差分の差分法におけるモデル選択基準

馬場 崇充　総合研究大学院大学 統計科学専攻 博士課程 (3年次編入) 4年

1　はじめに

差分の差分法（Difference in difference estimation: DID）はとある介入前後のアウトカム情報を収集することで，強く無視できる割り当て条件がなくても Treatment effect on treated (TET) が推定できる方法であり，様々な領域で活用されている．データ解析の一連のステップの中でモデル選択が重要であるが，モデル選択基準は開発されていない．DID 推定を用いた時におけるリスク関数の誤差の漸近不偏推定量としてモデル選択基準を導出し，AIC でよく知られている自由パラメータ× 2 とは異なるペナルティが導出されることを示す．

2　モデルと仮定

$$y(t) = D_1 y_1(t) + D_0 y_0(t), \quad \Delta = D_1\Delta_1 + D_0\Delta_0$$

- 割り当て変数 D_0, D_1 $(\in \{0,1\}$ かつ $D_0 + D_1 = 1)$
- $y_d(t)$: 割付 d における時刻 t の応答 $(d, t \in \{0,1\})$
- $\Delta_d = y_d(1) - y_d(0)$ $(d \in \{0,1\})$

推定およびモデル選択の対象: TET に $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\theta}$ のような線形モデルを仮定したときの $\boldsymbol{x}$ $(\in \mathbb{R}^p)$ の選択問題．

$$g(\boldsymbol{x}) \equiv (\text{TET conditional on } \boldsymbol{x}) = \mathrm{E}[y_1(1) - y_0(1) \mid \boldsymbol{x}, D_1 = 1]$$

線形モデルにおける $\boldsymbol{\theta}$ の最適値の定義．

$$\boldsymbol{\theta}^* \equiv \underset{\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{argmin}}\, \mathrm{E}[\{\mathrm{E}[y_1(1) - y_0(1) \mid \boldsymbol{x}, D_1 = 1] - \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\theta}\}^2 \mid D_1 = 1]$$

いくつかの仮定の下，傾向スコアを用いたセミパラメトリックな DID (SDID) は $\boldsymbol{\theta}^*$ に収束する (Abadie 2005)．

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left\{\sum_{i=1}^n e_1(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right\}^{-1} \sum_{i=1}^n e_1(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i\rho_i\Delta_i$$

このとき，$e_1(\boldsymbol{x}_i) = \mathrm{P}(D_1 = 1 \mid \boldsymbol{x}_i)$，$\rho_i \equiv D_{1i}/e_1(\boldsymbol{x}_i) - D_{0i}/e_0(\boldsymbol{x}_i)$．

仮定 1 (Conditional parallel trend).

$$\mathrm{E}[y_0(1) - y_0(0) \mid \boldsymbol{x}, D_1 = 1] = \mathrm{E}[y_0(1) - y_0(0) \mid \boldsymbol{x}, D_0 = 1]$$

仮定 2 (Common shocks). 介入の応答測定と，介入後の応答測定との間に，応答に影響を与えるような「別のイベント」が起きていない，もしくは起きているとしても二群に対して同じように作用している．

仮定 3 (Positivity).　$0 < P(D_1 = 1) < 1$ かつ $0 < \mathrm{P}(D_1 = 1 \mid \boldsymbol{x}) < 1$

3　モデル選択基準導出の準備

SDID 推定におけるリスク関数の漸近不偏推定量として，モデル選択基準を導出する．基とするリスク関数;

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \mathrm{E}[\{\mathrm{E}[y_{1i}(1) - y_{0i}(1) \mid \boldsymbol{x}_i, D_{1i} = 1] - \boldsymbol{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}}\}^2] \\
&= \sum_{i=1}^n [\mathrm{E}[(\rho_i\Delta_i - \boldsymbol{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}})^2] - \mathrm{E}[\{\rho_i\Delta_i - \mathrm{E}[y_{1i}(1) - y_{0i}(1) \mid \boldsymbol{x}_i, D_{1i} = 1]\}^2] \\
&+ 2\sum_{i=1}^n \mathrm{E}[\{\rho_i\Delta_i - \mathrm{E}[y_{1i}(1) - y_{0i}(1) \mid \boldsymbol{x}_i, D_{1i} = 1]\} \\
&\times \{\boldsymbol{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathrm{E}[y_{1i}(1) - y_{0i}(1) \mid \boldsymbol{x}_i, D_{1i} = 1]\}]]
\end{aligned} \tag{1}$$

右辺の第一項は期待値を外し，第二項はモデル非依存のため無視し，第三項は $\mathrm{E}[y_{1i}(1) - y_{0i}(1) \mid \boldsymbol{x}_i, D_{1i} = 1]$ に $g(\boldsymbol{x}_i)$ を代入して評価する．

4　差分の差分法におけるモデル選択基準

定理. 式(1)を漸近評価することで以下のモデル選択基準を得る．

傾向スコアが既知の場合

$$\sum_{i=1}^n (\rho_i\Delta_i - \boldsymbol{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}})^2 + 2\mathrm{tr}\{\mathrm{E}[e_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}']^{-1}\mathrm{E}[\sigma^2(\boldsymbol{x})e_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}']\}$$

傾向スコアが未知の場合

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n (\rho_i\Delta_i - \boldsymbol{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}))^2 \\
&+ 2\mathrm{tr}\{\mathrm{E}[e_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}']^{-1}(\mathrm{E}[\sigma^2(\boldsymbol{x})e_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'] - \Lambda_1(\boldsymbol{\alpha})'I(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\Lambda_2(\boldsymbol{\alpha}))\}
\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は傾向スコア推定に関するパラメータであり，罰則項は観測データに基づいて経験的に推定される．導出において Conditional parallel trend のみを用いているが，一部便宜的な近似を行う必要がある．

5　数値実験

Kang and Schafer (2007) *Statistical scinence* の簡易版．

- $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)' \sim N(\mathbf{1}_3, I_3)$
- $e(\boldsymbol{x}) = \exp(f_{ps}(\boldsymbol{x}))/(1 + f_{ps}(\boldsymbol{x}))$　$(f_{ps}(\boldsymbol{x}) = -1 + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\alpha}_0)$
- $y_0(0),\ y_1(0) \sim N(0,1)$
- $y_0(1) = y_0(0) + \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\beta}_0 + \epsilon_0$　$(\epsilon_0 \sim N(0,1))$
- $y_1(1) = y_1(0) + 1 + \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\beta}_1 + \epsilon_1$　$(\epsilon_1 \sim N(0,1))$
- $\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{1}_3, \boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{1}_3 \times 1/3$
- ATT$= 1 + \mathrm{E}[x_1 + x_2 + x_3 | t = 1]$
- シミュレーション回数: 5000回

比較対象は Platt et al. (2013) で提案されている QIC$_w$ の SDID 版．

表 1: MCE はモンテカルロ法により評価した真のバイアス値，SDIC と QICw はそれぞれの罰則項である．

		傾向スコア既知		傾向スコア未知		
		MCE	SDIC	MCE	SDIC	QICw
β=0.1	N=100	809	755	256	264	64
	N=300	808	804	251	256	65
β=1.0	N=100	1266	1184	353	355	125
	N=300	1262	1259	345	354	127
β=3.0	N=100	2693	2523	651	661	386
	N=300	2680	2677	636	665	393

6　結論

SDID を用いた時のモデル選択基準を提案し，既存手法よりもバイアスの漸近近似が良いことを示した．

参考文献

Abadie, A. (2005). Semiparametric difference-in-differences estimators, *The Review of Economic Studies*, **72**, 1–19.

Platt, R. W., Brookhart, M. A., Cole, S. R., Westreich, D., and Schisterman, E. F. (2013). An information criterion for marginal structural models, *Statistics in Medicine*, **32**, 1383–1393.