty$ のとき，$h_n\to 0$，$nh_n\to\infty$，かつ，ある定数 $\delta\in(0,1)$ が存在して $nh_n^{1+\delta}\to 0$ とする．このとき，ある定数 $\rho\in[\delta/2,1/2)$ に対して $r_n=O(h_n^\rho)$ とすると，以下が成り立つ．

$$\sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)\to^d N_1\left(0,\nu(\eta^2)\right) \quad (n\to\infty).$$

注意 2. 漸近分散 $\nu(\eta^2)$ の推定量も (3.5) と同様にして構成できる．

上記の漸近分散は (3.4) のそれと同じであり，収束速度も $\sqrt{T}=\sqrt{nh_n}$ で同じである．したがって，$\hat{\theta}_n$ は漸近有効である．

T を固定した時と違って，$nh_n\to\infty$ の時には h_n の収束の速さを規定しておかねばならず，この条件が $nh_n^{1+\delta}\to 0$ である．δ が小さいほど早く $h_n\to 0$ となることを意味しており，観測が高頻度であることを示している．$\delta=1$ が標準的な設計であるが，飛躍の近似精度を上げるため若干高めの頻度が要求されている．

η や $\partial\eta$ の有界性は $\eta(\Delta_i^n X),\partial\eta(\Delta_i^n X)$ に関する様々な可積分条件を保証するためのものであるが，これらは制限的で，先の η_s のような例では成り立たない．そこで，それらの制約を取り除く一つの方法として，次のような修正が考えられる．

$$\tilde{\theta}_n:=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n\varphi_n\circ\eta(\Delta_i^n X). \tag{3.6}$$

ただし，$\varphi_n\circ\eta(x):=\eta(x)\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R};\,|\eta(x)|\vee|\partial\eta(x)|\le\kappa_n\}}$，$\kappa_n$ は正数列である．これによって，η や $\partial\eta$ の値はいつでも κ_n で上から有界として評価できる．もちろん一致性や漸近正規性のためには $\kappa_n\uparrow\infty\,(n\to\infty)$ と選ばねばならないことは直感的にも明らかであろう．それだけでなく，h_n や r_n の収束の速度とうまくバランスさせながら κ_n を選ぶ必要があり，それらの関係は一般に複雑になる．また，このとき $\tilde{\theta}_n$ の平均 2 乗収束

$$\lim_{n\to\infty}E\left[|\tilde{\theta}_n-\theta_0|^2\right]=0$$

が証明できる．その他，η が微分可能でない場合の推定量も提案されている．以上に関する詳細は Shimizu (2007) を参照されたい．

以上の議論を踏まえると，ノンパラメトリックに f 自身を推定することも同様の考え方で可能である．連続観測の下で考えると，再び (1.8) に注意して，以下のようなカーネル型推定量を考えることができるだろう．

$$f_T(z)=\frac{1}{T\delta_T}\sum_{i=1}^{N_T}K\left(\frac{z-Z_i}{\delta_T}\right).$$

ただし，K は適当なカーネルで，δ_T はバンド幅である．したがって，これを離散化すると

$$\hat{f}_n(z)=\frac{1}{nh_n\delta_n}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{z-\Delta_i^n X}{\delta_n}\right)\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}$$

となる．ただし，δ_n の選び方にはやはり h_n や r_n との関係が重要である．これらの詳細は Shimizu (2006a) にあり，古典的な密度推定の理論と同様にして $\hat{f}_n(z)$ の一様平均 2 乗誤差の評価が得られている．

3.3 有限頻度型における母数推定

真のモデルを (1.1) とし，係数過程 a,b が (2.6) のようなマルコフ型と仮定する．このとき，以下のようなパラメトリックモデルによってモデルを推定することを考えよう．

$$dX_t = U_\theta(X_t)\,dt + V_\sigma(X_t)\,dW_t + dL_t^\varepsilon(\xi). \tag{3.7}$$

ここに，θ, σ, ξ が推定の対象となる母数で，それぞれの母数空間を $\Theta, \Pi, \Xi\,(\subset \mathbb{R})$ とし，これらはコンパクトと仮定する．また，$\alpha = (\theta, \sigma, \xi)$ とおく．$U_\theta(x), V_\sigma(x)$ は x や母数について十分滑らかな関数で，それぞれ母数について一様に $\mathbb{R}$ 上でリプシッツ連続とする．$L^\varepsilon(\xi)$ はレヴィ密度 $f_\xi(z)$ を持ち (1.2) の分解を持つレヴィ過程とする．母数の真値を $\alpha_0 = (\theta_0, \sigma_0, \xi_0)$，すなわち，$U_{\theta_0} \equiv U, V_{\sigma_0} \equiv V, f_{\xi_0} \equiv f$ とし，それらはそれぞれ，Θ, Π, Ξ のある開部分集合に含まれるものとする．

仮定をいくつか用意しよう．以下，関数 $g(t)$ に対して $\partial_t g(t) := \frac{\partial}{\partial t} g(t)$ と書く．

仮定 1. ある正数 C が存在し，任意の $k = 1, 2, 3$，$j = 1, 2$ に対して，

$$\sup_{\theta\in\Theta, \sigma\in\Pi} \left(|\partial_\theta^k U_\theta(x)| + |\partial_\sigma^k V_\sigma(x)| + |\partial_x^j U_\theta(x)| + |\partial_x^j V_\sigma(x)| \right) \le C(1+|x|)^C$$

であり，拡散係数 V_σ は一様非退化である．すなわち，以下が成り立つ．

$$\inf_{x\in\mathbb{R}, \sigma\in\Pi} |V_\sigma(x)| > 0.$$

仮定 2. ある正数 C が存在し，任意の $p > 0$ と $k = 0, 1, 2, 3$，$l = 0, 1$ に対して

$$\sup_{\xi\in\Xi} |\partial_\xi^k \partial_x^l \log f_\xi(z)| \le C(1+|z|)^C, \quad \sup_{\xi\in\Xi} \int_{|z|>1} |z|^p f_\xi(z)\,dz < \infty.$$

仮定 3. X は定常分布 π を持つ強定常過程で，任意の $p > 0$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p\,\pi(dx) < \infty. \tag{3.8}$$

また，π-可積分な関数 g に対して，X は次の意味でエルゴード的である．

$$P\text{-}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g(X_t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\pi(dx). \tag{3.9}$$

仮定 4. $\theta \ne \theta_0$ なる全ての $\theta \in \Theta$ に対して $U_\theta \not\equiv U$，$\xi \ne \xi_0$ なる全ての $\xi \in \Xi$ に対して $f_\xi \not\equiv f$，さらに，$\sigma \ne \sigma_0$ なる全ての $\sigma \in \Pi$ に対して $V_\sigma \not\equiv V$ である．

仮定 1，2 や (3.8) は，様々な可積分性を保証するための十分な条件である．条件 (3.9) は，推定量の漸近的性質を導く上で必要になる極限定理であり，実用上は時に強い仮定であるが，確率過程の統計においてはしばしば標準的である．仮定 3 を保証するいくつかの十分条件が知られている (Masuda, 2007)．また，仮定 4 はモデルの識別性条件である．

本節では，X が有限頻度型，すなわち，

$$\sup_{\xi\in\Xi} \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z)\,dz < \infty \tag{3.10}$$

の下での推定を考えよう．したがって，ここでは初めから $\varepsilon = 0$ と設定しておく．

ここでもやはり連続観測の場合を考えることから始める．前節で述べたように，飛躍の列 $(Z_i)_{i=1,2,\ldots,N_T}$ が既知のとき，$L^0(\theta_0)$ が連続的に観測されていると考えることができて，Akritas and Johnson (1981) より飛躍に対する対数尤度は

$$l_T^d(\xi) := \sum_{i=1}^{N_T} \log f_\xi(Z_i) - T\int_{\mathbb{R}} f_\xi(z)\,dz$$

とかける．こうなれば，今までと同様な離散化ができて

$$\hat{l}_n^d(\xi) := \sum_{i=1}^{n} \log f_\xi(\Delta_i^n X)\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} - nh_n \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z)\,dz$$

が飛躍に含まれる母数に対する自然な推定関数であろう．

次に，$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} = 0$ となる区間に対応するデータ $(X_{t_{i-1}^n}, X_{t_i^n})$ を考えよう．この区間では，我々は $J_i^n = 0$ と判断している．そのような仮定の下では

$$X_{t_i^n} = X_{t_{i-1}^n} + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} U_{\theta_0}(X_t)\,dt + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} V_{\sigma_0}(X_t)\,dW_t \tag{3.11}$$

が成り立っているはずである．このとき，h_n が十分小さくとられていれば，(3.11) は次のような差分方程式で近似されると考えてよいであろう．

$$X_{t_i^n} \approx X_{t_{i-1}^n} + U_{\theta_0}(X_{t_{i-1}^n})(t_i^n - t_{i-1}^n) + V_{\sigma_0}(X_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}). \tag{3.12}$$

このとき，$X_{t_i^n} = x$ なる条件の下で，近似的に

$$X_{t_i^n} \sim N\left(x + h_n U_{\theta_0}(x), h_n V_{\sigma_0}^2(x)\right) \tag{3.13}$$

と考えられるから，$X_{t_{i-1}^n} = x$ から $X_{t_i^n} \in dy$ となる推移確率密度を

$$p_n(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi h_n V_{\sigma_0}^2(x)}} \exp\left(-\frac{(y - x - h_n U_{\theta_0}(x))^2}{2h_n V_{\sigma_0}^2(x)} \right) \tag{3.14}$$

によって近似することができる．ここで，(3.12) のような近似が出来るのは漸近的に $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} = 0$ となる区間だけであることに注意すると，連続部分に関する尤度の近似として，$\sum_{i=1}^n \log p_n(X_{t_{i-1}^n}, X_{t_i^n}) \cdot \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}$ を考えることにより以下のものが自然に考えられるであろう．

$$\hat{l}_n^c(\theta,\sigma) := -\sum_{i=1}^n \frac{(\Delta_i^n X - h_n U_\theta(X_{t_{i-1}^n}))^2}{2h_n V_\sigma^2(X_{t_{i-1}^n})} \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \log V_\sigma^2(X_{t_{i-1}^n})\mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}. \tag{3.15}$$

これは (3.14) を用いた連続的推移に関する対数尤度の“近似”といえるだろう．ここで注意しておくが，(3.12)–(3.14) で行われた直感的な近似はかなり粗っぽいもので，数学的には，尤度の近似として必ずしも好ましいものではない (Uchida and Yoshida, 2005)．しかし，我々の目的は推移密度の近似ではないので，(3.15) を推定関数に用いて良い推定量が得られるならば，p_n の精密さは問題ではない．実際，拡散過程の離散観測推定には，同様の近似による推定関数の有効性が知られており (例えば Kessler, 1997 を見よ)，我々はこの近似の作業を忘れて，いきなり (3.15) から議論を始めてよい．

以上より，母数 α_0 の推定量 $\hat{\alpha}_n = (\hat{\theta}_n, \hat{\sigma}_n, \hat{\xi}_n)$ を以下のように定義する．

$$\ell_n(\hat{\alpha}_n) = \sup_{\alpha \in \Theta \times \Pi \times \Xi} \ell_n(\alpha). \tag{3.16}$$

ただし，$\ell_n(\alpha) := \hat{l}_n^c(\theta,\sigma) + \hat{l}_n^d(\xi)$ である．$\Theta \times \Pi \times \Xi$ はコンパクト集合なので，このような $\hat{\alpha}_n$ は常に存在する．

$\ell_n(\alpha)$ はある意味で観測 $\{X_{t_i^n}\}_{i=0,1,\dots,n}$ の“近似的”な対数尤度であったから，$\hat{\alpha}_n$ は MLE 型推定量と言う事が出来よう．

以下，命題 2.1 を使うために，ある定数 $K > 0, \gamma > -1$ が存在して，

$$f_{\xi_0}(z)\mathbf{1}_{\{|z| \le 1\}} \le K|z|^\gamma \tag{3.17}$$

となる設定を考えよう．次の 2 つの定理は Shimizu and Yoshida (2006) による．

定理 3.5. 仮定 1-4 をおき，(3.17) を仮定する．また，r_n を (2.12) で定め，$n\to\infty$ のとき，$h_n\to 0$，$nh_n\to\infty$ とする．このとき，(3.16) の $\hat{\alpha}_n$ に対して

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat{\alpha}_n=\alpha_0$$

が成り立つ．

定理 3.6. 定理 3.5 と同じ条件を仮定する．更に，ある定数 $1<\zeta<2\rho(1+\gamma)+1$ が存在して，$n\to\infty$ のとき，$nh_n^{\zeta\wedge 2}\to 0$ とする．このとき，

$$M_n(\hat{\alpha}_n-\alpha_0)^*\to^d N_3\left(0,\Sigma_1^{-1}\right)\quad (n\to\infty) \tag{3.18}$$

が成り立つ．ただし，$*$ は転置を表し，

$$M_n=\mathrm{diag}\big(\sqrt{nh_n},\sqrt{n},\sqrt{nh_n}\big),$$
$$\Sigma_1=\mathrm{diag}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial_\theta U_{\theta_0}(x)}{V^2_{\sigma_0}(x)}\pi(dx),2\int_{\mathbb{R}}\frac{(\partial_\sigma V_{\sigma_0}(x))^2}{V^2_{\sigma_0}(x)}\pi(dx),\int_{\mathbb{R}}(\partial_\xi\log f_{\xi_0}(z))^2 f_{\xi_0}(z)\,dz\right)$$

である．

注意 3. Shimizu and Yoshida (2006)，Proposition 3.3, 3.6 により，適当な条件を満たす関数 $H_\alpha(x)$ に対して，

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_{\hat{\alpha}_n}(X_{t^n_{i-1}})=\int_{\mathbb{R}}H_{\alpha_0}(x)\pi(dx), \tag{3.19}$$

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n H_{\hat{\alpha}_n}(\Delta^n_i X)\mathbf{1}_{\mathcal{H}^n_i}=\int_{\mathbb{R}}H_{\alpha_0}(z)f(z)\,dz \tag{3.20}$$

となるので，これを利用して漸近分散 Σ_1 の一致推定量を構成できる．また，$\hat{\xi}_n$ の漸近分散については，十分な正則条件の下で $\int_{\mathbb{R}}(\partial_\xi\log f_{\hat{\xi}_n}(z))^2 f_{\hat{\xi}_n}(z)\,dz$ でもよい．

漸近分散 Σ^{-1} は，連続時間尤度から計算される漸近フィッシャー情報行列と一致することがわかるので (Sørensen, 1991)，$\hat{\alpha}_n$ は漸近有効推定量といえる．

ここで注意すべきは，$\hat{\theta}_n,\hat{\xi}_n$ と $\hat{\sigma}_n$ の収束速度の違いである．(3.18) より σ_0 に関する情報量は n のオーダーで増えており，3.1 節と同様，ここでも σ_0 は $nh_n=T$ を固定した下で推定可能である．一方，θ_0,ξ_0 に関するそれは nh_n オーダーであり，一致推定のためには $nh_n\to\infty$ が必要となる．

定理 3.6 において，漸近設計 $nh_n^{\zeta\wedge 2}\to 0$ が要求されているが，これは，h_n の収束速度と，γ，ρ の間の関係を与えている．たとえば γ が大きいモデル設定では，大きさが 0 に近い小さな飛躍は起こりにくく飛躍の判別は易しい．このときは

$$\frac{1}{2(1+\gamma)}<\rho<\frac{1}{2} \tag{3.21}$$

となるように ρ を選ぶことで，$\zeta\geq 2$ を取ることが出来て，ここでの最低条件である $nh_n^2\to 0$ の下での漸近正規性が得られる．$\gamma>0$ であれば，ρ を 1/2 に出来るだけ近く選んでおきさえすれば (3.21) を満たすので，$nh_n^2\to 0$ で十分である．しかし，$\gamma\leq 0$ である場合には，(3.21) を満たす ρ は存在せず，$1<\zeta<2\rho(1+\gamma)+1<2$ となるので，h_n には更に早い収束 $nh_n^\zeta\to 0$ が要求されることになる．これは，小さな飛躍が多いときには高頻度なデータが必要であるという直感と合っている．

Shimizu and Yoshida (2006) では，飛躍項を本稿より一般的な設定にして $nh_n^2 \to 0$ の下での漸近正規性を示しているために，ρ や γ には若干の制限を設けて議論されており，$\gamma > 3$, $2/(1+\gamma) \le \rho < 1/2$ とやや厳しい条件になっている．したがって，定理 3.6 が Shimizu and Yoshida (2006) の拡張というわけではないことに注意されたい．

以上の議論は，母数空間 Θ, Π, Ξ が多次元の場合にも同様に拡張可能である．

例 1. 次のような確率微分方程式に従う確率過程は，オルンスタイン・ウーレンベック (Ornstein-Uhlenbeck, OU) 過程といわれる．

$$dX_t = -\theta_0 X_t\, dt + \sqrt{\sigma_0}\, dW_t + \int_{\mathbb{R}} z\, (\mu(dt,dz) - f(z) dz dt). \tag{3.22}$$

ここに，θ_0, σ_0 は定数である．レヴィ密度の形を

$$f(z) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi\xi_0}} \exp\left(-\frac{(z-\beta_0)^2}{2\xi_0} \right) \quad (\lambda_0, \xi_0 > 0, \beta_0 \in \mathbb{R})$$

とすると，(1.6) において $Z_i \sim N_1(\beta_0, \xi_0)$，$N_t \sim Po(\lambda_0 t)$ という飛躍構造になる．

ここでは，$\alpha_0 = (\theta_0, \sigma_0, \lambda_0, \beta_0, \xi_0)$ なる多次元母数の推定量を与えてみよう．このモデルでは，仮定 1，2，4 を満たすことは容易に確認できる．また，$\theta_0 > 0$ とすると仮定 3 を満たすことも知られている．

推定関数は以下のようにかける．

$$\begin{aligned}
\ell_n(\alpha) = &-\sum_{i=1}^n \frac{(\Delta_i^n X + \theta X_{t_{i-1}^n} h_n)^2}{2h_n\sigma} \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \log\sigma \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c} \\
&-\sum_{i=1}^n \frac{(\Delta_i^n X - \beta)^2}{2\xi} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \log\xi \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} + \sum_{i=1}^n \log\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} - nh_n\lambda
\end{aligned}$$

したがって，$\partial_\alpha := (\partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\lambda, \partial_\beta, \partial_\xi)$ として推定方程式 $\partial_\alpha \ell_n = 0$ を解くことにより，以下が得られる．

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_n &= -\frac{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}^n} \Delta_i^n X \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}}{h_n \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}^n}{}^2 \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}}, \\
\hat{\sigma}_n &= \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X + \hat{\theta}_n X_{t_{i-1}^n} h_n)^2 \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}}{h_n \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}}, \\
\hat{\lambda}_n &= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}, \\
\hat{\beta}_n &= \frac{1}{nh_n\hat{\lambda}_n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^n X \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}, \\
\hat{\xi}_n &= \frac{1}{nh_n\hat{\lambda}_n} \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X - \hat{\beta}_n)^2 \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}.
\end{aligned}$$

飛躍特性量に対する推定量 $\hat{\lambda}_n$，$\hat{\beta}_n$，$\hat{\xi}_n$ らは (3.5) と同じ型の推定量であることに注意しておこう．パラメトリックモデルでは仮定 2 のような正則条件で尤度関数を制御することにより，(3.6) のような修正は不要になる．

3.4 無限頻度型における母数推定

本節では前節と同じパラメトリックモデル (3.7) を考えるが，(3.10) を仮定しない．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz = \infty \tag{3.23}$$

かもしれないという状況を考えよう．そこで，$\varepsilon = 1$ と設定した下で母数の推定を考えることにする．このとき，$\varepsilon_n \downarrow 0$ となるような列を選んで，モデルを以下のように書き直すことができる．

$$dX_t = U^n_{\theta,\xi}(X_t)\,dt + V_\sigma(X_t)\,dW_t + dB^{\varepsilon_n}_t(\xi) + dJ^{\varepsilon_n}_t(\xi). \tag{3.24}$$

ここに，

$$U^n_{\theta,\xi}(x) = U_\theta(x) - \int_{\varepsilon_n<|z|\le 1} z f_\xi(z)\,dz$$

である．2 章で述べたように，ε_n を適当に選ぶことで，モデル (3.24) は飛躍が J^{ε_n} のみの有限頻度型モデルとみなすことができて, (2.13) が以下の命題 3.1 のように正当化される．

以下，次のような記号を用いる．

$$D^n_{i,0}(\varepsilon_n) := \mathcal{H}^n_i \cap \{J^n_i(\varepsilon_n) = 0\}, \quad D^n_{i,1}(\varepsilon_n) := \mathcal{H}^n_i \cap \{J^n_i(\varepsilon_n) \ge 1\},$$
$$C^n_{i,0}(\varepsilon_n) := (\mathcal{H}^n_i)^c \cap \{J^n_i(\varepsilon_n) = 0\},\ C^n_{i,1}(\varepsilon_n) := (\mathcal{H}^n_i)^c \cap \{J^n_i(\varepsilon_n) \ge 1\}.$$

ただし，$J^n_i(\varepsilon_n)$ の定義は (2.13) で与えたものとする．また，

$$\lambda^{(n)}_0 = \int_{|z|>\varepsilon_n} f_{\xi_0}(z)\,dz$$

とする．

命題 3.1. 閾値 r_n を (2.12) で定め，$\rho < \rho'$ に対して $\varepsilon_n = h_n^{\rho'}$ とする．また，任意の $q > 0$ に対して $\int_{|z|>1} z^q f(z)\,dz < \infty$ とし，$n \to \infty$ のとき $\lambda^{(n)}_0 h_n = O(1)$ とする．このとき，任意の $p \ge 1$ に対して，n を十分大きくとれば以下が成り立つ．

$$P(D^n_{i,0}(\varepsilon_n)|\mathcal{F}_{t^n_{i-1}}) = e^{-\lambda^{(n)}_0 h_n} R_1(h^p_n, X_{t^n_{i-1}}),\quad P(C^n_{i,0}(\varepsilon_n)|\mathcal{F}_{t^n_{i-1}}) = e^{-\lambda^{(n)}_0 h_n} R_2(1, X_{t^n_{i-1}}),$$
$$P(D^n_{i,1}(\varepsilon_n)|\mathcal{F}_{t^n_{i-1}}) +\ P(C^n_{i,1}(\varepsilon_n)|\mathcal{F}_{t^n_{i-1}}) = \lambda^{(n)}_0 h_n e^{-\lambda^{(n)}_0 h_n} R_3(1, X_{t^n_{i-1}}).$$

ただし，$R_j(u_n, x)$ は数列 u_n と定数 $C > 0$ に対して $R_j(u_n, x) \le C u_n (1 + |x|)^C$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ の関数である．

(2.9) - (2.11) と同様に考えてみると，もし $\lambda^{(n)}_0 h_n = o(1)$ ならば，$\{J^n_i(\varepsilon_n) = 0\} \approx C^n_{i,0}(\varepsilon_n)$，かつ $C^n_{i,0}(\varepsilon) \approx (\mathcal{H}^n_i)^c$ が示唆されるので

$$\mathbf{1}_{(\mathcal{H}^n_i)^c} \approx \mathbf{1}_{\{J^n_i(\varepsilon_n)=0\}}$$

となって，フィルター $(\mathcal{H}^n_i)^c$ によって，連続部分に関する情報を取り出すことができるであろう．$\rho < \rho'$ としたのは，B^ε を小さくして $P(D^n_{i,0}(\varepsilon_n))$ を無視するためである．しかしながら，

$$\lim_{n\to\infty} P(C^n_{i,1}(\varepsilon_n))/P(D^n_{i,1}(\varepsilon_n)) = 1$$

が示唆されるので，$\{J^n_i(\varepsilon_n) \ge 1\}$ を $D^n_{i,1}(\varepsilon_n)$ で代用することはできない．つまり，$\varepsilon_n (< h^\rho_n)$ が小さすぎて，たとえ ε_n 以上の飛躍が起こったとしても $|\Delta^n_i X| > h^\rho_n$ とならない可能性が残り，$C^n_{i,1}(\varepsilon_n)$ を無視できないのである．では，$\rho' \le \rho$ と取って，ε_n を大きく選んではどうかと思わ

れるかもしれないが，このときは B_n^ε の飛躍が大きくなり $P(D_{i,0}^n(\varepsilon_n))$ が無視されなくなってうまくいかない．しかし，$\rho<\rho'$ の取り方であれば，

$$\lim_{n\to\infty} P(D_{i,0}^n(\varepsilon_n))/P(D_{i,1}^n(\varepsilon_n))=0$$

が示唆されるので，

$$\mathcal{H}_i^n \quad \approx \quad D_{i,1}^n(\varepsilon_n)$$

は言えるであろう．つまり飛躍の情報の多くは $\mathcal{H}_i^n$ に入っていると考えられる．

以上の考察から，Shimizu (2006b) では α_0 の推定方程式として以下のものが提案されている．

$$\Phi_n(\hat\alpha_n)=0, \quad \Phi_n(\alpha):=\big(\partial_\theta l_n(\theta,\sigma),\partial_\sigma l_n(\theta,\sigma),\phi_n^{(k)}(\theta,\xi)\big). \tag{3.25}$$

ただし，$k\geq 2$ なる自然数 k に対して，

$$l_n(\theta,\sigma):=-\sum_{i=1}^n \frac{(\Delta_i^n X-h_nU_{\theta,\xi}^n(X_{t_{i-1}^n}))^2}{2h_nV_\sigma^2(X_{t_{i-1}^n})}\mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\log V_\sigma^2(X_{t_{i-1}^n})\mathbf{1}_{(\mathcal{H}_i^n)^c},$$

$$\phi_n^{(k)}(\theta,\xi):=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n(\Delta_i^nX-h_nU_{\theta,\xi}^n(X_{t_{i-1}^n}))^k\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}-\int_{\mathbb{R}}z^kf_\xi(z)\,dz.$$

上記の $k\geq 2$ の値は，推定量 $\hat\xi_n$ が定義されるように観測者が選ぶものである．たとえば，$f_\xi(z)=f_\xi(-z)$ のようなモデルに対して k を奇数に選ぶと ϕ_n^k から ξ が消えて $\hat\xi_n$ が定まらない．また，ξ が多次元母数のときには，ξ の次元の数だけ $\phi_n^{(k)}(\theta,\xi)\,(k=k_1,k_2,\dots)$ を用意すればよい．

$l_n(\theta,\sigma)$ は前節(3.15)において U_θ を $U_{\theta,\xi}^n$ で置き換えたものであり，$\hat\theta_n,\hat\sigma_n$ は前節同様，漸近的には MLE 型といえるであろう．一方，ξ に関する推定関数 ϕ_n は一種のモーメント法であり，適当な条件下で

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\phi_n^{(k)}(\theta,\xi)=\int_{\mathbb{R}}z^kf_{\xi_0}(z)\,dz$$

となる事実に依っている．この意味では，

$$\phi_n^{(k)}(\theta,\xi)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n(\Delta_i^nX)^k\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}-\int_{\mathbb{R}}z^kf_\xi(z)\,dz$$

としても漸近的には同等である．推定精度は f_ξ の形や n,h_n の値，ε_n の取り方等に依存するので，どちらが良いか一概には言えない．

さて，漸近挙動を述べるために仮定を置く．

仮定 5． 任意の $\xi\in\Xi$，$p\geq 1$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}}|z|^p\,(f_\xi(z)+\partial_\xi f_\xi(z))\,dz<\infty.$$

仮定 5 の下で以下の極限が定義される．

$$\lim_{n\to\infty}U_{\theta,\xi}^n(x)=U_\theta(x)-\int_{|z|\leq 1}zf_\xi(z)\,dz. \tag{3.26}$$

定理 3.7． 命題 3.1 と同じ条件を仮定し，仮定 1，3-5 を置く．また，$n\to\infty$ のとき，$h_n\to 0, nh_n\to\infty$，さらに $\lambda_0^{(n)}h_n^\rho\to 0$ とする．このとき，(3.25) の $\hat\alpha_n$ に対して

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat\alpha_n=\alpha_0$$

が成り立つ．

定理 3.8. 定理 3.7 と同じ条件を仮定する．さらに，$n \to \infty$ のとき $n(\lambda_0^{(n)})^2 h_n^{4\rho} \to 0$, $\sqrt{n}\int_{|z|\le\varepsilon_n}|z|^2 f_{\xi_0}(z)\,dz \to 0$ とする．このとき，

$$M_n(\hat{\alpha}_n - \alpha_0)^* \to^d N_3\left(0, \Sigma_2^{-1}\right) \quad (n \to \infty) \tag{3.27}$$

が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned} M_n &= \mathrm{diag}\left(\sqrt{nh_n}, \sqrt{n}, \sqrt{nh_n}\right), \\ \Sigma_2 &= \mathrm{diag}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_\theta U_{\theta_0}(x)}{V_{\sigma_0}^2(x)}\pi(dx), 2\int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_\sigma V_{\sigma_0}(x))^2}{V_{\sigma_0}^2(x)}\pi(dx), \Gamma_k(\xi_0)\right), \\ \Gamma_k(\xi_0) &:= \left(\int_{\mathbb{R}} z^k \partial_\xi f_{\xi_0}(z)\,dz\right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}} z^{2k} f_{\xi_0}(z)\,dz\right)^{-1}. \end{aligned}$$

漸近分散 Σ_2 を見ると，$\hat{\theta}_n, \hat{\sigma}_n$ の漸近分散は定理 3.6 のそれと一致しており，有効性が得られるが，$\hat{\xi}_n$ はモーメント型推定量であるため有効性は失われている．また，$n(\lambda_0^{(n)})^2 h_n^{4\rho} \to 0$ であるから，$nh_n^2 \to 0$ よりも高頻度な観測を要求されていることにも注意されたい．

注意 4. 漸近分散 Σ_2 の中の π-積分による量は，(3.19) と同様にして一致推定量の構成が可能である．$\Gamma_k(\xi_0)$ について，$\Gamma_k(\xi)$ が ξ について連続となる条件下では $\Gamma_k(\hat{\xi}_n)$ でよいが，そうでないときには $\int_{\mathbb{R}} z^k \partial_\xi f_{\xi_0}(z)\,dz$ の推定が容易でない．一方，$\int_{\mathbb{R}} z^{2k} f_{\xi_0}(z)\,dz$ は

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^{2k} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} = \int_{\mathbb{R}} z^{2k} f_{\xi_0}(z)\,dz$$

として推定することができる．詳細は Shimizu (2006b)，Appendix を参照されたい．

例 2. OU 過程 (3.22) で，レヴィ密度が以下のモデルを考えよう．

$$f_{\xi_0,\beta_0}(z) = \frac{1}{2|z|}\xi_0 e^{-\beta_0|z|} \quad (\xi_0, \beta_0 > 0). \tag{3.28}$$

このようなレヴィ密度をもつレヴィ過程 L^ε は形状 (shape) 母数 ξ，尺度 (scale) 母数 β のバリアンス・ガンマ過程と言われる．これは (3.23) を満たすので無限頻度型モデルである．ここで，f は偶関数で $U_{\theta,\xi}^n(x) \equiv \theta x$ となるので，$\hat{\theta}_n, \hat{\sigma}_n$ は，例 1 と同じ形で得られる．また，やはり $\theta_0 > 0$ としておけば仮定 3 が満たされ，$nh_n^{4\rho}(\log h_n)^2 \to 0\,(n \to 0)$ となるように ρ を選んでおけば，定理 3.8 のすべての仮定を満たすことが確認される．

$$T_{n,k}(\theta) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X + \theta X_{t_{i-1}^n} h_n)^k \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n}$$

とおくと，ξ, β に関する推定方程式は，たとえば以下のようにすればよい．

$$T_{n,k}(\hat{\theta}_n) - \int_{\mathbb{R}} z^k f_{\xi,\beta}(z)\,dz = 0 \quad (k = 2, 4).$$

ここで，$\int_{\mathbb{R}} z^2 f_{\xi,\beta}(z)\,dz = \xi\beta^{-2}$，$\int_{\mathbb{R}} z^4 f_{\xi,\beta}(z)\,dz = 6\xi\beta^{-4}$ となることから，

$$\hat{\xi}_n = \frac{6T_{n,2}^2(\hat{\theta}_n)}{T_{n,4}(\hat{\theta}_n)}, \quad \hat{\beta}_n = \left\{\frac{6T_{n,2}(\hat{\theta}_n)}{T_{n,4}^2(\hat{\theta}_n)}\right\}^{1/2}$$

により同時推定量が得られる．

4. まとめと課題

閾値推定法は(2.1)のような飛躍判別フィルターを用いて，各観測区間 $(t_{i-1}^n, t_i^n]$ における観測増分 $|\Delta_i^n X|$ の大小によって飛躍の有無を判断するものである．

飛躍の存在が認められたとき，有限頻度型であれば，その飛躍の大きさを $\Delta_i^n X$ によって近似することができる．このような飛躍の検出と飛躍幅の推定によって，連続観測時の推定法の直接的な離散化が可能になるのであった．特に，飛躍部分の推定法については，$\{\Delta_i^n X; \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i^n} = 1\}$ を独立同一分布に従う飛躍幅の近似と見ることで，I.I.D. の場合の古典的推定理論からの類推が可能になり，推定量を直感的に構成することができる．無限頻度型の場合でも，フィルター $\mathcal{H}_i^n$ が“大きな”飛躍の検出フィルターの役割を果たし，限定的ながら飛躍の情報を取り出すことができた．

本稿では，簡単のために，飛躍項がレヴィ過程 L^ε のみでモデル化されたものを扱ったが，さらに一般に，X は多次元値で，

$$dX_t = a(t,\omega)\,dt + b(t,\omega)\,dW_t + \int_{\mathbb{R}} c(t,\omega,z)\,(\mu(dt,dz) - \nu(dz)dt) \tag{4.1}$$

のように，飛躍項を拡張して議論することも可能である．詳しくは各節に挙げた文献を参照されたい．しかし，3.2 節の議論を上のモデルに適用するときには，潜在的な飛躍 Z_i を識別するための条件が c に課せられなければならない．そのため，Shimizu (2006a, 2007) では $c(t,\omega,z) = \tilde{c}(X_{t-}(\omega), z)$ とし，$\tilde{c}$ の形を既知として議論している．言うまでもなく c が未知の場合の推定は重要で，これは今後の課題の一つであろう．

無限頻度型を扱った 3.4 節の議論では，仮定 5 において $\int_{|z|<1} |z| f(z)\,dz < \infty$ を要求しており，これは L^ε の総変動が有界であることを示している (Sato, 1999)．しかしながら，安定 (stable) 過程のようなレヴィ過程では，安定指数 α が $\alpha \in [1,2)$ のとき $\int_{|z|<1} |z| f(z)\,dz = \infty$ であり，より高頻度な“小さな”飛躍によって無限変動になる．このような高い飛躍頻度を持つモデルにおける離散観測推定は重要な課題である．更に，無限頻度型においては，飛躍の情報をより緻密に取り出せるようなフィルターの開発も重要な課題の一つであろう．

閾値推定法において最も本質的なのは閾値 r_n の選択であり，その候補は 2.2 節で述べたように一通りではない．たとえば，3.3–3.4 節においては $r_n = h_n^\rho, \rho \in (0,1/2)$ としたが，$0 < \varrho < \rho < 1/2$ なる定数 ϱ に対して閾値を $r_n = h_n^\varrho$ としても，ϱ が要求される条件を満たす限り漸近的結果にはなんら影響はない．また，定数 $c > 0$ を使って $r_n = c h_n^\rho$ としても，c は漸近論の結果になんの影響も及ぼさない．しかしながら，実際の応用の場面では，サンプル数 n はすでに与えられて決まっており，ϱ や c が異なれば飛躍の判定基準が異なる．結果として推定値は異なるが，どちらの推定値が良いのかは漸近的には決定できないことになる．したがって，実際上 r_n をどう決めるかという問題は，閾値推定において決定的に重要である．この問いに対して，Shimizu (2008) では (1.1) のような有限頻度型モデルにおいて統計的な r_n の選択方法が提案されており，また，Shimizu (2006a) ではいくつかの経験的な方法が提案されている．しかし，いずれの方法もモデル依存性が強く，今のところ決定的といえる解答は見つかっていない．今後の更なる研究が期待される．

参 考 文 献

Aït-Sahalia, Y. (2007). Estimating continuous-time models using discretely sampled data, *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Ninth World Congress of the Econometric Society* (eds. R. Blundell, P. Torsten and W. K. Newey), Vol. 3, 261–327 (Chapter

9), Cambridge University Press, New York.

Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2008). Testing for jumps in a discretely observed process, *The Annals of Statistics* (to appear).

Akritas, M. G. and Johnson, R. A. (1981). Asymptotic inference in Lévy processes of the discontinuous type, *The Annals of Statistics*, **9**(3), 604–614.

Asmussen, S. and Rosinski, J. (2001). Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation, *Journal of Applied Probability*, **38**, 482–493.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussion), *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 1–48.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2006). Econometrics of testing for jumps in financial econometrics using bipower variation, *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 1–30.

Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J., Podolskij, M. and Shephard, N. (2006a). A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales, *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance* (eds. Y. Kabanov, R. Liptser and J. Stoyanov), 33–68, Springer, Berlin.

Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. and Winkel, M. (2006b). Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps, *Stochastic Processes and Their Applications*, **116**(5), 796–806.

Basawa, I. V. and Brockwell, P. J. (1978). Inference for gamma and stable processes, *Biometrika*, **65**, 129–133.

Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measure*, Wiley, New York.

Höpfner, R. and Jacod, J. (1994). Some remarks on the joint estimation of the index and the scale parameter for stable processes, *Asymptotic Statistics*, Contributions to Statistics, 273–284, Physica, Heidelberg.

伊藤 清(1991).『確率論』, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 東京.

Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Kessler, M. (1997). Estimation of diffusion processes from discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 211–229.

Kutoyants, Y. (1984). *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, Heldermann Verlag, Berlin.

Kutoyants, Y. (2003). *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer-Verlag, London.

Mancini, C. (2004). Estimation of the characteristics of the jumps of a general poisson-diffusion model, *Scandinavian Actuarial Journal*, No. 1, 42–52.

Mancini, C. (2006). Nonparametric threshold estimation for models with stochastic diffusion coefficient and jumps, Working paper, http://arxiv.org/abs/math/0607378.

Masuda, H. (2007). Ergodicity and exponential β-mixing bounds for multidimensional diffusions with jumps, *Stochastic Processes and Their Applications*, **117**, 35–56.

Nishiyama, Y. (2008). Nonparametric estimation and testing time-homogeneity for processes with independent increments, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 1043–1055.

Prakasa Rao, B. L. S. (1999). *Semimartingales and Their Statistical Inference*, Monographs on Statistics and Applied Probability, **83**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

Prakasa Rao, B. L. S. (2000). *Statistical Inference for Diffusion Type Processes*, Edward Arnold, London, Oxford University Press, New York.

Protter, P. E. (2003). *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

佐藤健一（1990）．『加法過程』，紀伊国屋書店，東京．

Sato, K. (1999). *Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **68**, Cambridge University Press, Cambridge.

Shimizu, Y. (2006a). Density estimation of Lévy measure for discretely observed diffusion processes with jumps, *Journal of the Japan Statistical Society*, **36** (1), 37–62.

Shimizu, Y. (2006b). M-estimation for discretely observed ergodic diffusion processes with infinitely many jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9** (2), 179–225.

Shimizu, Y. (2007). Functional estimation for Levy measures of semimartingales with Poissonian jumps, *Journal of Multivariate Analysis* (to appear).

Shimizu, Y. (2008). A practical inference for discretely observed jump-diffusions from finite samples, *Journal of the Japan Statistical Society* (to appear).

Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006). Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9** (3), 227–277.

Sørensen, M. (1991). Likelihood methods for diffusions with jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes* (eds. N. U. Prabhu and I. V. Basawa), 67–105, Marcel Dekker, New York.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2005). AIC for ergodic diffusion processes from discrete observations, MHF Preprint Series, MHF2005-12, Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka.

Woerner, J. (2001). Statistical analysis for discretely observed Lévy processes, Ph. D. Thesis, Albert Ludwigs University of Freiburg.

Yoshida, N. (1992). Estimation for diffusion processes from discrete observations, *Journal of Multivariate Analysis*, **41**, 220–242.

118 Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 57, No. 1, 97–118 (2009)

Threshold Estimation for Jump-type Stochastic Processes from Discrete Observations

Yasutaka Shimizu

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

We consider a stochastic process that satisfies a stochastic differential equation with jumps that includes some unknowns. We observed the process at discrete time points. In application, it is important to estimate unknown parameters or some functionals of the process from discrete samples. The recent development of statistical inference for such discretely observed models is remarkable and many interesting results have been obtained by many authors. This paper focuses on overviewing the threshold estimation method, which responds flexibly to many types of estimation problems. The essence of the method is to employ an asymptotic filter that detects sampling intervals where a jump has occurred. The filter judges that there is a jump in the interval if the corresponding increment of neighboring data is larger than a threshold that is meaningfully determined by observers. The error rate of the judgement decreases as the sampling frequency increases if a suitable threshold is used. The purpose of this paper is to provide an easy and intuitively understandable explanation of the theory with some recent asymptotic results and to introduce some practical issues to be investigated in the future.

Key words: Jump-type stochastic processes, discrete observations, threshold estimation, asymptotic inference, selecting threshold.