

自己回帰線形混合効果モデルとダイナミックパネルモデル

船渡川 伊久子 統計基盤数理研究系 准教授

1 自己回帰線形混合効果モデルとダイナミックパネルモデル

自己回帰線形混合効果モデル (Autoregressive linear mixed effects models) (Funatogawa et al., 2007) と類似のモデルについて紹介します。自己回帰線形混合効果モデルは、経時データ解析 (longitudinal data analysis) でよく用いられる線形混合効果モデルに自己回帰を組み合わることで、線形混合効果モデルを拡張させたモデルで、反応の経時変化を表すことを主眼に開発してきました。一方、経済学や社会学などにおける動的パネルモデル (dynamic panel model) でも、反応を以前の反応に回帰しますが、以前の反応で調整 (コントロール) すると捉えることが多いようです。また、分野によっては、パネルデータで、観測されない個体に固有な性質をコントロールするという考えを強調することが多いようです。尤度を用いた手法が2010年代に提案されていますので、ここでは、2種類のモデルを紹介します。

2 Moral-Benito, Allison and Williams (2019) の尤度

$$y_{i,t} = \lambda y_{i,t-1} + \beta x_{i,t} + \alpha_i + v_{i,t},$$

$$\text{制約 } E(v_{i,t} | y_{i,0}, \dots, y_{i,t-1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,t}, \alpha_i) = 0 \quad (t = 1, \dots, T) \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\text{observed data } R_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,T}, y_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$$

$$\text{disturbances } U_i = (\alpha_i, v_{i,1}, \dots, v_{i,T}, v_{i,0}, \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,T})$$

time demeaning

$$R_i \sim MVN(0, B^{-1} DCov(U_i) D' B'^{-1}),$$

$$\text{対数尤度 } L \propto \frac{N}{2} \log \det (B^{-1} DCov(U_i) D' B'^{-1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_i' (B^{-1} DCov(U_i) D' B'^{-1})^{-1} R_i$$

$T=3$ の場合

$$Cov(U_i) = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 0 & \sigma_{v1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{21} & \psi_{31} \\ 0 & 0 & \sigma_{v1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{32} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{v1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v0}^2 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \omega_{01} & \sigma_{\xi 1}^2 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \phi_2 & \psi_{21} & 0 & 0 & \omega_{02} & \omega_{12} & \sigma_{\xi 2}^2 & \omega_{23} \\ \phi_3 & \psi_{31} & \psi_{32} & 0 & \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & \sigma_{\xi 3}^2 \end{pmatrix}$$

$$y_{i,t} - \lambda y_{i,t-1} - \beta x_{i,t} = \alpha_i + \varepsilon_{i,t}, \quad y_{i,0} = v_{i,0}, \quad x_{i,t} = \xi_{i,t} \quad (t = 1, \dots, T) \text{ を } BR_i = DU_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ y_{i,3} \\ y_{i,0} \\ x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ x_{i,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ v_{i,3} \\ v_{i,0} \\ \xi_{i,1} \\ \xi_{i,2} \\ \xi_{i,3} \end{pmatrix}$$

3 Allison, Williams and Moral-Benito (2017)

$$y_{i,t} = \mu_t + \lambda y_{i,t-1} + \beta x_{i,t-1} + \delta w_{i,t} + \gamma z_i + \alpha_i + \varepsilon_{i,t},$$

$$\text{Endogenous variables } \mathbf{y}'_i = (y_{i,2}, \dots, y_{i,T})$$

$$\text{Exogenous (observed or latent) variables } \mathbf{x}'_i = (\alpha_i, z_i, y_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,T-1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,T}, \varepsilon_{i,2}, \dots, \varepsilon_{i,T})$$

$x_{i,t}$ predetermined (sequentially exogenous)

$z_i, w_{i,t}$ strictly exogenous

Multivariate normal

$T=4$ の場合

$$Cov(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 & \sigma_{\alpha y1} & \sigma_{\alpha x1} & \sigma_{\alpha x2} & \sigma_{\alpha x3} & \sigma_{\alpha w2} & \sigma_{\alpha w3} & \sigma_{\alpha w4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & \sigma_{zy1} & \sigma_{zx1} & \sigma_{zx2} & \sigma_{zx3} & \sigma_{zw2} & \sigma_{zw3} & \sigma_{zw4} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha y1} & \sigma_{zy1} & \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y1x1} & \sigma_{y1x2} & \sigma_{y1x3} & \sigma_{y1w2} & \sigma_{y1w3} & \sigma_{y1w4} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha x1} & \sigma_{zx1} & \sigma_{y1x1} & \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & \sigma_{x1x3} & \sigma_{x1w2} & \sigma_{x1w3} & \sigma_{x1w4} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha x2} & \sigma_{zx2} & \sigma_{y1x2} & \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & \sigma_{x2x3} & \sigma_{x2w2} & \sigma_{x2w3} & \sigma_{x2w4} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha x3} & \sigma_{zx3} & \sigma_{y1x3} & \sigma_{x1x3} & \sigma_{x2x3} & \sigma_{x3}^2 & \sigma_{x3w2} & \sigma_{x3w3} & \sigma_{x3w4} & \sigma_{x3\varepsilon 2} & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha w2} & \sigma_{zw2} & \sigma_{y1w2} & \sigma_{x1w2} & \sigma_{x2w2} & \sigma_{x3w2} & \sigma_{w2}^2 & \sigma_{w2w3} & \sigma_{w2w4} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha w3} & \sigma_{zw3} & \sigma_{y1w3} & \sigma_{x1w3} & \sigma_{x2w3} & \sigma_{x3w3} & \sigma_{w2w3} & \sigma_{w3}^2 & \sigma_{w3w4} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\alpha w4} & \sigma_{zw4} & \sigma_{y1w4} & \sigma_{x1w4} & \sigma_{x2w4} & \sigma_{x3w4} & \sigma_{w2w4} & \sigma_{w3w4} & \sigma_{w4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x3\varepsilon 2} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon 2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon 3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon 4}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{BY} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{X}$$

$$\begin{pmatrix} y_{i,2} \\ y_{i,3} \\ y_{i,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i,2} \\ y_{i,3} \\ y_{i,4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \gamma & \lambda & \beta & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\alpha_i, z_i, y_{i,1}, x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, w_{i,2}, w_{i,3}, w_{i,4}, \varepsilon_{i,2}, \varepsilon_{i,3}, \varepsilon_{i,4})'$$

4 おわりに

ここでは、同じ研究グループから経済学と社会学分野で発表された論文を紹介しました。経時データ解析やパネルデータ分析では、同じ単語が分野や文献によって異なって使われていることが、知られてきています。観測されない個体効果が共変量 (説明変数) と相関している場合を「固定効果」、相関していない場合を「変量効果」と呼ぶ分野もあり、従来の線形混合効果モデルの文献とは異なるようです。「外生 (exogenous)」、「内生 (endogenous)」という用語も文献により定義が異なります。また、計量経済学のパネルデータは時系列モデルの影響を強く受けています。隣接分野で提案されているモデルを紹介しましたが、扱うデータやデザイン、目的の違いなどもあると思います。

References

- Allison, Williams and Moral-Benito (2017). Maximum Likelihood for cross-lagged panel models with fixed effects. *Socius: Sociological research for a dynamic world*. 1-17.
- Funatogawa et al. (2007). An autoregressive linear mixed effects model for the analysis of longitudinal data which show profiles approaching asymptotes. *Statistics in Medicine*. 2113-30.
- Moral-Benito (2013). Likelihood-based estimation of dynamic panels with predetermined regressors. *Journal of Business & Economic Statistics*. 451-72.
- Moral-Benito, Allison and Williams (2019). Dynamic panel data modeling using maximum likelihood: an alternative to Arellano-Bond. *Applied Economics*. 2221-32.