統計数理(2009)
第 57 巻 第 1 号 67–81

特集「確率過程の統計解析」
［研究詳解］

小さな拡散過程のドリフトパラメータの推定

内田 雅之†

（受付 2008 年 6 月 20 日；改訂 2008 年 8 月 21 日）

要　旨

微小拡散パラメータ ε をもつ 1 次元拡散過程のドリフトパラメータの推定を考える．最初に連続観測の下での最尤推定量について概観し，その後，時点 $k/n, k=0,1,\ldots,n$ で観測された離散データに対して，推移密度関数の局所正規近似(オイラー・丸山近似)に基づくコントラスト関数を構成し，それから得られる最大コントラスト推定量が $\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$，さらに $(\varepsilon n)^{-1}=o(1)$ の下，漸近有効であることを解説する．次に，拡散過程の生成作用素における固有方程式を満たす固有関数と固有値を用いてマルチンゲール推定関数を導出し，それから得られる M-推定量の $\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の下での漸近的性質について考察する．しかしながら，一般に固有関数と固有値に基づいたマルチンゲール推定関数を明示的に導出することはできない．そこで，推定関数の適用範囲を拡張するために，近似マルチンゲール推定関数を構成し，それから導出される M-推定量の $\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の下での漸近的性質について述べる．

キーワード： 微小拡散過程，離散観測，マルチンゲール推定関数，漸近有効性，固有関数.

1. はじめに

次の確率微分方程式によって定義される 1 次元拡散過程を考える．

$$dX_t = b(X_t,\theta)dt + \varepsilon\sigma(X_t)dw_t,\ t\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1],\ X_0=x_0, \tag{1.1}$$

ここで，w は 1 次元標準 Wiener 過程，拡散係数 $\sigma:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ と微小拡散パラメータ ε は既知とし，ドリフト $b:\boldsymbol{R}\times\bar{\Theta}\to\boldsymbol{R}$ は未知パラメータ θ 以外は既知とする．また，Θ は $\boldsymbol{R}^p$ の有界な開凸部分集合とし，$\bar{\Theta}$ は Θ の閉包である．本稿で取り扱うデータは時点 $t_k=k/n$，$k=0,\ldots,n$ で観測された離散データ，すなわち，$\boldsymbol{X}_n=\{X_{t_0},X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\}$ である．極限については，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の下で考える．

微小拡散過程は微小摂動をもつダイナミカルシステムの重要なクラスの一つであり，微小摂動の理論と応用の両面において基礎となる連続時間確率過程である．微小摂動をもつダイナミカルシステムについては，Azencott (1982), Freidlin and Wentzell (1998) を参照．微小拡散過程の数理ファイナンスへの応用については，Yoshida (1992b), 国友・高橋(1992), Kunitomo and Takahashi (2001), Takahashi and Yoshida (2004) を参照．微小拡散過程に対する統計推測については，Kutoyants 氏によって連続観測における 1 次漸近理論が整備され(Kutoyants, 1984, 1994)，また吉田朋広氏によって最尤推定量の分布の漸近展開が正当化された(Yoshida, 1992a, 2003)．モデル選択のための情報量規準への応用については Uchida and Yoshida (2004) を参照．

† 大阪大学大学院 基礎工学研究科：〒560–8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3

一方，離散観測に基づいた統計的漸近推測論は実用上重要であり，Genon-Catalot (1990), Laredo (1990), Uchida (2004, 2006) がドリフトパラメータ推定の漸近理論について論じている．また，Sørensen (2000), Sørensen and Uchida (2003), Uchida (2003), Gloter and Sørensen (2005) は離散観測におけるドリフトパラメータと拡散係数パラメータの同時推定について考察した．Genon-Catalot (1990) は連続観測における対数尤度関数の離散近似によってコントラスト関数を構成し，それから得られる最大コントラスト推定量が $(\varepsilon n)^{-1} \to 0$ の時，漸近有効であることを示した．また，微小拡散過程 X の ε に関する確率展開を用いてコントラスト関数を導出し，その最大コントラスト推定量が $\varepsilon\sqrt{n} = O(1)$ の下，漸近有効であることを証明した．Laredo (1990) は多次元微小拡散過程に対して，$(\varepsilon n^2)^{-1} \to 0$ の下で，漸近有効推定量を導出した．Uchida (2004) は多次元微小拡散過程に対して以下の近似マルチンゲール推定関数について考察した．簡単のため，1 次元の場合で説明すると，微小拡散過程 (1.1) に対する近似マルチンゲール推定関数 $\mathcal{G}_{\varepsilon,n,\ell}(\theta) = (\mathcal{G}^{(i)}_{\varepsilon,n,\ell}(\theta))_{i=1,2,\ldots,p}$ は次の通りである：整数 $\ell\ (\geq 1), i = 1,\ldots,p$ に対して，

$$\mathcal{G}^{(i)}_{\varepsilon,n,\ell}(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial b}{\partial \theta_i}\right)(X_{t_{k-1}},\theta)\sigma^{-2}(X_{t_{k-1}})P_{k,\ell}(\theta), \tag{1.2}$$

ここで，$P_{k,\ell}(\theta) = X_{t_k} - \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{j!n^j}\tilde{L}^j_\theta g(X_{t_{k-1}})$, $g(x) = x$，$\tilde{L}_\theta g(x) = b(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x}g(x)$．さらに，近似マルチンゲール推定関数 $\mathcal{G}_{\varepsilon,n,\ell}(\theta)$ から得られる M-推定量が $(\varepsilon n^\ell)^{-1} \to 0$ の下，漸近有効になることを示した．

本稿では，より一般的な条件 $\varepsilon \to 0$ かつ $n \to \infty$ の下で漸近有効性をもつ推定量及びそれを導出する推定関数について Uchida (2008) の結果に沿って解説する．微小拡散過程と同様に，エルゴード的拡散過程についても多種多様な推定関数が提案されている．例えば，Yoshida (1992c), Bibby and Sørensen (1995, 1996), Kessler (1997), Sørensen (1997), Kessler and Sørensen (1999), Bibby et al. (2004) を参照．Kessler and Sørensen (1999) は拡散過程の生成作用素に対する固有関数及び固有値を用いたマルチンゲール推定関数を提案し，それから得られる M-推定量がエルゴード性の下，漸近正規性を有することを証明した．Uchida (2006) は彼らの推定関数を微小拡散過程 (1.1) に応用した．しかしながら，固有関数に基づいた推定関数の構成には 1 つの難点がある．それは L_θ を微小拡散過程 (1.1) の生成作用素，すなわち

$$L_\theta = b(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

とすると，$L_\theta\phi(x,\theta,\varepsilon) = -\Lambda(\theta,\varepsilon)\phi(x,\theta,\varepsilon)$ を満たす固有関数 $\phi(x,\theta,\varepsilon)$ と固有値 $\Lambda(\theta,\varepsilon)$ を明示的に導出する必要があるということである．推定関数の適用範囲を拡張するために，Uchida (2008) は微分作用素

$$\tilde{L}_\theta = b(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.4}$$

に対する固有方程式 $\tilde{L}_\theta\varphi(x,\theta) = -\lambda(\theta)\varphi(x,\theta)$ を満たす固有関数 $\varphi(x,\theta)$ と固有値 $\lambda(\theta)$ に基づいた推定関数を考案した．生成作用素 L_θ は 2 階微分作用素であるのに対して，$\tilde{L}_\theta$ は 1 階微分作用素であることに注意する．生成作用素 L_θ と比較して，$\tilde{L}_\theta$ に関する固有関数 $\varphi(x,\theta)$ と固有値 $\lambda(\theta)$ を得るのは容易である．また，$\tilde{L}_\theta$ に対する固有関数と固有値を用いた推定関数はマルチンゲール性を失うが，マルチンゲール推定関数と漸近同等であることを示すことができる．よって，本稿ではマルチンゲール推定関数と漸近同等な推定関数を近似マルチンゲール推定関数と呼ぶことにする．さらに，$\varepsilon \to 0$ かつ $n \to \infty$ の下で，この近似マルチンゲール推定関数から得られる M-推定量の漸近正規性及び漸近有効性を示すことができる．詳細は 4 節で議論する．

本稿の構成は以下の通りである．2 節では，連続観測における最尤推定量を概説した後，離散観測に対して，オイラー・丸山近似に基づいた擬似対数尤度関数(コントラスト関数)を構成し，それから得られる最尤型推定量(最大コントラスト推定量)について述べる．3 節では，(1.3) に対する固有関数と固有値を用いて，マルチンゲール推定関数を導出し，M-推定量の漸近的性質について述べる．4 節では，推定関数の適用範囲を拡張するために, (1.4) に対する固有関数と固有値に基づいた推定関数を構成し，それがマルチンゲール推定関数と漸近同等であることを解説する．さらに，その推定関数(近似マルチンゲール推定関数)から得られる M-推定量の漸近的性質について考察する．

2. 準備: 連続観測から離散観測へ

θ_0 は θ の真値で，$\theta_0 \in \Theta$ とする．

X_t^0 は次の常微分方程式の解とする．$dX_t^0 = b(X_t^0, \theta_0)dt$，$X_0^0 = x_0$．$A^*$ は行列 A の転置を表す．P_θ は (1.1) の解の分布とする．$\xrightarrow{p}$ と $\xrightarrow{d}$ はそれぞれ，確率収束と分布収束を表す．さらに，次の記号を用意する．

1. $C_\uparrow^{\infty,k}(\boldsymbol{R}\times\Theta\times(0,1];\boldsymbol{R})$ は次の条件を満足する関数 f の空間とする: (i) $f(x,\theta,\varepsilon)$ は $\boldsymbol{R}\times\Theta\times(0,1]$ 上で定義された実数値関数で，θ について k 回微分可能であり，f とそのすべての導関数は (x,θ,ε) に関して連続である．さらに，f とその θ についての k 回までの導関数は x について何回でも微分可能であり，そのすべての導関数は (x,θ,ε) に関して連続である. (ii) $n\geq 0$, $0\leq|\nu|\leq k$ に対して，ある定数 $C>0$ が存在して，すべての x に対して，$\sup_{\theta\in\Theta,\varepsilon\in(0,1]}|\delta^\nu\partial_x^n f|\leq C(1+|x|)^C$. ここで，$\partial_x=\partial/\partial x$，$\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_p)$ は multi-index であり，$|\nu|=\nu_1+\cdots+\nu_p$，$\delta^\nu=\delta_1^{\nu_1}\cdots\delta_p^{\nu_p}$，$\delta_j=\partial/\partial\theta_j$，$j=1,\ldots,p$.
2. $C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$ は $f\in C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$ であり，f とそのすべての導関数が高々多項式増大となる空間とする．
3. $C_b^k(\Theta\times(0,1];\boldsymbol{R})$ は次の条件を満たす関数 f の空間とする: (i) $f(\theta,\varepsilon)$ は $\Theta\times(0,1]$ 上で定義された実数値関数で，θ に関して k 回微分可能であり，f とそのすべての導関数は (θ,ε) に関して連続である. (ii) $0\leq|\nu|\leq k$ に対して，$\sup_{\theta\in\Theta,\varepsilon\in(0,1]}|\delta^\nu f|<\infty$.
4. R は $\bar\Theta\times(0,1]\times\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値関数で，ある定数 $C>0$ が存在して，すべての θ,a,x に対して，$|R(\theta,a,x)|\leq aC(1+|x|)^C$.

本稿を通して，次を仮定する．

A1. (i) ある定数 $K>0$ が存在して，すべての x,y に対して，

$$\sup_{\theta\in\bar\Theta}|b(x,\theta)-b(y,\theta)|+|\sigma(x)-\sigma(y)|\leq K|x-y|.$$

(ii) $b(x,\theta)\in C_\uparrow^{\infty,3}(\boldsymbol{R}\times\bar\Theta;\boldsymbol{R})$，$\sigma(x)\in C_\uparrow^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$.
(iii) $\inf_x\sigma^2(x)>0$.

注 1. A1 の下，次が成り立つ. (i) すべての $m>0$ に対して，$\sup_{t\in[0,1]}E[|X_t|^m]<\infty$. (ii) $\varepsilon\to 0$ の時，$\sup_{t\in[0,1]}|X_t-X_t^0|=o_p(1)$.

まず，連続観測の場合について述べる．θ_0 に対応する確率微分方程式 (1.1) の解 $\boldsymbol{X}=\{X_t;t\in[0,1]\}$ が得られたとする．$\boldsymbol{X}$ を連続観測とよぶことにする．A1 の下，P_{θ_0} に関する P_θ の Radon-Nikodym 微分は

$$\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}}(\boldsymbol{X}) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1\frac{b(X_t,\theta)-b(X_t,\theta_0)}{\sigma^2(X_t)}dX_t-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^1\frac{b^2(X_t,\theta)-b^2(X_t,\theta_0)}{\sigma^2(X_t)}dt\right\}$$

となる．これは密度公式または尤度比公式とよばれ，拡散過程の推測では必要不可欠である．詳細は，Liptser and Shiryaev (2001) を参照．尤度関数を $L_\varepsilon(\theta)=\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}}(\boldsymbol{X})$ として，最尤推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)}$ を $L_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)})=\sup_{\theta\in\bar{\Theta}} L_\varepsilon(\theta)$ と定義する．また，

$$l_\varepsilon(\theta)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{b(X_t,\theta)}{\sigma^2(X_t)}dX_t-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{b^2(X_t,\theta)}{\sigma^2(X_t)}dt$$

とおくと，$\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)}$ は $l_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)})=\sup_{\theta\in\bar{\Theta}} l_\varepsilon(\theta)$ として定義できることに注意する．スコア関数 $S_\varepsilon(\theta)=(S_\varepsilon^i(\theta))_{i=1,\dots,p}:=(\delta_i l_\varepsilon(\theta))_{i=1,\dots,p}$ は

$$S_\varepsilon^i(\theta)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{\delta_i b(X_t,\theta)}{\sigma^2(X_t)}dX_t-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{(\delta_i b)(X_t,\theta)b(X_t,\theta)}{\sigma^2(X_t)}dt \tag{2.1}$$

となる．最尤推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)}$ の 1 次漸近理論については，主に Kutoyants (1984, 1994) によって研究がなされた．$I(\theta_0)=(I^{(ij)}(\theta_0))_{1\le i,j\le p}$ とし，

$$I^{(ij)}(\theta_0)=\int_0^1 \frac{(\delta_i b)(X_s^0,\theta_0)(\delta_j b)(X_s^0,\theta_0)}{\sigma^2(X_s^0)}ds$$

とする．$I(\theta_0)$ は正定値行列とする．正則条件の下で，$\varepsilon\to\infty$ の時，$\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)}-\theta_0)\xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta_0))$ が言える．さらに，正則条件の下で尤度比の局所漸近正規性が成り立ち，Hajek-Le Cam の不等式より，最尤推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)}$ は，局所漸近ミニマックスの意味で 1 次漸近有効となる．

例 1. 次の確率微分方程式で定義された拡散過程を考える．

$$dX_t=\theta g(X_t)dt+\varepsilon\sigma(X_t)dw_t,\ t\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1],\ X_0=x_0, \tag{2.2}$$

ただし，$\theta>0$ で，g と σ は A1 を満たすとする．

連続観測 $\boldsymbol{X}=\{X_t;t\in[0,1]\}$ に基づく対数尤度関数は $l_\varepsilon(\theta)-l_\varepsilon(\theta_0)$，ここで，$l_\varepsilon(\theta)$ は

$$l_\varepsilon(\theta)=\frac{\theta}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{g(X_t)}{\sigma^2(X_t)}dX_t-\frac{\theta^2}{2\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{g^2(X_t)}{\sigma^2(X_t)}dt$$

で，スコア関数は

$$S_\varepsilon(\theta)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{g(X_t)}{\sigma^2(X_t)}dX_t-\frac{\theta}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{g^2(X_t)}{\sigma^2(X_t)}dt \tag{2.3}$$

となる．これから，最尤推定量は次で与えられる．

$$\hat{\theta}_\varepsilon^{(ML)}=\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{g(X_t)}{\sigma^2(X_t)}dX_t}{\displaystyle\int_0^1 \frac{g^2(X_t)}{\sigma^2(X_t)}dt}. \tag{2.4}$$

次に，離散観測 $\boldsymbol{X}_n=\{X_{t_0},X_{t_1},\dots,X_{t_n}\}$ に基づくパラメータ推定について述べる．離散観測の場合も連続観測の場合と同様に尤度解析に基づいた推測を行いたい．しかしながら，離散観測の場合，拡散過程の推移確率密度関数は一般に明示的に求めることができないため，尤度関数や最尤推定量を導出するのは困難である．そこで，確率微分方程式 (1.1) に対して，次のオイラー・丸山近似を考える．

$$Z_{t_k}-Z_{t_{k-1}}=b(Z_{t_{k-1}},\theta)(t_k-t_{k-1})+\varepsilon\sigma(Z_{t_{k-1}})(w_{t_k}-w_{t_{k-1}}),\quad Z_0=x_0.$$

この時，$Z_{t_{k-1}}=z_{k-1}$ が与えられた下での，Z_{t_k} の条件付分布 $\mathcal{L}(Z_{t_k}|Z_{t_{k-1}}=z_{k-1})$ は，平均 $z_{k-1}+b(z_{k-1},\theta)/n$，分散 $\varepsilon^2\sigma^2(z_{k-1})/n$ の正規分布に従う．これを考慮して，擬似対数尤度関数(コントラスト関数)を $U_{\varepsilon,n}(\theta)$ として，

$$U_{\varepsilon,n}(\theta)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\log\sigma^2(X_{t_{k-1}})+\frac{n(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}-b(X_{t_{k-1}},\theta)/n)^2}{\varepsilon^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\right\}$$

を考える．最大コントラスト推定量 $\hat{\theta}^{(C)}_{\varepsilon,n}$ を $U_{\varepsilon,n}(\hat{\theta}^{(C)}_{\varepsilon,n})=\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}U_{\varepsilon,n}(\theta)$ と定義する．正則条件の下で，$(\varepsilon n)^{-1}=o(1)$ の時，$\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}^{(C)}_{\varepsilon,n}-\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,I^{-1}(\theta_0))$ が言える(Genon-Catalot, 1990; Sørensen and Uchida, 2003)．ここで，$I(\theta_0)$ は連続観測 $\boldsymbol{X}=\{X_t;t\in[0,1]\}$ に基づいた θ_0 の推定における(漸近)フィッシャー情報行列である．したがって，離散観測における最大コントラスト推定量 $\hat{\theta}^{(C)}_{\varepsilon,n}$ は連続観測における Hajek-Le Cam 限界を達成するという意味で，$\hat{\theta}^{(C)}_{\varepsilon,n}$ は漸近有効である．また，$i=1,\ldots,p$ に対して，

$$\delta_iU_{\varepsilon,n}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\delta_ib(X_{t_{k-1}},\theta)(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}-b(X_{t_{k-1}},\theta)/n)}{\varepsilon^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\right\} \tag{2.5}$$

となり，$\delta_iU_{\varepsilon,n}(\theta)$ は(2.1)の離散近似となっていることに注意する．

例 2 (例 1 の続き)．微小拡散過程 (2.2) から得られた離散観測 $\boldsymbol{X}_n=\{X_{t_0},X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\}$ に基づくコントラスト関数を

$$U_{\varepsilon,n}(\theta)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\log\sigma^2(X_{t_{k-1}})+\frac{n(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}-\theta g(X_{t_{k-1}})/n)^2}{\varepsilon^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\right\}$$

とすると，

$$\delta_\theta U_{\varepsilon,n}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{g(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}-\theta g(X_{t_{k-1}})/n)}{\varepsilon^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\right\} \tag{2.6}$$

となる．ここで，(2.6) は (2.3) の離散近似になっていることに注意する．最大コントラスト推定量は次で与えられる．

$$\hat{\theta}^{(C)}_{\varepsilon,n}=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})}{\sigma^2(X_{t_{k-1}})}}{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{g^2(X_{t_{k-1}})}{\sigma^2(X_{t_{k-1}})}}. \tag{2.7}$$

例 1 と例 2 から，オイラー・丸山近似を用いたコントラスト関数の最大コントラスト推定量 (2.7) は連続観測における最尤推定量 (2.4) の簡便な離散近似となっていることがわかる．先述の通り，連続観測における最尤推定量は正則条件の下，$\varepsilon\to 0$ の時，漸近的性質(漸近正規性及び漸近有効性)が成り立つ．それに対して，オイラー・丸山近似に基づいた最大コントラスト推定量の漸近正規性及び漸近有効性を保証するためには，微小摂動パラメータ $\varepsilon\to 0$ と離散観測の刻み幅 $1/n\to 0$ に加えて，さらなる条件(バランス条件)$(\varepsilon n)^{-1}=o(1)$ が必要となる．この事実は Genon-Catalot (1990)によって指摘された．また，Genon-Catalot (1990)は $\varepsilon\sqrt{n}=O(1)$ の下，漸近有効性をもつ別の推定量を提案している．1 節で述べたように，Laredo (1990)は $(\varepsilon n^2)^{-1}=o(1)$ の下で漸近有効性をもつ推定量を求め，Uchida (2004)は整数 l (≥ 1) に対して，$(\varepsilon n^l)^{-1}=o(1)$ の下で漸近有効性をもつ推定量を導出した．

以上の事実から，さらなる興味の対象として，バランス条件を仮定せずに，単に $\varepsilon\to 0$ と $n\to\infty$ の下で漸近有効性をもつ推定量を考察する．そこで，スコア関数(2.1)とスコア関数の

離散近似(2.5)を再考する．簡単な計算から，スコア関数 $S_\varepsilon(\theta)=(S_\varepsilon^i(\theta))_{i=1,\dots,p}$ に真値を代入したものはマルチンゲールであり，特に，$\varepsilon\to 0$ の時,

$$\varepsilon S_\varepsilon(\theta_0)=\left(\int_0^1 \frac{\delta_i b(X_{t_{k-1}},\theta_0)}{\sigma(X_t)}dw_t\right)_{i=1,\dots,p} \xrightarrow{d} N(0,I(\theta_0))$$

が成り立つ．それに対して，次の条件付き期待値を計算すると,

$$E_{\theta_0}[\delta_i U_{\varepsilon,k}(\theta_0)-\delta_i U_{\varepsilon,k-1}(\theta_0)|X_{t_{k-1}}]=\frac{\delta_i b(X_{t_{k-1}},\theta_0)}{\varepsilon^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\left(E_{\theta_0}[X_{t_k}|X_{t_{k-1}}]-X_{t_{k-1}}-\frac{b(X_{t_{k-1}},\theta_0)}{n}\right)$$

であるから，$\delta_\theta U_{\varepsilon,n}(\theta_0)=(\delta_i U_{\varepsilon,n}(\theta_0))_{i=1,\dots,p}$ はマルチンゲールではない．しかしながら,

$$E_\theta[X_{t_k}|X_{t_{k-1}}]=X_{t_{k-1}}+\frac{b(X_{t_{k-1}},\theta)}{n}+R(\theta,1/n^2,X_{t_{k-1}}) \tag{2.8}$$

となり，$(\varepsilon n)^{-1}=o(1)$ の下で,

$$\varepsilon\{\delta_\theta U_{\varepsilon,n}(\theta_0)-H_{\varepsilon,n}(\theta_0)\}=o_p(1) \tag{2.9}$$

が成り立つ．ここで，$H_{\varepsilon,n}(\theta)=(H_{\varepsilon,n}^i(\theta))_{i=1,\dots,p}$,

$$H_{\varepsilon,n}^i(\theta)=\sum_{k=1}^n \frac{\delta_i b(X_{t_{k-1}},\theta)}{\varepsilon^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\left(X_{t_k}-E_\theta[X_{t_k}|X_{t_{k-1}}]\right).$$

これから，$(\varepsilon n)^{-1}=o(1)$ は $\delta_\theta U_{\varepsilon,n}(\theta_0)$ と $H_{\varepsilon,n}(\theta_0)$ が(2.9)の意味で漸近同等になる条件であることがわかる．$H_{\varepsilon,n}(\theta)$ はマルチンゲール性をもつ推定関数であり，マルチンゲール推定関数と呼ばれる．例えば，$b(x,\theta)=-\theta x$，$\theta>0$ の場合，A1 の下で，$E_\theta[X_{t_k}|X_{t_{k-1}}]=e^{-\theta/n}X_{t_{k-1}}$ となり，$\varepsilon H_{\varepsilon,n}(\theta_0)$ は $\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時に漸近正規性をもち，$H_{\varepsilon,n}(\theta)=0$ の解として得られる M-推定量は漸近有効となる．しかしながら，一般に条件付き期待値 $E_\theta[X_{t_k}|X_{t_{k-1}}]$ を明示的に求めるのは困難である．そこで，次節では $E_\theta[X_{t_k}|X_{t_{k-1}}]$ の一般化として，ある関数 $\phi(x,\theta,\varepsilon)$ に対して，$E_\theta[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)|X_{t_{k-1}}]$ の明示的な導出を考えることにする.

3.　マルチンゲール推定関数

L_θ は拡散過程(1.1)の生成作用素とする．すなわち，$g\in C^2(\boldsymbol{R})$ に対して,

$$L_\theta g(x)=b(x,\theta)\partial_x g(x)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2(x)\partial_x^2 g(x).$$

x に関して 2 回連続微分可能な関数 $\phi(x,\theta,\varepsilon)$ に対して,

$$L_\theta\phi(x,\theta,\varepsilon)=-\Lambda(\theta,\varepsilon)\phi(x,\theta,\varepsilon)$$

が成り立つとき，$\Lambda(\theta,\varepsilon)$ を L_θ の固有値といい，$\phi(x,\theta,\varepsilon)$ を $\Lambda(\theta,\varepsilon)$ に対する固有関数とよぶ．A1 に加えて，本節では次を仮定する.

A2. (i) 固有関数 $\phi(x,\theta,\varepsilon)\in C_\uparrow^{\infty,2}(\boldsymbol{R}\times\bar\Theta\times(0,1];\boldsymbol{R})$ と固有値 $\Lambda(\theta,\varepsilon)\in C_b^2(\bar\Theta\times(0,1];\boldsymbol{R})$ が存在して，$L_\theta\phi(x,\theta,\varepsilon)=-\Lambda(\theta,\varepsilon)\phi(x,\theta,\varepsilon)$ が成り立つ.

(ii) $\Phi_i(x,\theta,\varepsilon):=\dfrac{\delta_i b(x,\theta)}{(\partial_x\phi)(x,\theta,\varepsilon)\sigma^2(x)}\in C_\uparrow^{\infty,2}(\boldsymbol{R}\times\bar\Theta\times(0,1];\boldsymbol{R})$.

伊藤の公式を用いて，A1-A2 の下,

$$e^{\Lambda(\theta,\varepsilon)t_k}\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)-e^{\Lambda(\theta,\varepsilon)t_{k-1}}\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon) \tag{3.1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\Lambda(\theta,\varepsilon)s}(\Lambda(\theta,\varepsilon)\phi(X_s,\theta,\varepsilon) + L_\theta \phi(X_s,\theta,\varepsilon))ds \\
&\quad +\varepsilon \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\Lambda(\theta,\varepsilon)s}(\partial_x \phi)(X_s,\theta,\varepsilon)\sigma(X_s)dw_s \\
&= \varepsilon \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\Lambda(\theta,\varepsilon)s}(\partial_x \phi)(X_s,\theta,\varepsilon)\sigma(X_s)dw_s.
\end{aligned}
$$

よって，

(3.2)
$$E_\theta[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)|X_{t_{k-1}}] = e^{-\Lambda(\theta,\varepsilon)/n}\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon).$$

これは，条件付き期待値 $E_\theta[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)|X_{t_{k-1}}]$ が固有関数 $\phi(x,\theta,\varepsilon)$ とその固有値 $\Lambda(\theta,\varepsilon)$ を用いて明示的に求められること意味する．(3.2) を考慮して，次のマルチンゲール推定関数 $\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\theta) = (\mathcal{M}^i_{\varepsilon,n}(\theta))_{1\le i\le p}$ を考える．

(3.3)
$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^i_{\varepsilon,n}(\theta) &= \sum_{k=1}^n \Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\left(\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon) - E_\theta[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)|X_{t_{k-1}}]\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon) - e^{-\Lambda(\theta,\varepsilon)/n}\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)].
\end{aligned}
$$

マルチンゲール推定関数を扱う利点は，マルチンゲール中心極限定理が適用できることである．ただし，真値 θ_0 の下で $\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\theta_0)$ がマルチンゲールになることに注意する．$\varepsilon^{-1}\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\theta_0)$ の 2 次変分は

(3.4)
$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2} < \mathcal{M}^i_\varepsilon(\theta_0), \mathcal{M}^j_\varepsilon(\theta_0) >_n \\
&\quad = \varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^n \Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)\Phi_j(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)v(X_{t_{k-1}},\theta_0)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$v(X_{t_{k-1}},\theta_0) = E_{\theta_0}[(\phi(X_{t_k},\theta_0,\varepsilon) - e^{-\Lambda(\theta_0,\varepsilon)/n}\phi(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon))^2|X_{t_{k-1}}]$ である．(3.1) から, A1-A2 の下,

(3.5)
$$
\begin{aligned}
v(X_{t_{k-1}},\theta_0) &= \varepsilon^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} E_{\theta_0}[e^{-2\Lambda(\theta_0,\varepsilon)(t_k - s)}\left((\partial_x\phi)(X_s,\theta_0,\varepsilon)\sigma(X_s)\right)^2|X_{t_{k-1}}]ds \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n}\left((\partial_x\phi)(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)\sigma(X_{t_{k-1}})\right)^2 + R\left(\theta, \frac{\varepsilon^2}{n^2}, X_{t_{k-1}}\right).
\end{aligned}
$$

また，(3.4) - (3.5) 及び A2- (ii) より，

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2} < \mathcal{M}^i_\varepsilon(\theta_0), \mathcal{M}^j_\varepsilon(\theta_0) >_n \\
&\quad = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)\Phi_j(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)\left((\partial_x\phi)(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)\sigma(X_{t_{k-1}})\right)^2 \\
&\quad\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n R\left(\theta, 1, X_{t_{k-1}}\right) \\
&\quad = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{(\delta_i b)(X_{t_{k-1}},\theta_0)(\delta_j b)(X_{t_{k-1}},\theta_0)}{\sigma^2(X_{t_{k-1}})} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n R\left(\theta, 1, X_{t_{k-1}}\right).
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\varepsilon \to 0$ かつ $n \to \infty$ の時,

$$\varepsilon^{-2} < \mathcal{M}^i_\varepsilon(\theta_0), \mathcal{M}^j_\varepsilon(\theta_0) >_n \xrightarrow{p} \int_0^1 \frac{(\delta_i b)(X^0_s,\theta_0)(\delta_j b)(X^0_s,\theta_0)}{\sigma^2(X^0_s)}ds = I^{(ij)}(\theta_0).$$

さらに,

$$\varepsilon^{-4}\sum_{k=1}^{n} E_{\theta_0}[\Phi_i^4(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon)(\phi(X_{t_k},\theta_0,\varepsilon)-e^{-\Lambda(\theta_0,\varepsilon)/n}\phi(X_{t_{k-1}},\theta_0,\varepsilon))^4|X_{t_{k-1}}] \xrightarrow{p} 0.$$

よって，マルチンゲール中心極限定理から，次の補題を得る.

補題 1.　A1-A2 の下，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時，$\varepsilon^{-1}\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0,I(\theta_0))$.

次に, $\mathcal{K}_{\varepsilon,n}(\theta)=(\mathcal{K}_{\varepsilon,n}^{ij}(\theta))_{1\le i,j\le p}$, $\mathcal{K}_{\varepsilon,n}^{ij}(\theta)=\delta_j\mathcal{M}_{\varepsilon,n}^{i}(\theta)$ の漸近的性質について考察する．$\mathcal{K}(\theta)=(\mathcal{K}^{ij}(\theta))_{1\le i,j\le p}$ とし,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}^{(ij)}(\theta)\\
&=\int_0^1(\delta_j\Phi_i)(X_s^0,\theta,0)\{b(X_s^0,\theta_0)(\partial_x\phi)(X_s^0,\theta,0)+\Lambda(\theta,0)\phi(X_s^0,\theta,0)\}ds\\
&\quad+\int_0^1\Phi_i(X_s^0,\theta,0)\{b(X_s^0,\theta_0)\partial_x\delta_j\phi(X_s^0,\theta,0)+\Lambda(\theta,0)\delta_j\phi(X_s^0,\theta,0)+(\delta_j\Lambda)(\theta,0)\phi(X_s^0,\theta,0)\}ds,
\end{aligned}$$

ここで，$\phi(x,\theta,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\phi(x,\theta,\varepsilon)$，$\Lambda(\theta,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda(\theta,\varepsilon)$ とする.

$f\in C_{\uparrow}^{1,1}(\boldsymbol{R}\times\bar{\Theta}\times(0,1];\boldsymbol{R})$ とし，$Q(x,\theta,\varepsilon)=\phi(x,\theta,\varepsilon)-\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)$ とする．Uchida (2008) の Lemma 3 の証明と同様にして, 次を示すことができる．A1-A2 の下, $\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時,

$$\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)-\int_0^1 f(X_s^0,\theta,0)ds\right| \xrightarrow{p} 0,$$

$$\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}\left|\sum_{k=1}^{n}f(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)Q(X_{t_k},\theta,\varepsilon)-\int_0^1 f(X_s^0,\theta,0)b(X_s^0,\theta_0)\partial_x\phi(X_s^0,\theta,0)ds\right| \xrightarrow{p} 0,$$

$$\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}\left|\sum_{k=1}^{n}f(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)(\delta_iQ)(X_{t_k},\theta,\varepsilon)-\int_0^1 f(X_s^0,\theta,0)b(X_s^0,\theta_0)\partial_x\delta_i\phi(X_s^0,\theta,0)ds\right| \xrightarrow{p} 0.$$

簡単な計算から,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\varepsilon,n}^{ij}(\theta)=&\sum_{k=1}^{n}(\delta_j\Phi_i)(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\left[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)-\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\right]\\
&+\sum_{k=1}^{n}(\delta_j\Phi_i)(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)(1-e^{-\Lambda(\theta,\varepsilon)/n})\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\left[\delta_j\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)-\delta_j\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\right]\\
&+\sum_{k=1}^{n}\Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)(1-e^{-\Lambda(\theta,\varepsilon)/n})\delta_j\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\Phi_i(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon)\frac{(\delta_j\Lambda)(\theta,\varepsilon)}{n}e^{-\Lambda(\theta,\varepsilon)/n}\phi(X_{t_{k-1}},\theta,\varepsilon).
\end{aligned}$$

上述の評価式を用いて，次の補題を得る.

補題 2.　A1-A2 の下，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時，$\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}|\mathcal{K}_{\varepsilon,n}(\theta)-\mathcal{K}(\theta)| \xrightarrow{p} 0$.

$\hat{\theta}_{\varepsilon,n}^{(M)}$ を $\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\theta)=0$ の解として得られる M-推定量とする．補題 1 と 2 から Sakamoto and Yoshida (2004) の Theorem 6.1 または Uchida (2008) の Theorem 1 の証明に従って，次の結果が得られる.

定理 1. $\gamma\in(0,1)$ とする．A1-A2 を仮定する．さらに，θ_0 を含むある開集合 $\tilde{\Theta}$ が存在して

$$\inf_{\theta_1,\theta_2\in\tilde{\Theta},|x|=1}\left|x^*\left(\int_0^1\mathcal{K}(\theta_1+s(\theta_2-\theta_1))ds\right)\right|>0$$

が成り立つとする．この時，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の下，

$$P_{\theta_0}[(\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\hat{\theta}^{(M)}_{\varepsilon,n})=0 \text{ を満たす } \hat{\theta}^{(M)}_{\varepsilon,n}\in\tilde{\Theta} \text{ が唯 1 つ存在する })\cap(|\hat{\theta}^{(M)}_{\varepsilon,n}-\theta_0|\le\varepsilon^{\gamma})]\to 1$$

かつ

$$\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}^{(M)}_{\varepsilon,n}-\theta_0)\xrightarrow{d}N\left(0,I(\theta_0)^{-1}\right).$$

注 2. (i) 定理 1 の仮定で用いられている $\mathcal{K}(\theta)$ は補題 2 にある $\mathcal{K}_{\varepsilon,n}(\theta)$ の収束先である．また，A2 から $\mathcal{K}(\theta_0)=-I(\theta_0)$ であることに注意する．(ii) 定理 1 を示すために，局所化の議論を用いて，条件 A1-A2 を弱めることは可能である．

例 3. 次の確率微分方程式で定義された拡散過程を考える．

$$dX_t=-\theta_1(X_t-\theta_2)dt+\varepsilon\sigma(X_t)dw_t,\ t\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1],\ X_0=x_0,$$

ここで，σ は A1 を満足するとし，$\theta_1,\theta_2>0$ とする．さらに，$\theta=(\theta_1,\theta_2)$ とし，生成作用素は $L_\theta=-\theta_1(x-\theta_2)\partial_x+\frac{\varepsilon^2}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2$ である．

$\Lambda(\theta,\varepsilon)=\theta_1$，$\phi(x,\theta,\varepsilon)=x-\theta_2$ とすると，$\Lambda(\theta,\varepsilon)$ と $\phi(x,\theta,\varepsilon)$ は固有方程式 $L_\theta\phi(x,\theta,\varepsilon)=-\Lambda(\theta,\varepsilon)\phi(x,\theta,\varepsilon)$ を満たす．この時，θ に対するマルチンゲール推定関数は次で与えられる．

$$\mathcal{M}^{(1)}_{\varepsilon,n}(\theta)=\sum_{k=1}^n\frac{(X_{t_{k-1}}-\theta_2)}{\sigma^2(X_{t_{k-1}})}[(X_{t_k}-\theta_2)-e^{-\frac{\theta_1}{n}}(X_{t_{k-1}}-\theta_2)],$$
$$\mathcal{M}^{(2)}_{\varepsilon,n}(\theta)=\sum_{k=1}^n\frac{\theta_1}{\sigma^2(X_{t_{k-1}})}[(X_{t_k}-\theta_2)-e^{-\frac{\theta_1}{n}}(X_{t_{k-1}}-\theta_2)].$$

例 4. 次の拡散過程を考える．

$$dX_t=-\theta\left(\frac{X_t^3+X_t}{3X_t^2+1}\right)dt+\varepsilon\sqrt{\frac{X_t^2+1}{6}}dw_t,\ t\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1],\ X_0=x_0,$$

ここで，$\theta>0$ とする．生成作用素は $L_\theta=-\theta\frac{x^3+x}{3x^2+1}\partial_x+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{x^2+1}{6}\partial_x^2$ である．

$\phi(x,\theta,\varepsilon)=x^3+x$，$\Lambda(\theta,\varepsilon)=\theta-\frac{\varepsilon^2}{2}$ は固有方程式 $L_\theta\phi(x,\theta,\varepsilon)=-\Lambda(\theta,\varepsilon)\phi(x,\theta,\varepsilon)$ を満たす．この時，マルチンゲール推定関数は次で与えられる．

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,n}(\theta)=\sum_{k=1}^n\frac{6X_{t_{k-1}}}{(3X_t^2+1)^2}\left[X_{t_k}^3+X_{t_k}-\exp\left\{-\frac{\theta-\varepsilon^2/2}{n}\right\}(X_{t_{k-1}}^3+X_{t_{k-1}})\right].$$

本節では，$E_\theta[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)|X_{t_{k-1}}]$ を明示的に導出し，マルチンゲール推定関数を構成した．しかしながら，A2 を満たす固有関数 $\phi(x,\theta,\varepsilon)$ 及び固有値 $\Lambda(\theta,\varepsilon)$ は一般に明示的に求めることはできない．次節では $E_\theta[\phi(X_{t_k},\theta,\varepsilon)|X_{t_{k-1}}]$ の導出を参考にして，条件付期待値の近似を考える．

4. 近似マルチンゲール推定関数

$\tilde{L}_\theta=b(x,\theta)(\partial/\partial x)$ とする．x に関して連続微分可能な関数 $\varphi(x,\theta)$ に対して，$\tilde{L}_\theta\varphi(x,\theta)=-\lambda(\theta)\varphi(x,\theta)$ が成り立つとき，$\lambda(\theta)$ を $\tilde{L}_\theta$ の固有値といい，$\varphi(x,\theta)$ を $\lambda(\theta)$ に対する固有関数とよぶ．本節では，A1 に加えて次を仮定する．

A3. (i) 固有関数 $\varphi(x,\theta)\in C_{\uparrow}^{\infty,2}(\boldsymbol{R}\times\bar{\Theta};\boldsymbol{R})$ と固有値 $\lambda(\theta)\in C_b^2(\bar{\Theta};\boldsymbol{R})$ が存在して，$\tilde{L}_\theta\varphi(x,\theta)=-\lambda(\theta)\varphi(x,\theta)$ が成り立つ.

(ii) $\Psi_i(x,\theta):=\dfrac{\delta_i b(x,\theta)}{(\partial_x\varphi)(x,\theta)\sigma^2(x)}\in C_{\uparrow}^{\infty,2}(\boldsymbol{R}\times\bar{\Theta};\boldsymbol{R})$.

前節と同様にして，次のマルチンゲール推定関数 $M_{\varepsilon,n}(\theta)=(M_{\varepsilon,n}^{(i)}(\theta))_{1\le i\le p}$ を考える.

$$M_{\varepsilon,n}^{(i)}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\Psi_i(X_{t_{k-1}},\theta)\left(\varphi(X_{t_k},\theta)-E_\theta[\varphi(X_{t_k},\theta)|X_{t_{k-1}}]\right). \tag{4.1}$$

しかしながら，条件付き期待値 $E_\theta[\varphi(X_{t_k},\theta)|X_{t_{k-1}}]$ は特別な場合を除いて，一般には明示的に求めることができない．そこで，この条件付き期待値の近似を試みる．伊藤の公式を用いて，A1 と A3 の下,

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda(\theta)t_k}\varphi(X_{t_k},\theta)-e^{\lambda(\theta)t_{k-1}}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta)\\
&=\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{\lambda(\theta)s}(\lambda(\theta)\varphi(X_s,\theta)+\tilde{L}_\theta\varphi(X_s,\theta))ds+\varepsilon\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{\lambda(\theta)s}(\partial_x\varphi)(X_s,\theta)\sigma(X_s)dw_s\\
&\quad+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{\lambda(\theta)s}(\partial_x^2\varphi)(X_s,\theta)\sigma^2(X_s)ds\\
&=\varepsilon\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{\lambda(\theta)s}(\partial_x\varphi)(X_s,\theta)\sigma(X_s)dw_s+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{\lambda(\theta)s}(\partial_x^2\varphi)(X_s,\theta)\sigma^2(X_s)ds.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

従って,

$$E_\theta[\varphi(X_{t_k},\theta)|X_{t_{k-1}}]=e^{-\lambda(\theta)/n}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta)+R\left(\theta,\frac{\varepsilon^2}{n},X_{t_{k-1}}\right). \tag{4.3}$$

ε が微小である場合，(4.3) から条件付き期待値 $E_\theta[\varphi(X_{t_k},\theta)|X_{t_{k-1}}]$ は $e^{-\lambda(\theta)/n}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta)$ で近似できることがわかる．これを考慮して，次の推定関数 $G_{\varepsilon,n}(\theta)=(G_{\varepsilon,n}^{(i)}(\theta))_{1\le i\le p}$ を考えることにする.

$$G_{\varepsilon,n}^{(i)}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\Psi_i(X_{t_{k-1}},\theta)[\varphi(X_{t_k},\theta)-e^{-\lambda(\theta)/n}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta)]. \tag{4.4}$$

(4.2) から $G_{\varepsilon,n}(\theta)$ はマルチンゲール推定関数ではない．しかし，(4.3) を用いて，A1 と A3 の下，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1}G_{\varepsilon,n}(\theta_0)-\varepsilon^{-1}M_{\varepsilon,n}(\theta_0)\\
&\quad=\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{n}\Psi_i(X_{t_{k-1}},\theta_0)\{E_{\theta_0}[\varphi(X_{t_k},\theta_0)|X_{t_{k-1}}]-e^{-\lambda(\theta_0)/n}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta_0)\}\\
&\quad=\frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\Psi_i(X_{t_{k-1}},\theta_0)R(\theta,1,X_{t_{k-1}})=o_p(1)
\end{aligned}$$

が得られる．このことから，$G_{\varepsilon,n}(\theta)$ は (4.1) で定義されたマルチンゲール推定関数 $M_{\varepsilon,n}(\theta)$ と漸近同等であることがわかる．この意味で，$G_{\varepsilon,n}(\theta)$ を近似マルチンゲール推定関数と呼ぶことにする．以下，$G_{\varepsilon,n}(\theta)$ に関する漸近的な結果について述べる (証明等の詳細については，Uchida, 2008 を参照)．まず，$G_{\varepsilon,n}(\theta)$ の漸近正規性については次の通りである.

補題 3. A1 と A3 の下，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時,

$$\varepsilon^{-1}G_{\varepsilon,n}(\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,I(\theta_0)).$$

次に，$G_{\varepsilon,n}^{(i)}(\theta)$ のパラメータに関する導関数を $K_{\varepsilon,n}^{(ij)}(\theta)=\delta_j G_{\varepsilon,n}^{(i)}(\theta)$ とし，$K_{\varepsilon,n}(\theta)=(K_{\varepsilon,n}^{(ij)}(\theta))_{1\le i,j\le p}$ とおく．また，$K(\theta)=(K^{(ij)}(\theta))_{1\le i,j\le p}$ とし，

$$\begin{aligned}K^{(ij)}&(\theta)\\ &=\int_0^1(\delta_j\Psi_i)(X_s^0,\theta)\{b(X_s^0,\theta_0)(\partial_x\varphi)(X_s^0,\theta)+\lambda(\theta)\varphi(X_s^0,\theta)\}ds\\ &+\int_0^1\Psi_i(X_s^0,\theta)\{b(X_s^0,\theta_0)\partial_x\delta_j\varphi(X_s^0,\theta)+\lambda(\theta)\delta_j\varphi(X_s^0,\theta)+(\delta_j\lambda)(\theta)\varphi(X_s^0,\theta)\}ds\end{aligned}$$

とする．A3 の下，$K(\theta_0)=-I(\theta_0)$ となることに注意する．次の結果から，$K_{\varepsilon,n}(\theta)$ は $K(\theta)$ へパラメータについて一様に確率収束することがわかる．

補題 4. A1 と A3 の下，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の時，

$$\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}|K_{\varepsilon,n}(\theta)-K(\theta)|\xrightarrow{p}0.$$

$\hat{\theta}_{\varepsilon,n}$ を推定方程式 $G_{\varepsilon,n}(\theta)=0$ の解として定義される M-推定量とする．この M-推定量 $\hat{\theta}_{\varepsilon,n}$ について，次の結果が得られる．

定理 2. $\gamma\in(0,1)$ とする．A1 と A3 を仮定する．さらに，θ_0 を含むある開集合 $\tilde{\Theta}$ が存在して，

$$\inf_{\theta_1,\theta_2\in\tilde{\Theta},|x|=1}\left|\left(\int_0^1 K(\theta_1+s(\theta_2-\theta_1))ds\right)^* x\right|>0$$

が成り立つとする．この時，$\varepsilon\to 0$ かつ $n\to\infty$ の下，

$$P_{\theta_0}[\{G_{\varepsilon,n}(\hat{\theta}_{\varepsilon,n})=0 \text{ を満たす } \hat{\theta}_{\varepsilon,n}\in\tilde{\Theta} \text{ が唯 1 つ存在する }\}\cap\{|\hat{\theta}_{\varepsilon,n}-\theta_0|\le\varepsilon^{\gamma}\}]\to 1$$

かつ

$$\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_{\varepsilon,n}-\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,I(\theta_0)^{-1}).$$

注 3. (i) $G_{\varepsilon,n}(\theta)$ は ε が未知であっても適用可能であることに注意する．(ii) A3 から，

$$\frac{\varphi(x,\theta)}{\varphi(x_0,\theta)}=\exp\left\{-\lambda(\theta)\int_{x_0}^x\frac{1}{b(y,\theta)}dy\right\}$$

となり，$G_{\varepsilon,n}(\theta)$ を明示的に求めるために，$\varphi(x,\theta)$ と $\lambda(\theta)$ の選択が重要となる．簡便な $\varphi(x,\theta)$ と $\lambda(\theta)$ を採用するのが自然である．$\varphi(x,\theta)$ と $\lambda(\theta)$ が明示的に求まらない場合もあるが，マルチンゲール推定関数と比較して，その適用範囲は広い．(iii) 定理 2 の条件 A1 と A3 を弱めることは可能である．

例 5. 次の拡散過程を考える．

$$dX_t=\theta\sqrt{X_t^2+1}dt+\varepsilon\sigma(X_t)dw_t,\ t\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1],\ X_0=x_0,$$

ここで，σ は A1 を満足するとし，$\theta>0$ とする．

$\tilde{L}_\theta=\theta\sqrt{x^2+1}\partial_x$ であり，微分方程式 $\tilde{L}_\theta\varphi(x,\theta)=-\lambda(\theta)\varphi(x,\theta)$ を解くことによって，

$$\varphi(x,\theta)=\exp\left\{\frac{-\lambda(\theta)}{\theta}(\log|2x+2\sqrt{x^2+1}|)\right\}$$

となる．よって，$\lambda(\theta)=-\theta$ とすると，固有関数は

$$\varphi(x,\theta)=2x+2\sqrt{x^2+1}=:\varphi(x)$$

となる．固有方程式から，$\partial_x\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ であることに注意して，

$$\Psi(x,\theta)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\partial_x\varphi(x)\sigma^2(x)}=\frac{x^2+1}{\varphi(x)\sigma^2(x)}.$$

ゆえに，近似マルチンゲール推定関数は次で与えられる．

$$G_{\varepsilon,n}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_{t_{k-1}}^2+1)}{\sigma^2(X_{t_{k-1}})}\left[\frac{\varphi(X_{t_k})}{\varphi(X_{t_{k-1}})}-e^{\theta/n}\right].$$

例 6. 2 つのパラメータをもつ拡散過程を考える．

$$dX_t=-\theta_1\left(X_t+\frac{2X_t-\theta_2}{1+X_t^2}\right)dt+\varepsilon\sigma(X_t)dw_t,\ t\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1],\ X_0=x_0,$$

ここで，σ は A1 を満足するとし，$\theta_1,\theta_2>0$ とする．さらに，$\theta=(\theta_1,\theta_2)$ とする．

この例では，$\tilde{L}_\theta=-\theta_1\frac{x^3+3x-\theta_2}{1+x^2}\partial_x$ となり，固有方程式 $\tilde{L}_\theta\varphi(x,\theta)=-\lambda(\theta)\varphi(x,\theta)$ から，

$$\varphi(x,\theta)=\exp\left\{\frac{-\lambda(\theta)}{-3\theta_1}\log\left|x^3+3x-\theta_2\right|\right\}$$

となる．ゆえに，$\lambda(\theta)=3\theta_1$ とすると，

$$\varphi(x,\theta)=x^3+3x-\theta_2=:\varphi(x,\theta_2).$$

この時，θ に関する近似マルチンゲール推定関数は

$$G_{\varepsilon,n}^{(1)}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_{t_{k-1}}^3+3X_{t_{k-1}}-\theta_2}{(1+X_{t_{k-1}}^2)^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}(\varphi(X_{t_k},\theta_2)-e^{-3\theta_1/n}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta_2)),$$

$$G_{\varepsilon,n}^{(2)}(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_1}{(1+X_{t_{k-1}}^2)^2\sigma^2(X_{t_{k-1}})}(\varphi(X_{t_k},\theta_2)-e^{-3\theta_1/n}\varphi(X_{t_{k-1}},\theta_2))$$

となる．

謝　辞

有益なコメントをいただいた査読者に感謝します．本研究の一部は，統計数理研究所重点型研究（課題番号 20–共研–4301）ならびに日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究（C）課題番号 19540137）から援助を受けて行われた．

参 考 文 献

Azencott, R. (1982). Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann, *Séminaire de Probabilités XVI*; *Supplément*: *Géométrie Différentielle Stochastique*, Lecture Notes in Mathematics, **921**, 237–285, Springer Verlag, Berlin.

Bibby, B. M. and Sørensen, M. (1995). Martingale estimating functions for discretely observed diffusion processes, *Bernoulli*, **1**, 17–39.

Bibby, B. M. and Sørensen, M. (1996). On estimation for discretely observed diffusions: A review, *Theory of Stochastic Processes*, **2**, 49–56.

Bibby, B. M., Jacobsen, M. and Sørensen, M. (2004). Estimating functions for discretely sampled diffusion-type models, Preprint No. 2004–4, Department of Applied Mathematics and Statistics, University of Copenhagen (to appear in *Handbook of Financial Econometrics* (eds. Y. Aït-Sahalia and L. P. Hansen), North-Holland, Amsterdam).

Freidlin, M. I. and Wentzell, A. D. (1998). *Random Perturbations of Dynamical Systems*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Genon-Catalot, V. (1990). Maximum contrast estimation for diffusion processes from discrete observations, *Statistics*, **21**, 99–116.

Gloter, A. and Sørensen, M. (2005). Estimation for stochastic differential equations with a small diffusion coefficient, *Stochastic Processes and Their Applications* (to appear).

Kessler, M. (1997). Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 211–229.

Kessler, M. and Sørensen, M. (1999). Estimating equations based on eigenfunctions for a discretely observed diffusion process, *Bernoulli*, **5**, 299–314.

国友直人，高橋明彦(1992). 平均オプション価格の評価法，ファイナンス研究，**14**, 1–19.

Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001). The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims, *Mathematical Finance*, **11**, 117–151.

Kutoyants, Yu. A. (1984). *Parameter Estimation for Stochastic Processes* (ed. B. L. S. Prakasa Rao), Heldermann Verlag, Berlin.

Kutoyants, Yu. A. (1994). *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*, Kluwer, Dordrecht.

Laredo, C. F. (1990). A sufficient condition for asymptotic sufficiency of incomplete observations of a diffusion process, *The Annals of Statistics*, **18**, 1158–1171.

Liptser, R. S. and Shiryaev, A. N. (2001). *Statistics of Random Processes. I. General Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

Sakamoto, Y. and Yoshida, N. (2004). Asymptotic expansion formulas for functionals of ϵ-Markov processes with a mixing property, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **56**, 545–597.

Sørensen, M. (1997). Estimating functions for discretely observed diffusions: A review, *Selected Proceedings of the Symposium on Estimating Functions* (eds. I. V. Basawa, V. P. Godambe and R. L. Taylor), IMS Lecture Notes-Monograph Series, Vol. 32, 305–325, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California.

Sørensen, M. (2000). Small dispersion asymptotics for diffusion martingale estimating functions, Preprint No. 2000–2, Department of Statistics and Operations Research, University of Copenhagen, http://www.stat.ku.dk/research/preprint/.

Sørensen, M. and Uchida, M. (2003). Small diffusion asymptotics for discretely sampled stochastic differential equations, *Bernoulli*, **9**, 1051–1069.

Takahashi, A. and Yoshida, N. (2004). An asymptotic expansion scheme for optimal investment problems, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 153–188.

Uchida, M. (2003). Estimation for dynamical systems with small noise from discrete observations, *Journal of the Japan Statistical Society*, **33**, 157–167.

Uchida, M. (2004). Estimation for discretely observed small diffusions based on approximate martingale estimating functions, *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 553–566.

Uchida, M. (2006). Martingale estimating functions based on eigenfunctions for discretely observed small diffusions, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **38**, 1–13.

Uchida, M. (2008). Approximate martingale estimating functions for stochastic differential equations with small noises, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 1706–1721.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2004). Information criteria for small diffusions via the theory of Mallia-

vin-Watanabe, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 35–67.
Yoshida, N.（1992a）. Asymptotic expansion of maximum likelihood estimators for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe, *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 275–311.
Yoshida, N.（1992b）. Asymptotic expansion for statistics related to small diffusions, *Journal of the Japan Statistical Society*, **22**, 139–159.
Yoshida, N.（1992c）. Estimation for diffusion processes from discrete observation, *Journal of Multivariate Analysis*, **41**, 220–242.
Yoshida, N.（2003）. Conditional expansions and their applications, *Stochastic Processes and Their Applications*, **107**, 53–81.

Estimation of a Drift Parameter for a Small Diffusion Process

Masayuki Uchida

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

We consider the estimation of an unknown drift parameter for a one-dimensional diffusion process with a small perturbed parameter ε. First the maximum likelihood estimator for continuously observed data is surveyed and then we explain that for discrete time observations at n regularly spaced time points k/n, $k = 0, 1, \ldots, n$, the maximum contrast estimator obtained from the contrast function based on the Euler-Maruyama approximation, which is equivalent to the locally Gaussian approximation to the transition density, has an asymptotic efficiency under $(\varepsilon n)^{-1} = o(1)$ as $\varepsilon \to 0$ and $n \to \infty$. Next, a martingale estimating function with both eigenfunction and eigenvalue based on the infinitesimal generator of the diffusion is proposed, and asymptotic properties of an M-estimator obtained from the martingale estimating function is shown under the general condition that $\varepsilon \to 0$ and $n \to \infty$. However, the proposed martingale estimating function does not generally have an explicit form. In order to generalize the estimating function, we treat an approximate martingale estimating function and asymptotic properties of an M-estimator derived from the approximate martingale estimating function are stated as $\varepsilon \to 0$ and $n \to \infty$.

Key words: Asymptotic efficiency, diffusion process with small perturbed parameter, discrete time observations, eigenfunction, martingale estimating function.