D-Vine Copulaによる株価相互依存性のモデリング

西 一郎　総合研究大学院大学 統計科学コース 博士後期課程 3年

1　市場リスクのモデリング

金融商品価格の変動に由来する市場リスクの適切なモデリングは，金融機関と規制当局双方にとって重要である．金融機関は，資金を多種の金融資産に投資し，複数銘柄からなるポートフォリオを構成するため，市場リスクのリスク管理では，個々の商品価格を確率変数と見なし，多変量確率分布により金融資産ポートフォリオの価格が記述できるとして評価を行う．この多変量確率分布のモデルが，ポートフォリオの価格変動を適切に捉えるためには，個々の商品価格の確率変動（周辺分布）に加えて，商品価格間の依存構造を適切に与える必要がある．例えば，前者について，株価の収益率分布等の周辺分布は，正規分布より厚い裾を持つ（平均値から離れたところで相対的に確率密度が大きい）場合が多い．また，後者について，周辺分布間の依存性は，例えば，市場にストレスが生じると，多くの株価が同時下落する場合があることが知られている．

これらの周辺分布の特性と，依存関係を適切に合成する手法としてコピュラ（Copula）が注目されている [1]．Copulaは，多変量分布を，各変量の周辺分布と，周辺分布間の依存構造とに分離して表現することを可能とする．しかし，2変数においては様々なCopulaのパターン（族）が提案されている一方，3変数以上のCopulaは2変数ほど種類は多くなく，かつ，各変数間を同じ族のCopulaでしか記述できないため，ポートフォリオの多変量確率分布をうまく表現できない問題点があった．これに対し，2変数のCopulaの組み合わせで多変数Copulaを表現するヴァインコピュラ（Vine Copula）が提案されている [2]．

2　CopulaとVine Copula

2.1　Copula

定義 1 (Copula) 周辺分布が標準一様分布である $[0,1]^d$ 上の分布関数を d 次元 *Copula* という．

定理 2 (Sklarの定理) F は $F_1, \dots, F_d$ を周辺分布とする同時分布関数とする．このとき，

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

を満たす *Copula* $C : [0,1]^d \to [0,1]$ が存在し，周辺分布が連続ならば C は一意に定まる．逆に，C が *Copula* で $F_1, \dots, F_d$ が 1 次元分布関数ならば，上で定義される関数 F は $F_1, \dots, F_d$ を周辺分布とする同時分布関数となる

- Sklarの定理は，周辺分布をCopula C と連結させることで，同時分布 F が得られることを示している．
- $x_i = F_i^{-1}(u_i)$ で評価して，

  $$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

  と変形すれば，連続な周辺分布をもつ多変量分布関数からCopulaを抽出できる．

2.2　Vine Copula

Vine Copulaは，2変数Copulaを組み合わせることにより多変数のCopulaを構築する方法（Pair Copula Construction）であり，各Copulaの族を自由に選択することができることから，従来のCopulaよりもモデリングにおける柔軟性に優れている．

例 1 (3変数のPair Copula Construction) F と C の密度関数をそれぞれ f と c で表すと

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) =& f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) f_{2|1}(x_2|x_1) f_1(x_1) \\ =& c_{13;2}\left(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)\right) c_{23}\left(F_2(x_2), F_3(x_3)\right) f_3(x_3) \\ & \times c_{12}\left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right) f_2(x_2) \times f_1(x_1) \end{aligned}$$

と変形できる（一例）．ここで，$X_2 = x_2$ のもとで (X_1, X_3) の分布に対応する *Copula* を $c_{13;2}$ と表現した．この変形により，多変数の *Copula* が *2* 変数 *Copula* と *1* 変数の（条件付き）分布関数のみで表現できている．

以上は3変数の場合の例だが，一般の d 次元に拡張することができる．

3　D-Vine Copulaによる分位点回帰

Kraus and Czadoは，計算負荷が小さいながらも精度が高い分位点回帰の手法としてD-Vine Copulaによるアプローチを提唱した [3]．以下に，2018，2019の2年間のTOPIX，ならびに，各業種を代表する銘柄としてMUFG，信越化学工業，SONY，トヨタ自動車の相互依存性を同アプローチによりフィッティングし，各銘柄に対するストレスがTOPIXに対して与える影響の予測結果を示す．具体的には，各インデックス・銘柄の対数リターンを $GARCH(1,1)$ モデルでフィッティングし，標準化残差に対してRのvinregパッケージを用いて解析した．

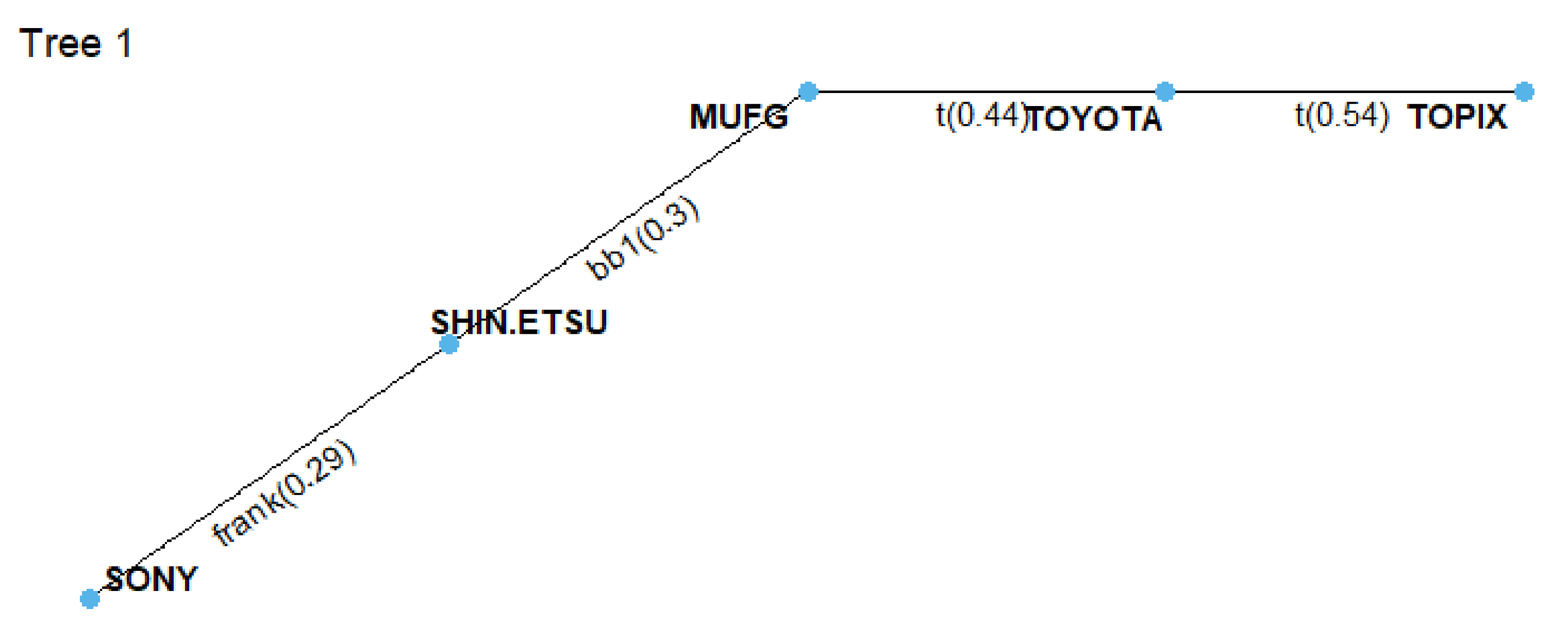

図 1: Vine Copula第1ツリーのフィッティング結果．

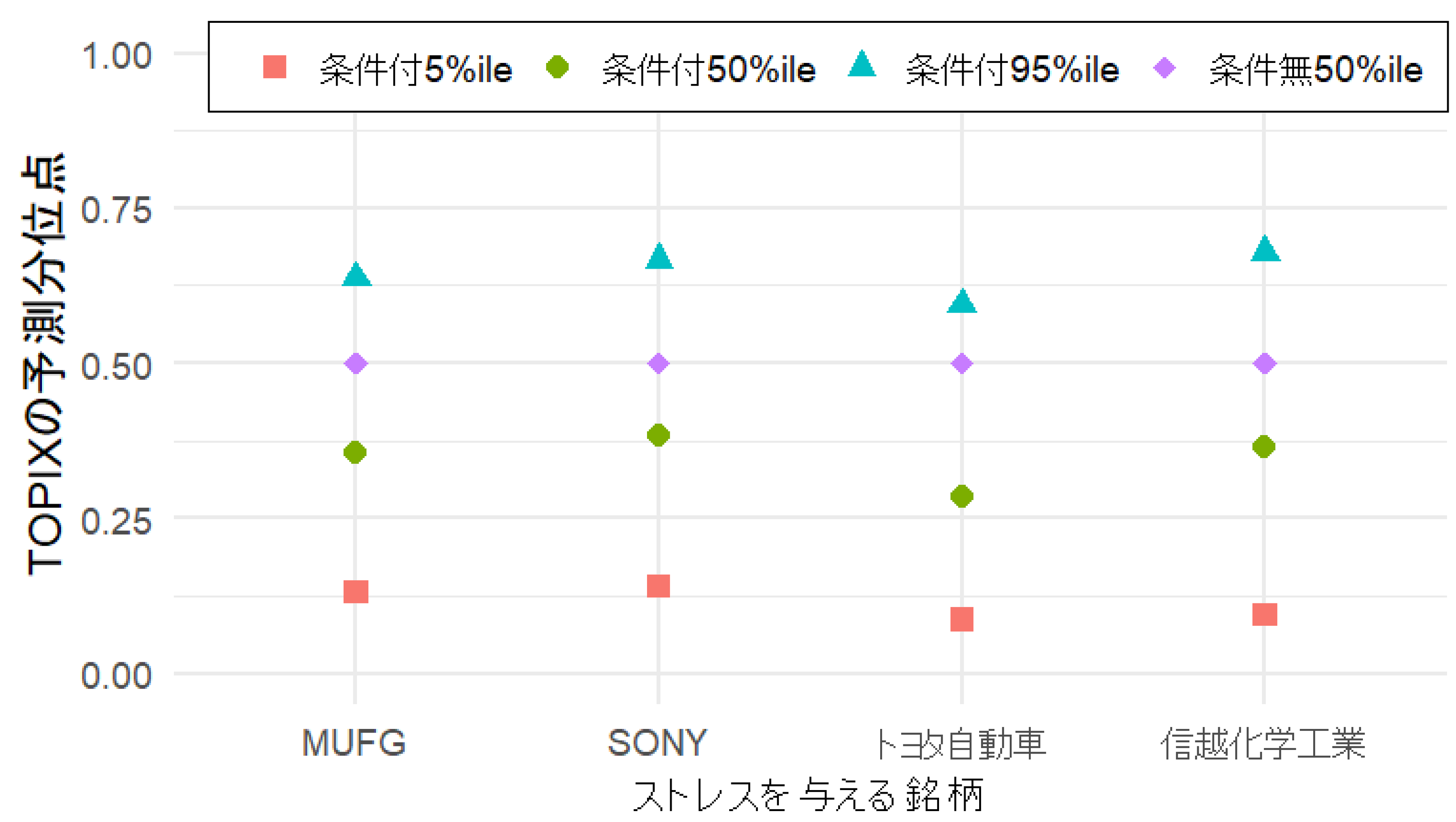

図 2: 各銘柄に5%水準までストレスを与え，他の銘柄は50%水準である場合のTOPIXの予測分位点．

参考文献

[1] Joe, H., 1997. Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts. CRC Press.

[2] Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., Bakken, H., 2009. Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence. Insurance, Mathematics & Economics 44 (2): 182–98.

[3] Kraus, D., Czado, C., 2017. D-Vine Copula Based Quantile Regression. Computational Statistics & Data Analysis 110 (June): 1–18.