統計数理(2009)
第 57 巻 第 1 号 3–16

特集「確率過程の統計解析」
［原著論文］

実現ボラティリティの漸近分布について

深澤 正彦[†]

（受付 2008 年 6 月 30 日；改訂 2008 年 9 月 11 日）

要　　旨

計量ファイナンスで近年注目を浴びてきた実現ボラティリティと呼ばれる統計量に関して，その高頻度観測極限における一次漸近分布を特にサンプリング時刻が確率構造を持つ場合を念頭に解析する．一般化された中心極限定理を証明し，いくつかのサンプリングスキームについて漸近分布を陽に求める．

キーワード： 高頻度データ，ボラティリティ，安定収束.

1. はじめに

株式市場で取引され，十分に流動性のある株価の値動きを確率過程 $S=\{S_t\}_{t\geq 0}$ としてモデル化しようとするとき，まず最も単純なものとして，次のような仮定を置いてみよう．

(1) $t\mapsto S_t$ は確率 1 で連続である．
(2) 収益率 S_{t+s}/S_t は過去の値動き $\sigma(S_u;u\leq t)$ とは独立である．
(3) 収益率の分布は定常である: 任意の $t,s\geq 0$ に対して $S_{t+s}/S_t\sim S_s/S_0$.

この条件は対数資産価格過程 $X=\log(S)$ が Brown 運動であることと同値であり，以下の確率微分方程式で表現された Black-Scholes モデルを与える：

$$dS_t=S_t(rdt+\sigma dW_t),$$

ここで $W=\{W_t\}_{t\geq 0}$ は標準 Brown 運動で $X_t=(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t$ が成立する．これは特に対数収益率 $\log(S_t/S_0)$ が平均 $(r-\sigma^2/2)t$，分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従うことを意味する．したがってこの株に投資したときのリスクを評価するとき，推定すべきパラメータは σ^2 である．サンプリング時刻

$$0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_j^n<t_{j+1}^n<\cdots,\qquad \sup_{j\geq 0}t_j^n\geq T$$

による過去データ $\{X_{t_j^n}\}_{j\geq 0}$ に対し，実現ボラティリティと呼ばれる統計量は通常，対数収益率の 2 乗総和

$$V_T^2(\{t_j^n\}):=\sum_{j;t_j^n\leq T}|X_{t_{j+1}^n}-X_{t_j^n}|^2$$

で定義される．サンプリング時刻 $\{t_j^n\}$ が X と独立であれば，独立性・定常性より

$$\Delta_j^n X\sim(\mu-\sigma^2/2)(t_{j+1}^n-t_j^n)+\sigma\sqrt{t_{j+1}^n-t_j^n}N_j,\quad N_j\sim\mathcal{N}(0,1);\ \text{iid}$$

[†] 大阪大学 金融・保険教育研究センター：〒560–8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3

であるから以下の収束を示すのは難しくない：

$$V_T^2(\{t_j^n\}) \to \sigma^2 T \text{ in probability, as } \delta_n := \sup_{j;t_j^n \le T}(t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0, \text{ a.s.}$$

したがって実現ボラティリティは資産価格の高頻度観測極限においてリスク指標 $\sigma^2 T$ の一致推定量である．近年高頻度データとして，市場で取引されたすべての価格データが秒単位のタイムスタンプ付きで記録されたものが利用できるようになってきたことから，計量ファイナンスではこのような高頻度観測極限の漸近論が注目され，盛んに研究されている．このモデルにおいては以下の漸近正規性を示すのも容易である：Lindeberg 条件

$$\frac{\delta_n}{\|\{t_j^n\}\|_T} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty, \ \|\{t_j^n\}\|_T^2 := \sum_{j;t_j^n \le T} |t_{j+1}^n - t_j^n|^2$$

の下，

$$\frac{V_T^2(\{t_j^n\}) - \sigma^2 T}{\|\{t_j^n\}\|_T} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma^4).$$

本稿における我々の目的はこの中心極限定理の一般化にある．実現ボラティリティに対する既存研究の多くとは異なり，我々はとくにサンプリング時刻が，資産過程 S の挙動に依存する場合に興味がある．実際ティックデータにおいては資産の取引時刻は確率的であり，そしてその分布が資産過程と独立であるとは一般に仮定できない．

さて上の結果から予想できるように，サンプリング時刻 $\{t_j^n\}$ が確率構造を持つ場合には実現ボラティリティの漸近分散に S に依存したランダムネスが残る．したがって先のように古典的な中心極限定理を適用できない．本質的な役割を果たすのは Jacod (1994, 1997)，Jacod and Shiryaev (2003) による条件付マルチンゲールと安定収束の理論であり，本稿の結果は実現ボラティリティに対する収束定理 — Jacod (1994), Jacod and Protter (1998), Barndorff-Nielsen and Shephard (2002), Mykland and Zhang (2006), Fukasawa (2007) ら — を拡張するものである．本稿では簡単のため Black-Scholes モデルに限定して議論を進めるが問題の本質はこの単純なモデルに宿る．

2. 安定収束

この節では安定収束の定義を与え，我々の議論に本質的役割を果たす収束定理を記述する．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上に完備可分距離空間 E に値を持つ確率変数列 $\{Z^n\}$ が定義されているとする．

定義 1. 部分 σ 集合族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対し，$\{Z^n\}$ が $\mathcal{G}$-安定収束するとは，任意の $\mathcal{G}$ 可測確率変数 Y に対し，結合分布 (Z^n, Y) が分布収束することである．

もし $\{Z^n\}$ が安定収束するならば特に分布収束するが，その逆は成り立たない．例えば非退化で独立同分布な二つの確率変数 X，X' に対し，$Z^{2k+1} = X$，$Z^{2k} = X'$，$k = 0, 1, \ldots$ と定義すれば，各 Z^n はすべて同分布だから特に分布収束しているが，(Z^1, Z^n) は分布収束しない．したがって $\{Z^n\}$ は $\sigma(X)$-安定収束しない．一方で X, X' とは独立なもう一つの確率変数 X'' に対しては $\sigma(X'')$-安定収束である．

さて以下の収束定理は Jacod (1994, 1997)，Jacod and Shiryaev (2003) の定理 IX.7.3 の特殊な場合であり，今の我々の目的に十分なものである．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に標準 Brown 運動 $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, 0 \le t < \infty\}$ が定義されているとする．$\mathcal{M}$ を W に直交する有界な $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールの全体とする．

定理 1. $\{Z^n\}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-適合連続局所マルチンゲールの列とする．ある $\{\mathcal{F}_t\}$-適合過程 $\{b_s\}$, $\{c_s\}$ が 存在して，任意の $M\in\mathcal{M}$，$t\in[0,\infty)$ に対し確率収束

$$\langle Z^n, M\rangle_t \to 0,\ \ \langle Z^n, W\rangle_t \to \int_0^t b_s ds,\ \ \left\langle Z^n - \int_0^\cdot b_s dW_s \right\rangle_t \to \int_0^t c_s^2 ds$$

が成り立つとする．この時 $\{Z^n\}$ は，連続関数の空間 $C[0,\infty)$ に値を持つ確率変数列として，確率過程

$$\int_0^\cdot b_s dW_s + \int_0^\cdot c_s dW_s'$$

の分布に $\mathcal{F}$-安定収束する．ここで W' は $\mathcal{F}$ と独立な標準 Brown 運動である．

この定理において特に，混合正規分布への $\mathcal{F}$-安定収束

$$Z_T^n \Rightarrow \int_0^T b_s dW_s + N\sqrt{\int_0^T c_s^2 ds}$$

が分かる．ここで N は $\mathcal{F}$ と独立な標準正規確率変数.

さてこの節でもう一つ有用な補題を記述しておく.

補題 1. フィルトレーションの列

$$\mathcal{H}_j^n \subset \mathcal{H}_{j+1}^n,\ \ j,n\in\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$$

と確率変数列 $\{U_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$ で各 U_j^n が $\mathcal{H}_j^n$ 可測なものを考える．確率収束

$$\sum_{j=0}^\infty P[|U_{j+1}^n|^2|\mathcal{H}_j^n] \to 0 \ \ \text{as}\ \ n\to\infty$$

の仮定の下，以下の 2 条件は同値である．

$$\sum_{j=0}^\infty U_{j+1}^n \to U \ \ \text{as}\ \ n\to\infty. \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^\infty P[U_{j+1}^n|\mathcal{H}_j^n] \to U \ \ \text{as}\ \ n\to\infty. \tag{2}$$

ここで U は共通の確率変数，収束は確率収束である．

Proof. Genon-Catalot and Jacod (1993), Lemma 9 の証明と同様．□

3. 主定理

前節に引き続きフィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},P)$ を考え, W を $\{\mathcal{F}_t\}$-標準 Brown 運動とする．フィルトレーションは通常の仮定を満たしている．本稿の設定においては $X_t = \mu t + \sigma W_t$ である．ここで勿論 $\mu = r - \sigma^2/2$ は実数，σ は正数である．サンプリング時刻 $\tau^n = \{\tau_j^n\}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻の列で，確率 1 で

$$0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \cdots < \tau_j^n < \tau_{j+1}^n < \cdots$$

を満たすものとする．ここで n は漸近論のためのパラメータで，$n\to\infty$ においてサンプリング間隔が 0 に収束するような状況を想定する．記号として

$$Y_j^n := X_{\tau_j^n},\ \ M_t^n := \max\{j\geq 0; \tau_j^n \leq t\},\ \ t\in[0,\infty)$$

と置くとき，我々の問題は データ (Y_j^n, τ_j^n)，$j = 1, 2, \ldots, M_T^n$ から未知母数 σ を推定することである．実現ボラティリティは

$$V_T^2(\tau^n) = \sum_{j=2}^{M_T^n} (Y_j^n - Y_{j-1}^n)^2$$

で定義される．各 τ_j^n は $\mathcal{F}_{\tau_j^n}$-可測で，$M_t^n + 1$ は離散パラメータのフィルトレーション $\{\mathcal{F}_{\tau_j^n}\}$ について停止時刻となっていることに注意しよう．以下特に断ることなく，任意の n に対して，

$$\tau_j^n \to \infty \text{ a.s., as } j \to \infty, \quad P[|\tau_{j+1}^n - \tau_j^n|^6] < \infty$$

を仮定する．さらに漸近分布を同定するために以下の確率構造を仮定しよう：

仮定 1.

$$\mathcal{G}_{j,n}^k := P[(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^k | \mathcal{F}_{\tau_j^n}]$$

と置いたとき，任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $n \to \infty$ で

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} \mathcal{G}_{j,n}^2 = O_p(1)$$

であり，また正数列 $\{\epsilon_n\}$，$\epsilon_n \to 0$ と $\{\mathcal{F}_t\}$-適合連続過程 $\{a_s\}, \{b_s\}$ が存在して，$j = 0, 1, \ldots, M_t^n$ について一様に

$$\mathcal{G}_{j,n}^3 / \mathcal{G}_{j,n}^2 = b_{\tau_j^n} \epsilon_n + o_p(\epsilon_n), \quad \mathcal{G}_{j,n}^4 / \mathcal{G}_{j,n}^2 = a_{\tau_j^n}^2 \epsilon_n^2 + o_p(\epsilon_n^2),$$
$$\mathcal{G}_{j,n}^6 / \mathcal{G}_{j,n}^2 = o_p(\epsilon_n^3), \quad \mathcal{G}_{j,n}^8 / \mathcal{G}_{j,n}^2 = o_p(\epsilon_n^4), \quad \mathcal{G}_{j,n}^{12} / \mathcal{G}_{j,n}^2 = o_p(\epsilon_n^6).$$

補題 2. 仮定 1 の下，任意の $t \geq 0$ に対して

$$\sup_{j \geq 0} |\tau_{j+1}^n \wedge t - \tau_j^n \wedge t| = o_p(\epsilon_n), \quad \sup_{j \geq 0} |W_{\tau_{j+1}^n \wedge t} - W_{\tau_j^n \wedge t}|^2 = o_p(\epsilon_n). \tag{3.1}$$

また

$$\sup_{0 \leq j \leq M_t^n} |\tau_{j+1}^n - \tau_j^n| = o_p(\epsilon_n), \quad \sup_{0 \leq j \leq M_t^n} |W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n}|^2 = o_p(\epsilon_n). \tag{3.2}$$

Proof. まず仮定より

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^6 | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(\epsilon_n^3), \quad \sum_{j=0}^{M_t^n} P[(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^{12} | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(\epsilon_n^6)$$

が従い，補題 1 と併せて

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} (W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^6 = o_p(\epsilon_n^3)$$

を得る．一方

$$\sup_{0 \leq j \leq M_t^n} |W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n}|^2 \leq \left\{ \sum_{j=0}^{M_t^n} (W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^6 \right\}^{1/3}$$

より (3.2) の後半を得る．また仮定と Burkholder-Davis-Gundy の不等式より

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[|\tau_{j+1}^n - \tau_j^n|^3 | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(\epsilon_n^3), \quad \sum_{j=0}^{M_t^n} P[|\tau_{j+1}^n - \tau_j^n|^6 | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(\epsilon_n^6)$$

であるから，上と同様にして(3.2)の前半が示される．(3.1)の前半は最早明らかである． 後半を示すためにまず非負劣マルチンゲール $\{|W_{\tau^n_{j+1}\wedge t} - W_{\tau^n_j\wedge t}|1_A\}_{t\geq 0}$，$A\in\mathcal{F}_{\tau^n_j}$ に対し Doob の不等式を用いて $k=3,6$ に対し

$$P\left[\sup_{0\leq t<\infty}|W_{\tau^n_{j+1}\wedge t} - W_{\tau^n_j\wedge t}|^{2k};A\right]\leq CP\left[|W_{\tau^n_{j+1}} - W_{\tau^n_j}|^{2k};A\right]$$

を得る．ここで C は A に依らない定数．したがって仮定より

$$P\left[\sup_{0\leq t<\infty}|W_{\tau^n_{j+1}\wedge t} - W_{\tau^n_j\wedge t}|^{2k}|\mathcal{F}_{\tau^n_j}\right]\Big/\mathcal{G}^2_{j,n}=o_p(\epsilon^k_n)$$

が成立する．最初と同様に

$$\sum_{j=0}^{M^n_t}\sup_{0\leq s<\infty}|W_{\tau^n_{j+1}\wedge s} - W_{\tau^n_j\wedge s}|^6=o_p(\epsilon^3_n)$$

が示せて，

$$\sup_{0\leq j\leq M^n_t}\sup_{0\leq s<\infty}|W_{\tau^n_{j+1}\wedge s} - W_{\tau^n_j\wedge s}|^2\leq\left\{\sum_{j=0}^{M^n_t}\sup_{0\leq s<\infty}|W_{\tau^n_{j+1}\wedge s} - W_{\tau^n_j\wedge s}|^6\right\}^{1/3}$$

から補題を得る．□

さて自然数 $p\geq 2$ に対し，

$$\|W\|^p_t(\tau^n):=\sum_{j=0}^{\infty}(W_{\tau^n_{j+1}\wedge t} - W_{\tau^n_j\wedge t})^p$$

と置けば，これは補題 2 より，

$$V^2_T(\tau^n)=\sigma^2\|W\|^2_T(\tau^n)+2\mu\sigma\sum_{j=0}^{M^n_T}(\tau^n_{j+1}-\tau^n_j)(W_{\tau^n_{j+1}} - W_{\tau^n_j})+o_p(\epsilon_n)$$

を満たす．さらに

$$Z_t(\tau^n):=\epsilon^{-1}_n(\|W\|^2_t(\tau^n)-t)$$

と置けばこれは連続局所マルチンゲールである．伊藤の公式より

$$Z_t(\tau^n)=2\epsilon^{-1}_n\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\tau^n_j\wedge t}^{\tau^n_{j+1}\wedge t}(W_s - W_{\tau^n_j})dW_s$$

と書けることに注目しよう．特に任意の $M\in\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ は定義より W に直交する有界マルチンゲールの集合であったから $\langle Z(\tau^n),M\rangle=0$ である．

命題 1． 仮定 1 の下，任意の $t\in[0,\infty)$ に対し，確率収束の意味で

$$\begin{aligned}
&\|W\|^2_t(\tau^n)\to t,\\
&\epsilon^{-1}_n\|W\|^3_t(\tau^n)\to\int_0^t b_s ds,\\
&\epsilon^{-2}_n\|W\|^4_t(\tau^n)\to\int_0^t a^2_s ds,\\
&\langle Z(\tau^n),W\rangle_t\to\frac{2}{3}\int_0^t b_s ds,
\end{aligned}$$

$$\left\langle Z(\tau^n) - \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}(W_{\tau_{j+1}^n \wedge \cdot} - W_{\tau_j^n \wedge \cdot}) \right\rangle_t \to \frac{2}{3}\int_0^t c_s^2 ds.$$

ここで

$$c_s^2 := a_s^2 - \frac{2}{3} b_s^2.$$

Proof.　補題 2 と Riemann 和の収束定理より，任意の連続過程 $\{g_s\}$ に対して確率収束

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} g_{\tau_j^n} |\tau_{j+1}^n - \tau_j^n| \to \int_0^t g_s ds$$

が成立する．また Burkholder-Davis-Gundy の不等式より，ある定数 C に対し

$$P[(\tau_{j+1}^n - \tau_j^n)^2 | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] \le C \mathcal{G}_{j,n}^4 \quad \text{a.s.}$$

で，仮定より

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} g_{\tau_j^n}^2 \mathcal{G}_{j,n}^4 = O_p(\epsilon_n^2)$$

だから，補題 1 より確率収束

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} g_{\tau_j^n} \mathcal{G}_{j,n}^2 \to \int_0^t g_s ds \tag{3.3}$$

を得る．補題 1，補題 2 と (3.3) から最初の 3 つの収束が従う．さて伊藤の公式より

$$\langle Z(\tau^n), W \rangle_t = 2\epsilon_n^{-1} \sum_{j=0}^{M_t^n} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} (W_s - W_{\tau_j^n}) ds + o_p(1) = \sum_{j=0}^{M_t^n} A_j + o_p(1)$$

と書ける．ここで

$$A_j := \frac{2}{3}\epsilon_n^{-1}(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^3 - 2\epsilon_n^{-1}\int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} (W_s - W_{\tau_j^n})^2 dW_s.$$

仮定より

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[A_j | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] = \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{M_t^n} b_{\tau_j^n} \mathcal{G}_{j,n}^2 + o_p(1), \quad \sum_{j=0}^{M_t^n} P[|A_j|^2 | \mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(\epsilon_n)$$

だから，補題 1 と (3.3) を使って下から 2 番目の収束も言える．最後のものについては

$$\begin{aligned}
&\left\langle Z(\tau^n) - \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}(W_{\tau_{j+1}^n \wedge \cdot} - W_{\tau_j^n \wedge \cdot}) \right\rangle_t \\
&\quad = \langle Z(\tau^n) \rangle_t - 2\left\langle Z(\tau^n), \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}(W_{\tau_{j+1}^n \wedge \cdot} - W_{\tau_j^n \wedge \cdot}) \right\rangle_t \\
&\qquad + \frac{4}{9}\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}^2 (\tau_{j+1}^n \wedge t - \tau_j^n \wedge t)
\end{aligned}$$

であるから，後は

$$\langle Z(\tau^n)\rangle_t \to \frac{2}{3}\int_0^t a_s^2 ds$$

$$\left\langle Z(\tau^n), \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}(W_{\tau_{j+1}^n\wedge\cdot} - W_{\tau_j^n\wedge\cdot})\right\rangle_t \to \frac{4}{9}\int_0^t b_s^2 ds$$

を示せば命題が完成する．一つめは

$$\langle Z(\tau^n)\rangle_t = 4\epsilon_n^{-2}\sum_{j=0}^{M_t^n}\int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n}(W_s - W_{\tau_j^n})^2 ds = \sum_{j=0}^{M_t^n} B_j + o_p(1),$$

$$B_j := \frac{2}{3}\epsilon_n^{-2}(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^4 - \frac{8}{3}\epsilon_n^{-2}\int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n}(W_s - W_{\tau_j^n})^3 dW_s$$

で，前と同様に

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[B_j|\mathcal{F}_{\tau_j^n}] = \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{M_t^n} a_{\tau_j^n}^2\mathcal{G}_{j,n}^2 + o_p(1),$$

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[|B_j|^2|\mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(1)$$

から従う．二つめの左辺は

$$\frac{4}{3}\epsilon_n^{-1}\sum_{j=0}^{M_t^n} b_{\tau_j^n}\int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n}(W_s - W_{\tau_j^n})ds + o_p(1) = \sum_{j=0}^{M_t^n} C_j + o_p(1),$$

$$C_j := \frac{4}{3}\epsilon_n^{-1} b_{\tau_j^n}\left\{\frac{1}{3}(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^3 - \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n}(W_s - W_{\tau_j^n})^2 dW_s\right\}$$

と書け，

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[C_j|\mathcal{F}_{\tau_j^n}] = \frac{4}{9}\sum_{j=0}^{M_t^n} b_{\tau_j^n}^2\mathcal{G}_{j,n}^2 + o_p(1),$$

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} P[|C_j|^2|\mathcal{F}_{\tau_j^n}] = o_p(\epsilon_n)$$

より，やはり補題 1 を使えばよい．□

定理 2. 仮定 1 の下，$C[0,\infty)$ 上の分布の意味で $\mathcal{F}$-安定収束

$$Z(\tau^n) \Rightarrow \frac{2}{3}\int_0^{\cdot} b_s dW_s + \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\cdot} c_s dW_s'$$

が成立し，特に任意の有限な停止時刻 T に対し，

$$\begin{aligned}&\epsilon_n^{-1}(V_T^2(\tau^n) - \sigma^2 T)\\ &\quad = 2\mu\sigma\epsilon_n^{-1}\sum_{j=0}^{M_T^n}(\tau_{j+1}^n - \tau_j^n)(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n}) + \sigma^2 Z_T(\tau^n) + o_p(1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu\sigma\frac{2}{3}\int_0^T b_s ds + \sigma^2\left(\frac{2}{3}\int_0^T b_s dW_s + \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^T c_s dW'_s\right).$$

ここで W' は拡張された確率空間で定義された，$\mathcal{F}$ と独立な 標準 Brown 運動.

Proof. 命題 1 と 定理 1 から $\mathcal{F}$-安定収束

$$Z(\tau^n) - \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}(W_{\tau_{j+1}^n \wedge \cdot} - W_{\tau_j^n \wedge \cdot}) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\cdot} c_s dW'_s$$

である．確率収束

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{\tau_j^n}(W_{\tau_{j+1}^n \wedge \cdot} - W_{\tau_j^n \wedge \cdot}) \to \int_0^{\cdot} b_s dW_s$$

を見るのは易しい．あとは確率収束

$$\epsilon_n^{-1}\sum_{j=0}^{M_t^n}(\tau_{j+1}^n - \tau_j^n)(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n}) \to \frac{1}{3}\int_0^t b_s ds$$

を示せばよいがこれは

$$P[(\tau_{j+1}^n - \tau_j^n)(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})|\mathcal{F}_{\tau_j^n}] = \frac{1}{3}P[(W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n})^3|\mathcal{F}_{\tau_j^n}]$$

に着目すればこれまでと全く同様に示される．□

さて上の定理は実現ボラティリティの漸近分布として混合正規分布を与えているが，応用上の問題，例えば σ^2 の検定や信頼区間の構成においては，漸近分散のランダムネスがネックとなってこの定理を直接利用することができない．しかし以下の系が示すように $b_s = 0$ なる状況においてはある種のスチューデント化によって漸近正規性が得られる．

系 1. 停止時刻 T に対し，仮定 1 の下，$b_s 1_{\{s\le T\}} \equiv 0$，$a_s 1_{\{s\le T\}} \not\equiv 0$ ならば，

$$\frac{V_T^2(\tau^n) - \sigma^2 T}{\sqrt{V_T^4(\tau^n)}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 2/3).$$

ここで

$$V_T^k(\tau^n) = \sum_{j=2}^{M_T^n}(Y_j^n - Y_{j-1}^n)^k, \quad k = 2, 4.$$

この系で注目すべきは，スチューデント化においてサンプリングの構造を全く考慮する必要がないという点である．この形の統計量に対しては，サンプリング時刻が非確率的な場合には既に漸近正規性が知られているが，我々のこの結果は確率構造を持つサンプリングにおいても同様の分布収束が，漸近分散 2/3 もそのままに成立することを示している．一方で $b_s = 0$ が仮定出来ないならばこのスチューデント化は意味ある結果を与えない．この場合に漸近正規性を得るためには漸近平均 $\int_0^T b_s dX_s$ の推定量が必要であるがこれは今後の研究対象に残されている．定理 2 は実現ボラティリティの漸近分布が収益率の（ある種の）漸近歪度と漸近尖度によって決定されることを主張するもので，このシンプルな事実は筆者の知る限りこれまで認識されてこなかった．サンプリング時刻のモデリングにおいて，各サンプリング間隔における収益率の分布の形状を考慮に入れようとするとき，その歪度の扱いには注意を要する．実データは結局のところ有限サンプルで，極限 $\epsilon_n \to 0$ における挙動のモデリングには恣意性が残るからである．次節で見るように $b_s \neq 0$ となるモデリングが可能である一方で，有限サンプルにおいては

0 でない歪度を持ちながら $b_s \equiv 0$ であるようなモデルもある．勿論このような恣意性はあらゆる漸近論においては避けられない問題であり，実現ボラティリティの分布の近似という実用上の課題に対しては $b_s \equiv 0$ なるモデルを当てはめて上の系を適用するのも一つの解答であろう．

4.　いくつかの例

この節ではいくつかのサンプリングスキームに対して仮定 1 をチェックする．

4.1　独立サンプリング

まず最も簡単なケースとして，サンプリング時刻の分布が資産過程 $S=\{S_t\}$ と独立で，またサンプリング間隔も互いに独立な状況を考えよう．ある独立な正値確率変数列 $\{\eta_j^n\}$ と $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ に対し，

$$\tau_0^n=0,\quad \tau_j^n=\psi\left(\sum_{k=1}^{j}\eta_k^n\right)$$

によって $\tau^n=\{\tau_j^n\}$ を定義する．ここで ψ は単調増加 2 階微分可能で

$$\psi(0)=0,\quad \sup_{t\geq 0}|\psi''(t)|<\infty$$

と仮定する．さらにある確率変数 η と 正数列 $\{\delta_j^n\}$ に対し

$$\eta_j^n\sim\delta_j^n\eta,\quad \eta\geq 0,\quad P[\eta^{12}]<\infty$$

が成立ち，ある減少列 $\{\epsilon_n\}$ に対し $\kappa:=\inf_{n,j\geq 1}\delta_j^n/\epsilon_n^2>0$ また j について一様に $\delta_j^n/\epsilon_n^2\to 1$ とする．前と同様に

$$M_t^n=\max\{j\geq 0;\tau_j^n\leq t\}$$

と置いたとき，容易に確かめられるように

$$\bar{W}_t:=(W_t,M_t^n,t-\tau_{M_t^n};n\in\mathbb{N})$$

は Markov 過程であるが，さらに Feller 性が成立することも仮定しておく．フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ として $\sigma(\bar{W}_s;s\leq t)\subset\mathcal{F}_t$ で，通常の仮定を満たす最小のものを考える．Feller 性より $\{\mathcal{F}_t\}$ に対して強 Markov 性が成立し，

$$\mathcal{G}_{j,n}^{2k+1}=0,\quad \mathcal{G}_{j,n}^{2k}=P[\eta^k]\frac{(2k)!}{2^k k!}\psi'(\psi^{-1}(\tau_j^n))^k\epsilon_n^{2k}+o(\epsilon_n^{2k})$$

を得る．また

$$\begin{aligned}P[M_t^n]&=\sum_{j=1}^{\infty}P[M_t^n\geq j]=\sum_{j=1}^{\infty}P[\tau_j^n\leq t]\leq\sum_{j=1}^{\infty}P\left[\exp\left\{-\sum_{k=1}^{j}\eta_j^n\right\}\geq e^{-\psi^{-1}(t)}\right]\\&\leq\sum_{j=1}^{\infty}e^{\psi^{-1}(t)}\varphi_\eta(\kappa\epsilon_n^2)^j\leq\frac{e^{\psi^{-1}(t)}}{1-\varphi_\eta(\kappa\epsilon_n^2)}=O(\epsilon_n^{-2}).\end{aligned}$$

ここで $\varphi_\eta(u)=P[e^{-u\eta}]$ は η の Laplace 変換．以上の結果より仮定 1 が

$$b_s=0,\quad a_s^2=\frac{3P[\eta^2]}{P[\eta]}\psi'(\psi^{-1}(s))$$

に対して満たされる．この場合漸近分散は非確率的だから，実はより初等的なマルチンゲール中心極限定理を使って同様の結果を導くこともできる．Y の分布が一点に退化する場合には非

確率的サンプリングとなり，第一節で例示した中心極限定理，また Mykland and Zhang (2006) と整合的な結果を与える．

4.2 可予測サンプリング

次に各 j に対して $\tau_{j+1}^n - \tau_j^n$ が $\mathcal{F}_{\tau_j^n}$-可測である場合を考えよう．これは Jacod (1994) で課されていた仮定であり，$j+1$ 回目のサンプリング時刻が直前の j 回目のサンプル時にもう分かっている状況を表現している．我々の枠組に押し込めるために，ある正値連続適合過程 $\{g_s\}$ に対して

$$\tau_{j+1}^n - \tau_j^n = g_{\tau_j^n}\epsilon_n^2 + o_p(\epsilon_n^2)$$

が成立すると仮定しよう．このとき Brown 運動の独立性から

$$\mathcal{G}_{j,n}^{2k+1} = 0,\quad \mathcal{G}_{j,n}^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} g_{\tau_j^n}^k \epsilon_n^{2k} + o_p(\epsilon_n^{2k})$$

で，また

$$\sum_{j=0}^{M_t^n} \mathcal{G}_{j,n}^n = t + O_p(\epsilon_n^2) = O_p(1)$$

であるから，仮定 1 を

$$b_s = 0,\quad a_s^2 = 3g_s$$

に対して満たす．非確率的サンプリングの場合は $g_s = \psi'(\psi^{-1}(s))$ となって前節の結果と整合的である．

4.3 パス依存サンプリング(1)

これまでに見た二つの例では共に $b_s = 0$ であった．これは対数収益率の歪度が 0 であることに起因するが，これはサンプリングが Brown 運動と(条件付き)独立であったことから自然な帰結である．筆者の知る限り，先行研究で扱われたサンプリングスキームによる実現ボラティリティの漸近分布はすべて $b_s = 0$ となる場合に含まれている．しかしこれは一般のパス依存サンプリングにおいては成立しない．以下反例を構成しよう．任意の

$$\int x\mu(dx) = 0,\quad \int x^2\mu(dx) < \infty$$

なる確率分布 μ に対して，Skorohod 停止問題とは停止時刻 T_μ で

$$W_{T_\mu} - W_0 \sim \mu \tag{4.1}$$

を満たすものを構成する問題である(例えば Revuz and Yor, 1999 参照)．その解として幾つかの方法が知られているが，例えば Azéma-Yor の解はある関数 ψ_μ によって

$$T_\mu = \inf\left\{ t \geq 0;\ \sup_{0\leq s\leq t} W_s - W_0 \geq \psi_\mu(W_t - W_0)\right\}$$

で定義される．今例として Azéma-Yor 解を紹介したが，我々の議論には(4.1)だけが本質的である．さらに Root (1969) により，この問題の解が

$$E[T_\mu^k] < \infty \Leftrightarrow \int x^{2k}\mu(dx) < \infty$$

を満たすことも示されている．さて平均 0 の確率分布に値をとる確率過程 $\{\mu_s\}$ で，確率 1 で

$$s \mapsto m_s^{(k)} := \int x^k \mu_s(dx) \Big/ \int x^2 \mu_s(dx),\quad k = 3, 4, \ldots, 12$$

が連続なものに対し，確率分布列 $\{\mu_s^n\}$ を

$$\int \psi(x)\mu_s^n(dx) := \int \psi(\epsilon_n x)\mu_s(dx)$$

と置いて，サンプリング時刻を

$$\tau_0^n := 0, \quad \tau_{j+1}^n := \tau_j^n + T_{\mu^n_{\tau_j^n}} \circ \theta_{\tau_j^n}$$

と定義しよう．ここで θ_T は shift operator で，パス ω の汎関数 $T \geq 0$ と Z に対して

$$Z \circ \theta_T(\omega(\cdot)) = Z(\omega(\cdot + T(\omega)))$$

によって定義される．このとき定義より

$$W_{\tau_{j+1}^n} - W_{\tau_j^n} \sim \mu^n_{\tau_j^n}$$

であり，強マルコフ性から

$$\mathcal{G}_{j,n}^k / \mathcal{G}_{j,n}^2 = m^{(k)}_{\tau_j^n} \epsilon_n^{k-2}$$

となる．このサンプリングスキームは，μ_s という対数収益率分布の形状をそのままに，ϵ_n によってスケールを縮めていくことで高頻度観測の漸近論に載せたものである．我々の主定理を適用するためには，さらに

$$M_t^n < \infty, \quad \sum_{j=0}^{M_t^n} \mathcal{G}_{j,n}^2 = O_p(1)$$

を保証する必要があるが，それには $\{\mu_s\}$ のある種の一様非退化性が必要である．今簡単のためそれを仮定すれば，

$$Z(\tau^n) \Rightarrow \frac{2}{3}\int_0^{\cdot} m_s^{(3)} dW_s + \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\cdot} \hat{m}_s^{(4)} dW_s', \quad \hat{m}_s^{(4)} = \sqrt{m_s^{(4)} - \frac{2}{3}|m_s^{(3)}|^2}$$

を得る．勿論 $b_s = m_s^{(3)}$ は一般に 0 ではない．

4.4 パス依存サンプリング（2）

ここではパス依存サンプリングとして，ある滑らかな単調増加関数 φ に対し

$$\begin{aligned}
&\tau_0^n = 0, \quad \tau_1^n = \inf\{t > 0; |\varphi^{-1}(X_t) - \varphi^{-1}(X_0)| = \epsilon_n\}, \\
&\tau_{j+1}^n = \tau_j^n + \tau_1^n \circ \theta_{\tau_j^n}
\end{aligned}$$

で定義されるものを考えよう．これは Tick Time Sampling と呼ばれるサンプリングスキームのモデルとして Fukasawa (2007) で導入されたものであり，$\varphi^{-1}(X_t)$ が ϵ_n 間隔のグリッドに当たったときに X_t の観測が行われる状況を表現している．以下，簡単のため $\mu = 0$ と仮定するが，そうしても一般性を失わない（詳細は Fukasawa, 2007 参照のこと）．すると考えているのは結局 Brown 運動の hitting time でその分布はよく分かっているので（例えば Karatzas and Shreve, 1991, 2.8.C 参照），直接的な計算で

$$\mathcal{G}_{j,n}^{2k} = \varphi'(\varphi^{-1}(X_{\tau_j^n}))^{2k} \epsilon_n^{2k} / \sigma^{2k} + o_p(\epsilon_n^{2k}),$$

そして

$$\mathcal{G}_{j,n}^3 = o_p(\epsilon^3)$$

を得る．また定義より

$$|\varphi^{-1}(X_{\tau_{j+1}^n}) - \varphi^{-1}(X_{\tau_j^n})|^2 = \epsilon_n^2, \quad \sup_{0 \leq j \leq M_t^n} |\tau_{j+1}^n - \tau_j^n| \to 0 \text{ a.s.}$$

だから

$$\epsilon_n^2 M_t^n = \sum_{j=0}^{M_t^n} |\varphi^{-1}(X_{\tau_{j+1}^n}) - \varphi^{-1}(X_{\tau_j^n})|^2 \to \langle \varphi^{-1}(X) \rangle_t$$

より

$$M_t^n = O_p(\epsilon_n^{-2})$$

も示せて，仮定 1 が

$$b_s = 0, \quad a_s^2 = \varphi'(\varphi^{-1}(X_s))^2/\sigma^2$$

に対して満たされることになる．

5. おわりに

本稿では実現ボラティリティの高頻度観測極限における中心極限定理を一般の確率的なサンプリングスキームに対して証明した．また幾つかの具体的な例で，実際に仮定が満たされ，漸近分布が陽に計算できることを示した．確率過程として Black-Scholes モデルを仮定したが，より一般の連続セミマルチンゲールに対して結果が自然に拡張されるのを見るのは容易い．実際，連続局所マルチンゲール $M = \{M_t\}$ は Dambis-Dubins-Schwarz の定理(例えば Karatzas and Shreve, 1991, 3.4.6 参照)により，ある Brown 運動 W に対し $M = W_{\langle M \rangle}$ と表現される．するとある停止時刻の列 $\{\tau_j^n\}$ に対し $M_{\tau_j^n}$ がデータとして与えられるということは，時間変更後のフィルトレーション に対する停止時刻の列 $\{T_j^n\}$，$T_j^n := \langle M \rangle_{\tau_j^n}$ に対して $W_{T_j^n}$ が観測されるというモデルと同等である．一方不連続なセミマルチンゲールに対する実現ボラティリティの収束定理は，今回我々が考察したような一般の確率的サンプリングに対しては今後の研究対象として残されている．最も単純な $\tau_j^n = j/n$ という非確率的等間隔なケースに限っては最近 Jacod (2007, 2008)が中心極限定理の証明に成功している．また，今回我々は一次元の問題に限定したが，多次元の確率過程に対する共分散構造の推定に対しても，Hayashi and Yoshida (2005, 2008)で一致性を持つ推定量が提案され，また独立サンプリングにおける漸近分布も解析されており，一般の確率的サンプリングスキームに対してその結果を拡張するためには今回の我々の方法が有用かもしれない．これらのボラティリティ推定の分野は現在非常に活発に研究され，計量ファイナンスの実用的側面からも注目されている．

参 考 文 献

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, **64**(2), 253–280.

Fukasawa, M. (2007). Realized volatility based on tick time sampling, Preprint Series, UTMS 2007–19, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.

Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, **29**(1), 119–151.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**(2), 359–379.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2008). Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes, *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, **60**(2), 367–406.

Jacod, J. (1994). Limit of random measures associated with the increments of a Brownian semimartingale (preprint).

Jacod, J. (1997). On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law, *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, **31**, 232–246.

Jacod, J. (2007). Asymptotic properties of power variations of Lévy processes, *ESAIM. Probability and Statistics*, **11**, 173–196.

Jacod, J. (2008). Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118** (4), 517–559.

Jacod, J. and Protter, P. (1998). Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations, *Annals of Probability*, **26** (1), 267–307.

Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 288, Springer-Verlag, Berlin.

Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 113, Springer-Verlag, New York.

Mykland, P. A. and Zhang, L. (2006). ANOVA for diffusions and Itô processes, *Annals of Statistics*, **34** (4), 1931–1963.

Revuz, D. and Yor, M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed., Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 293, Springer-Verlag, Berlin.

Root, D. H. (1969). The existence of certain stopping times on Brownian motion, *Annals of Mathematical Statistics*, **40** (2), 715–718.

Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 57, No. 1, 3–16 (2009)

On Asymptotic Distribution of Realized Volatility

Masaaki Fukasawa

CSFI, Osaka University

A central limit theorem for realized volatility based on a general stochastic sampling scheme is proved. The asymptotic distribution depends on the sampling scheme, which is written explicitly in terms of asymptotic skewness and kurtosis of returns. The conditions for the central limit theorem to hold are examined for several concrete examples of schemes.

Key words: High frequency data, volatility, stable convergence.