研究小景2024～データ解析における微分幾何～

矢野　恵佑　　統計基盤数理研究系　准教授

概要：
- 2024年前半に行った研究のうち微分幾何学を使った研究を紹介します。
- データ解析の中に潜む幾何構造を調べることもあれば幾何構造を使ってデータ解析をすることもあります。

「平行移動」を利用した速度ベクトルのクラスタリング

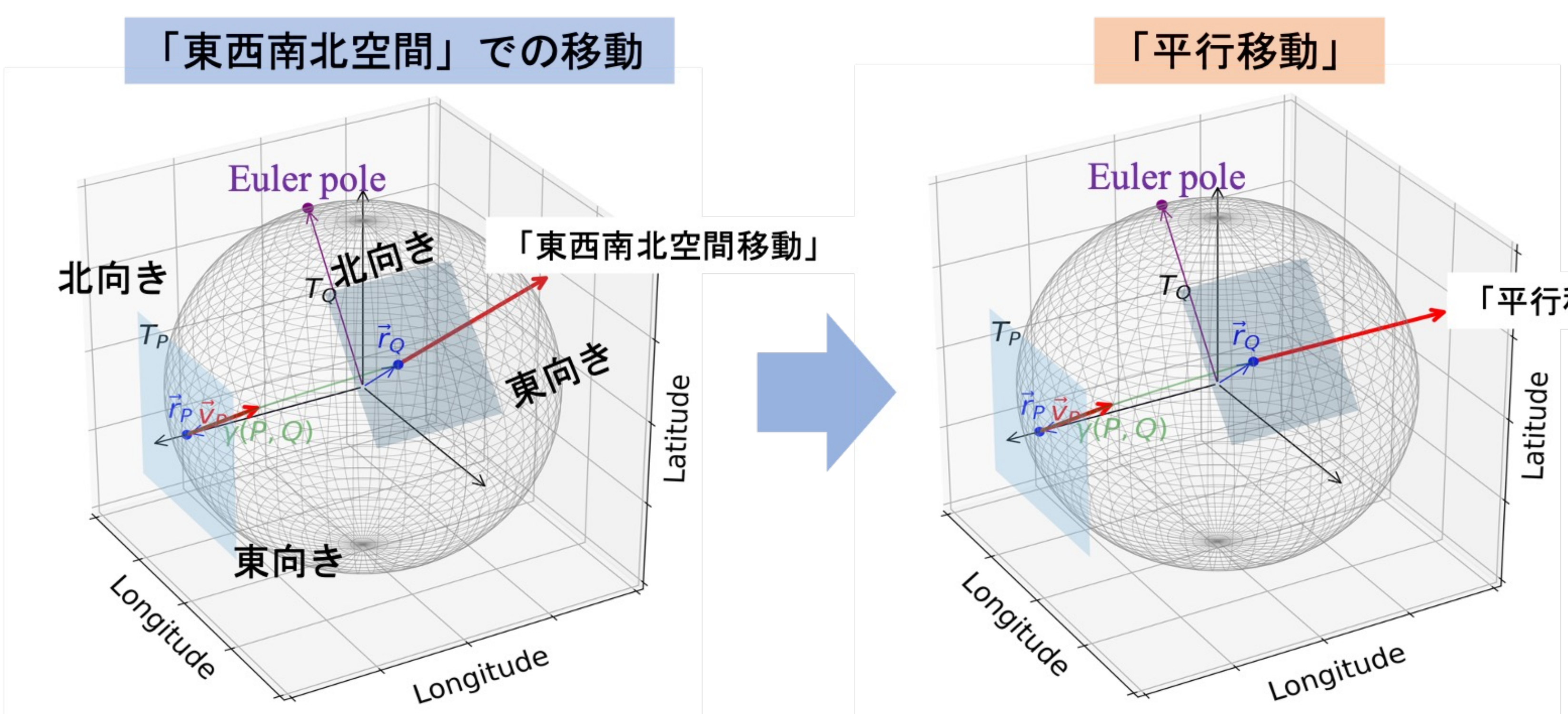
理化学研究所 高橋温志氏・東北大学 加納将行氏との共同研究

モチベーション：地殻ブロックの客観的同定

提案手法：以下の類似度による階層型クラスタリング
① 球面上の速度ベクトルの「平行移動」の活用 (PT)
② 回転運動の考慮 (EV)
→ ①と②を組み合わせたハイブリッド類似度 (EVPT)

① 球面上の速度ベクトルの「平行移動」(PT)

$$d_{PT}(\{P, v_P\}, \{Q, v_Q\}) = ||v_Q - \Pi_{\gamma(P,Q)} v_P||$$

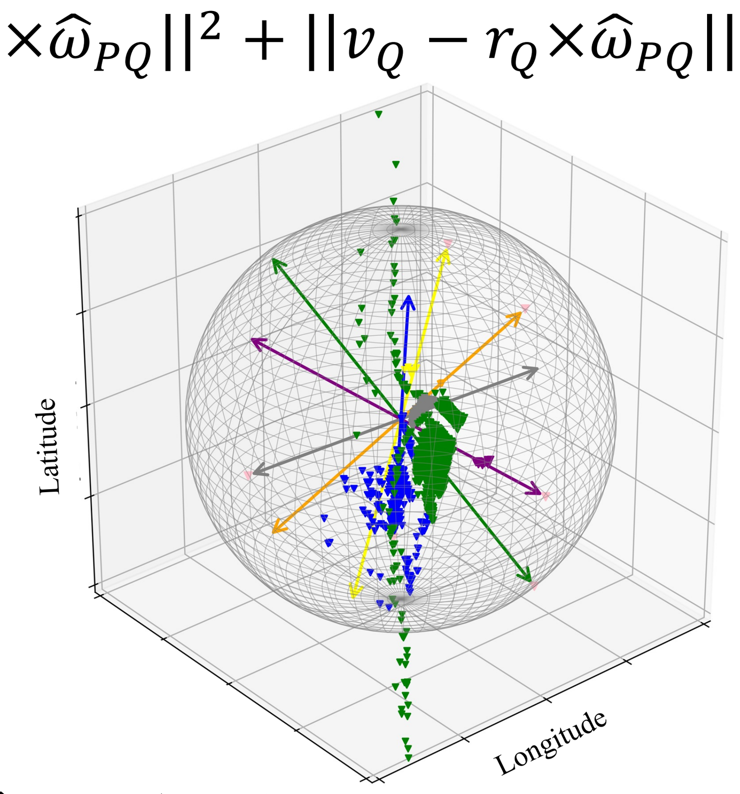


② 回転運動の考慮 (EV)

$$d_{EV}(\{P, v_P\}, \{Q, v_Q\}) = \sqrt{||v_P - r_P \times \hat{\omega}_{PQ}||^2 + ||v_Q - r_Q \times \hat{\omega}_{PQ}||^2}$$

ここで$\hat{\omega}_{PQ}$は以下で定義される：

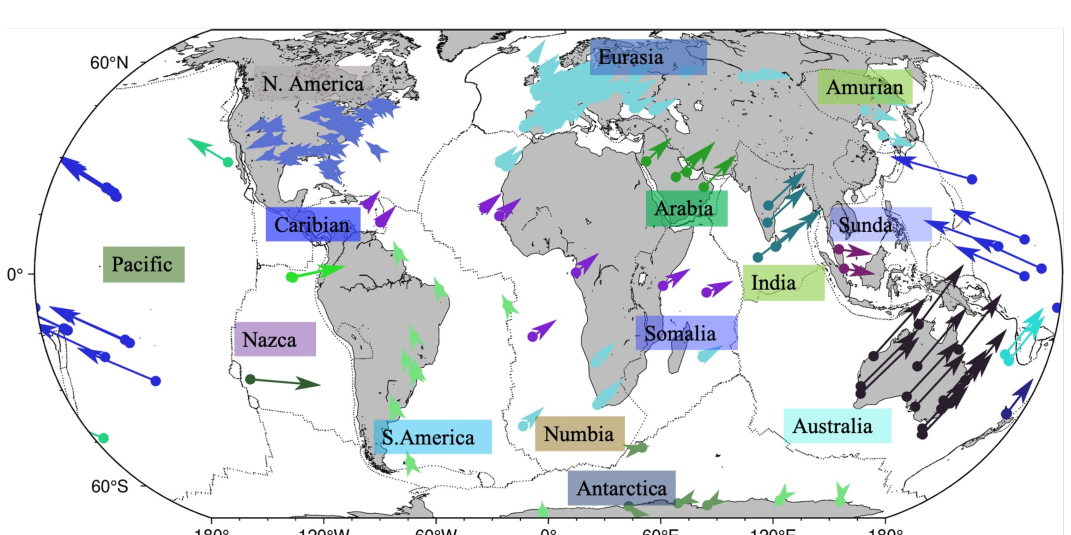
$$||v_P - r_P \times \hat{\omega}_{PQ}||^2 + ||v_P - r_P \times \hat{\omega}_{PQ}||^2 = \min_{\omega} ||v_P - r_P \times \omega||^2 + ||v_P - r_P \times \omega||^2$$



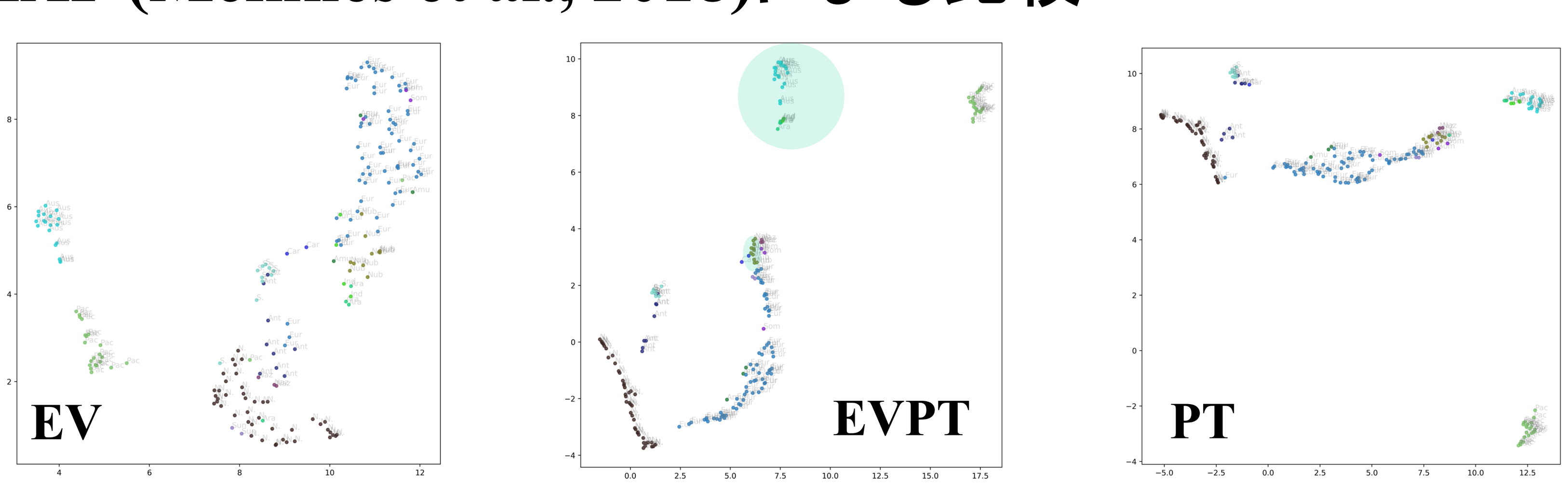
→ ①と②を組み合わせたハイブリッド類似度 (EVPT)

$$d_{PT}(\{P, v_P\}, \{Q, v_Q\}) = w_1 d_{PT} + w_2 d_{EV}$$

世界規模衛星測位データ (Altamimi et al., 2008)への適用



UMAP (McInnes et al., 2018)による比較



行列式点過程の情報幾何

統計数理研究所 日野 英逸氏との共同研究

モチベーション：行列式点過程の構造の理解

有限集合 $\mathcal{Y} = \{1, \dots, m\}$ 上の行列式点過程
(1) 集合上の確率分布
(2) 文書要約・推薦システム・ベイズ統計で利用される
(3) 二つの表示をもつ

$$P_L(A \subseteq Y) = \det(K_A), A \subseteq \mathcal{Y}$$
$$P_L(A \subseteq Y) = \det(L_A)/\det(L + I_{m\times m})$$

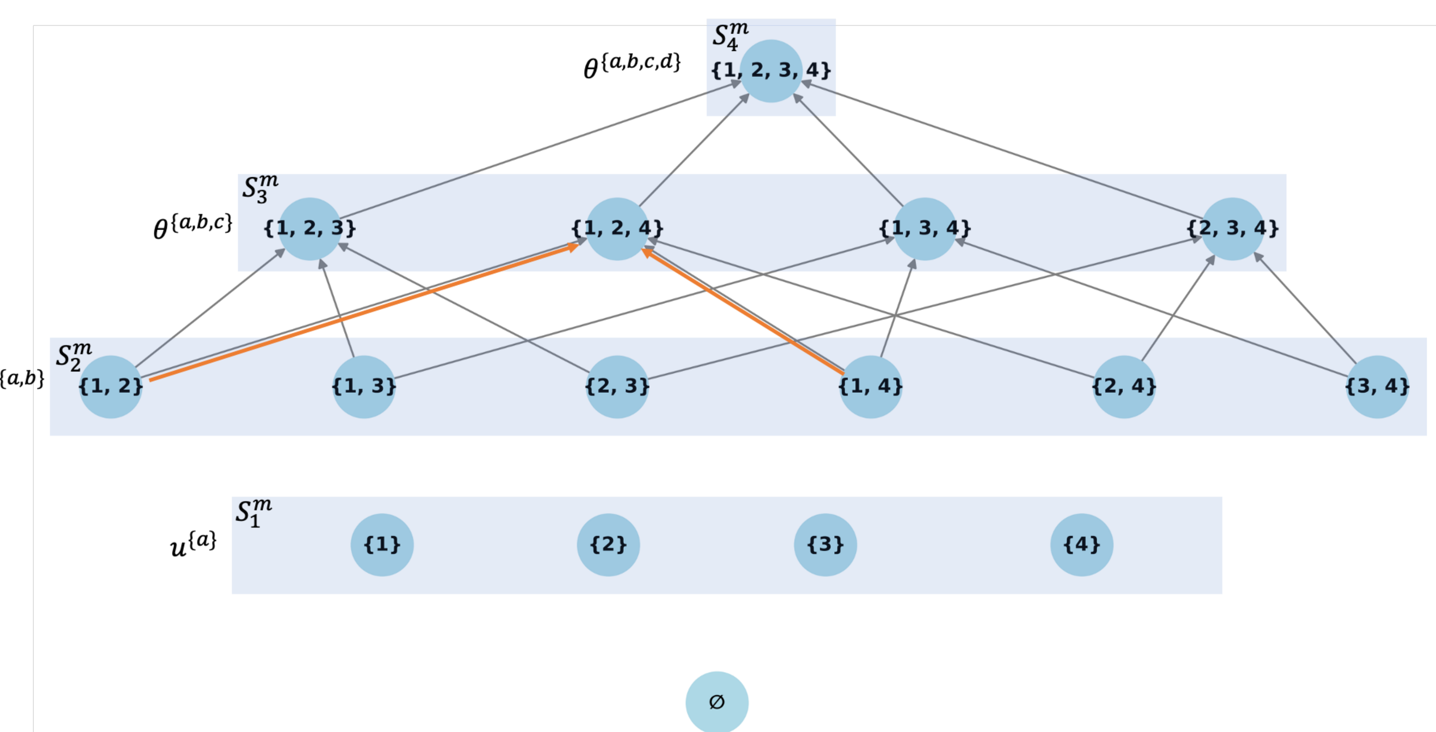
→ Kは周辺カーネル・LはL-アンサンブルカーネル
→ 両者は$L = K(I_{m\times m} - K)^{-1}$で結ばれる

行列式点過程はどのような性質を持つだろうか？

結果1：行列式点過程は曲指数型分布族をなす

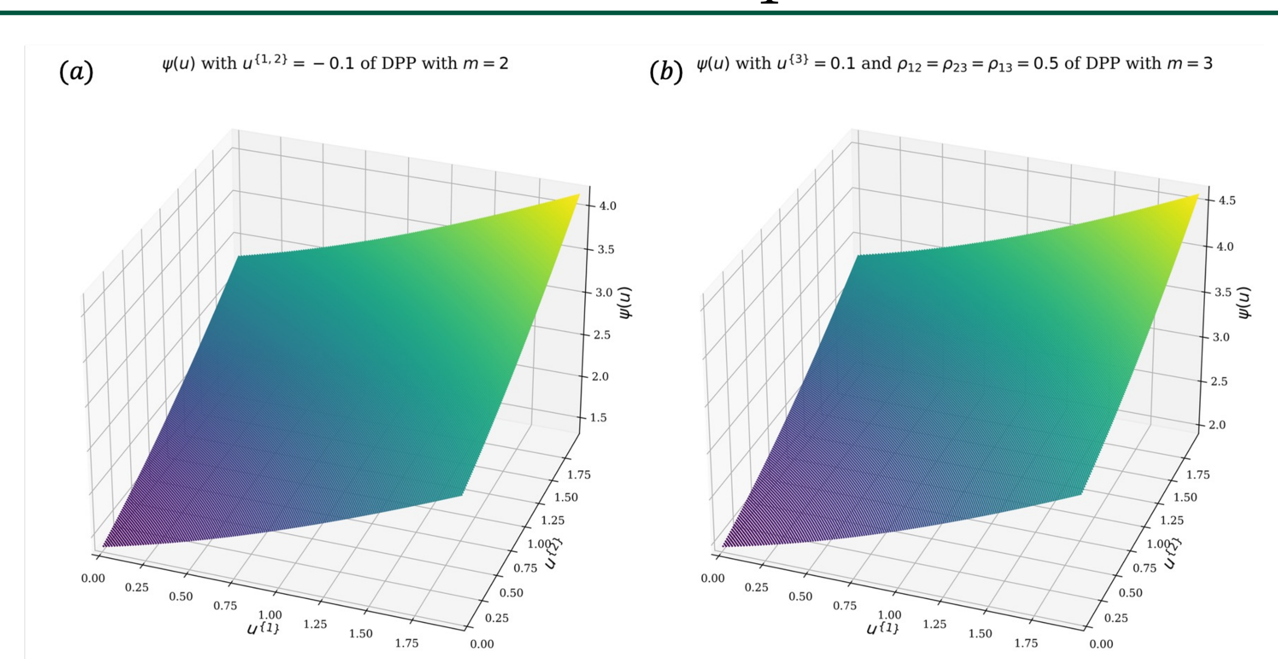
$$P_L(A) = \exp\left(\sum_{\alpha \in S_1^m \cup S_2^m} u^\alpha T_\alpha(A) + \sum_{\mathcal{J} \in \cup_{k\geq 3} S_k^m} \theta(u)^{\mathcal{J}} T_{\mathcal{J}}(A) - \psi(u) \right)$$

ここでuが自由に動けるパラメータ ($m(m+1)/2$次元)
$u^{\{a\}} := \log L_{aa},\ u^{\{a,b\}} := \log(1 - L_{ab}/\sqrt{L_{aa}L_{bb}})$
$T_{\mathcal{J}}(A) = 1_{i_1 \in A, \dots, i_k \in A}$ with $\mathcal{J} = \{i_1, \dots, i_k\}$



自由に動けるパラメータと拘束されたパラメータの関係 ($m = 4$)

結果2：
$(u^\alpha)_{\alpha \in S_1^m}$方向のe-埋め込み曲率は0
→ $(u^\alpha)_{\alpha \in S_1^m}$は指数型分布族同様の性質をもつ
例えばFisher情報行列の$(u^\alpha)_{\alpha \in S_1^m}$成分は$\psi(u)$のヘシアン



$\psi(u)$の形状

結果3：LとKの双対関係

$$\det(K_\alpha) = \left(\frac{\partial \psi(u)}{\partial u^\alpha}\right), \alpha \in S_1^m$$