離散凸解析におけるShapley–Folkman型定理

室田　一雄　　大学統計教員育成センター　特任教授

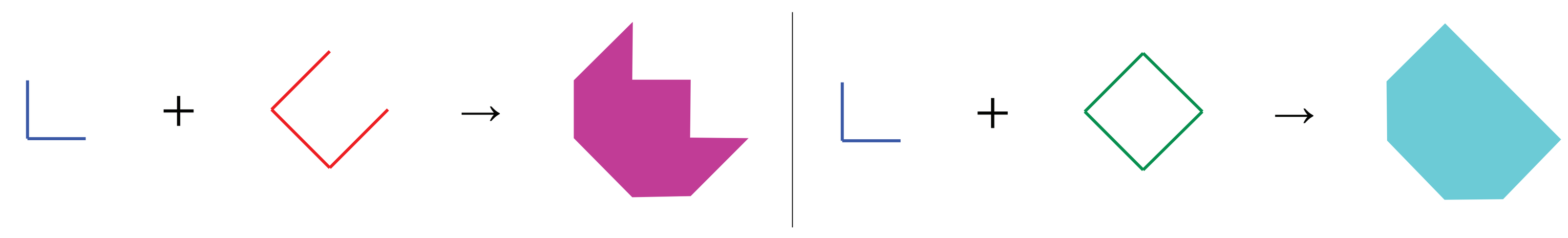
離散凸解析は，整数格子点の集合やその上で定義された関数を，凸解析と組合せ論の両方の視点から考察する理論であり，「凸関数に似た離散構造」と「離散構造をもつ凸関数」の両方を扱うことを目指している．離散最適化，オペレーションズ・リサーチ，システム解析，ゲーム理論，数理経済学，離散幾何などへの応用がある．

1　Shapley–Folkmanの定理（連続世界）

集合S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$に対して，

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

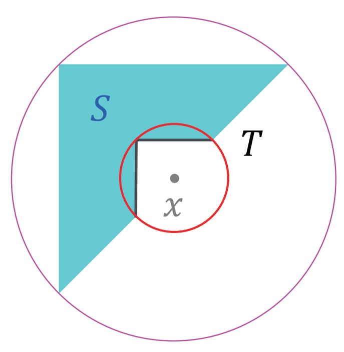
で定義される集合をS_1とS_2の**Minkowski和**（ベクトル和）とよぶ．凸集合のMinkowski和は凸集合である．凸とは限らない集合$S_1, S_2, \ldots, S_m$のMinkowski和$\sum_{i=1}^m S_i$とその凸包$\overline{\sum_{i=1}^m S_i}$との違いを定量的に評価する定理がある．



集合S ($\subseteq \mathbb{R}^n$) に対して，半径$\mathrm{rad}(S)$と内径$r(S)$を

$$\mathrm{rad}(S) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in S} \|x - y\|_2$$

$$r(S) = \sup_{x \in \overline{S}} \inf_{T} \{\mathrm{rad}(T) \mid x \in \overline{T}, T \subseteq S\}$$



と定義する．半径$\mathrm{rad}(S)$は，S全体を包含する球の半径の最小値を表す．内径$r(S)$の定義における$\inf_{T}\{\mathrm{rad}(T) \mid \cdots\}$の部分は，$x \in \overline{T}$を満たす集合$T$ ($\subseteq S$)の中で半径$\mathrm{rad}(T)$ をできるだけ小さくすることを表している．内径$r(S)$はSのもつ穴や窪みの大きさを表現しており，Sが凸集合ならば$r(S) = 0$である．

任意の（凸とは限らない）集合$S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) のMinkowski和　$W = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$　について，次の2つの定理がある．

定理 1.1 (Shapley–Folkman)　任意の$x \in \overline{W}$ に対して，$\{1, 2, \ldots, m\}$の部分集合Iで，

$$|I| \le \min(n, m), \quad x \in \overline{\sum_{i \in I} S_i} + \sum_{j \notin I} S_j$$

を満たすものが存在する．

定理 1.2 (Shapley–Folkman–Starr)　$S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) がコンパクト集合で，ある$L \in \mathbb{R}$に対して$r(S_i) \le L$　($i = 1, 2, \ldots, m$) が成り立つならば，任意の$x \in \overline{W}$ に対して，

$$\|x - z\|_2 \le L\sqrt{\min(n, m)}$$

を満たす$z \in W$が存在する．

定理1.2はShapley–Folkmanの定理のStarrによる精密化である．この定理は経済学の分野で発見されたものであり，例えば，需要集合S_iが凸集合でない場合（典型的には不可分財の場合）に，総需要$\sum_{i=1}^m S_i$を凸化（連続緩和）した問題において均衡の存在を示し，その近似度を定理1.2 で保証するというような使い方をする

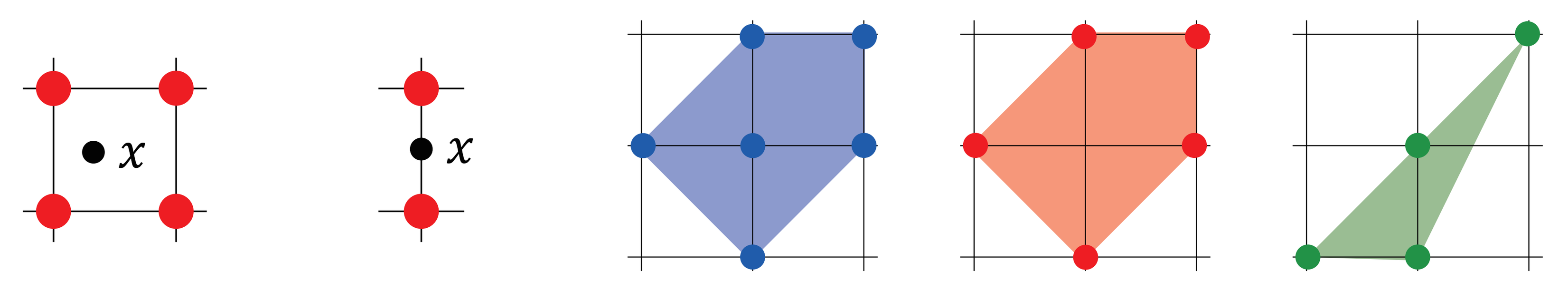
2　整凸集合のMinkowski和（離散世界）

整凸集合の概念は離散凸集合の一般的な枠組みを与えており，離散凸解析に登場する殆どすべての集合は整凸集合である．整凸集合は，マトロイド的な組合せ構造をもたない離散凸集合の概念と位置づけられる．

実数点$x \in \mathbb{R}^n$の整数近傍を

$$\mathrm{N}(x) = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \lfloor x_i \rfloor \le z_i \le \lceil x_i \rceil \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

と定義する（$\lfloor t \rfloor$ は実数tの整数への切り捨て，$\lceil t \rceil$ は切り上げを表す）．

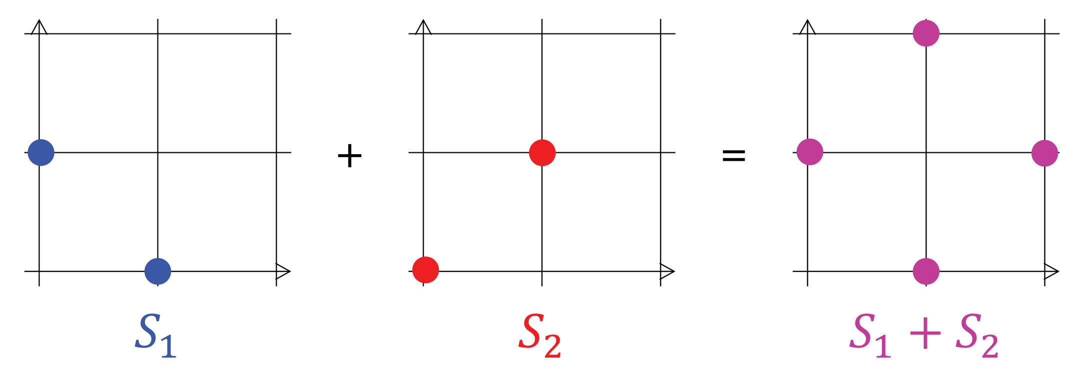


xの整数近傍　　整凸　　非整凸　　非整凸

集合$S \subseteq \mathbb{Z}^n$と点$x \in \mathbb{R}^n$に対して，$S \cap \mathrm{N}(x)$の凸包をSのxにおける局所凸包とよぶ．局所凸包の和集合がSの凸包に一致するとき，すなわち「$x \in \overline{S} \Rightarrow x \in \overline{S \cap \mathrm{N}(x)}$」が成り立つとき，$S$を整凸集合とよぶ．$\{0, 1\}^n$に含まれる任意の集合は整凸集合である．

次の例のように，整凸集合のMinkowski和には穴（$x \notin S_1 + S_2$である$x \in \overline{(S_1 + S_2)} \cap \mathbb{Z}^n$）が存在する可能性がある．

例:　$S_1 = \{(0, 0), (1, 1)\}$ と$S_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ のMinkowski和は$S_1 + S_2 = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ であり，$(1, 1)$に穴がある．



この意外な現象は，離散世界の難しさを端的に示している．

次の2つの定理は，任意個数の整凸集合について，穴の「近く」にMinkowski和の点が存在することを示している．$S_i \subseteq \mathbb{Z}^n$ ($i = 1, \ldots, m$) を整凸集合として　$W = S_1 + \cdots + S_m$　とおき，空間の次元nと集合S_iの個数mの関数$\alpha = \alpha(n, m)$, $\beta = \beta(n, m)$を定義する：

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \min(n, m), \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{n \cdot \min(n, m)}.$$

定理 2.1　$n \ge 2$とする．任意の$x \in \overline{W}$ に対して，$\|x - z\|_\infty \le \alpha$ を満たす$z \in W$ が存在し，

$$x \in \overline{W} \cap \mathbb{Z}^n \quad \text{ならば} \quad \|x - z\|_\infty \le \lfloor \alpha \rfloor = \min(n, m) - 1.$$

定理 2.2　任意の$x \in \overline{W}$ に対して，$\|x - z\|_2 \le \beta$ （したがって$\|x - z\|_\infty \le \beta$）を満たす$z \in W$ が存在し，

$$x \in \overline{W} \cap \mathbb{Z}^n \quad \text{ならば} \quad \|x - z\|_\infty \le \lfloor \beta \rfloor.$$

上の例では，$n = 2$, $m = 2$, $\alpha = \beta = 1$ であり，$x = (1, 1) \in \overline{S_1 + S_2}$に対して$z = (1, 0) \in S_1 + S_2$ は$\|x - z\|_\infty \le 1$を満たす．

定理2.1，定理2.2より，任意の$x \in \overline{W}$に対して

$$\|x - z\|_\infty \le \min\{\alpha(n, m), \beta(n, m)\}$$

を満たす$z \in W$が存在することになる．$\lfloor \alpha \rfloor$, $\lfloor \beta \rfloor$ の値は以下の通り．

個数	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$	
次元	$\lfloor \alpha \rfloor$	$\lfloor \beta \rfloor$	$\lfloor \alpha \rfloor$	$\lfloor \beta \rfloor$	$\lfloor \alpha \rfloor$	$\lfloor \beta \rfloor$	$\lfloor \alpha \rfloor$	$\lfloor \beta \rfloor$	$\lfloor \alpha \rfloor$	$\lfloor \beta \rfloor$
$n = 2$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 3$	0	0	1	1	2	**1**	2	**1**	2	**1**
$n = 4$	**0**	1	1	1	2	**1**	3	**2**	3	**2**
$n = 8$	**0**	1	**1**	2	2	2	3	**2**	4	**3**
$n = 12$	**0**	1	**1**	2	**2**	3	3	3	4	**3**
$n = 16$	**0**	2	**1**	2	**2**	3	**3**	4	4	4

参考文献

- Arrow, K.J., Hahn, F.H.: General Competitive Analysis (1971)
- 室田一雄: 離散凸解析, 共立出版 (2001)
- 室田一雄: 離散凸解析の考えかた, 共立出版 (2007)
- Murota, K., Tamura, A.: Shapley–Folkman theorem for integrally convex sets, arXiv: 2305.15125 (2023)