確率場に対する極値理論

中島　和基　　総合研究大学院大学　統計科学専攻　博士課程（5年一貫制）　3年

【目的】

確率場に対する極値理論が盛んになりつつあり確率過程に対する極値理論で知られている結果に相当するものが確率場についても得られている。今回はStehrとRønn-Nielsenの結果の一部とその拡張を紹介する。

【極値理論とは】

極値理論では極端な値をとるデータの出現の仕方、その確率分布を関心の対象としてきた。現実の現象では、起こるのは稀であるがもし起こると甚大な影響がでるような自然現象、豪雨や大地震などが対象となる。

【$\mathbb{Z}^d$上の確率場】

ここでは$\mathbb{Z}^d$上の確率場$\{\xi_v\}_{v\in\mathbb{Z}^d}$と、$\mathbb{Z}^d$の有限部分集合の列$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$に対しその最大値 $M(D_n)=\max_{v\in D_n}\xi_v$の従う分布を考える。次のような結果が得られている。

定理　$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$は仮定1を満たし、確率場$\{\xi_v\}_{v\in\mathbb{Z}^d}$は定常であるとする。また定数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}>0$、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が存在して、全ての$x\in\mathbb{R}$に対し条件$\mathcal{D}(a_nx+b_n;K_n)$が成り立つとする。さらに定数$a>0$が存在して、$|D_n|\sim a\cdot n$となるとする。このとき、非退化な分布関数$G(x)$が存在して、任意の$x\in\mathbb{R}$に対し、

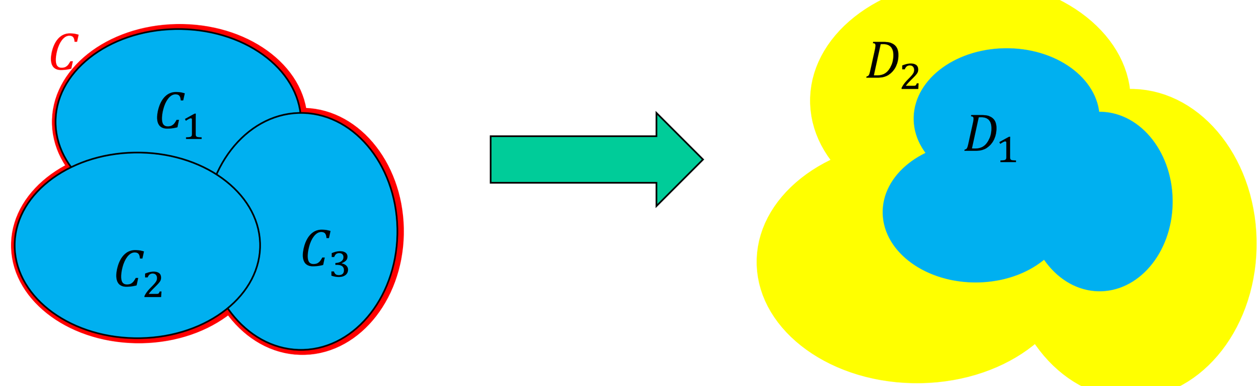
$$P(M(D_n)\le a_nx+b_n)\to G(x)$$

となるならば、$G(x)$は極値分布の分布関数。

（仮定1、条件$\mathcal{D}(a_nx+b_n;K_n)$についての詳細は省略する）

注　ここで仮定1を満たす$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$としては次のようなものが挙げられる。$C\subseteq\mathbb{R}^d$をp-convexである、すなわち連結で p個の凸体$C_1,\cdots,C_p$が存在して$C=\cup_{i=1}^{p}C_i$と表されるとする。さらに定数列$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}>0$をとり、$D_n=r_nC\cap\mathbb{Z}^d$とする。$r_n\to\infty$のとき、これは仮定1を満たす。例えば$D_n=\{1,\ldots,n\}^d$などが仮定1を満たす。さらに定理中の条件$|D_n|\sim a\cdot n$を満たすには、$\mathrm{r_n}\sim(a\cdot n)^{1/d}$となるよう$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$をとればよい。

一方、$0<d'<d$、$D\in\mathbb{Z}^{d-d'}$として、$D_n=D\times\{1,\ldots,n\}^{d'}$のようなものは仮定1を満たさない。



【条件の緩和】

私たちは定理中の条件$|D_n|\sim a\cdot n$を緩和することを考えた。まずはじめに、$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$からいくつか取り除いたり、有限個ずつ複製する操作ではその他の条件が保存されるので、これらの操作で上の条件を満たす新たな添字集合列を構成できる範囲を考えた。

命題　$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$は仮定1を満たし、確率場$\{\xi_v\}_{v\in\mathbb{Z}^d}$は定常であるとする。また定数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}>0$、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が存在して、全ての$x\in\mathbb{R}$に対し条件$\mathcal{D}(a_nx+b_n;K_n)$が成り立つとする。さらに$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が$|D_{n_k}|$が狭義単調増加し、$|D_{n_{k+1}}|/|D_{n_k}|\to1$となるような部分列$\{D_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$を持つとする。このとき、非退化な分布関数$G(x)$が存在して、任意の$x\in\mathbb{R}$に対し、

$$P(M(D_n)\le a_nx+b_n)\to G(x)$$

となるならば、$G(x)$は極値分布の分布関数。

$|D_n|$の増加が速すぎると極値分布以外にも収束する。特に$|D_{n+1}|/|D_n|\to\infty$のときはGreen (1976)の証明の構成法と同様にして、如何なる分布$G(x)$に対しても、それに収束する$\{\xi_v\}_{v\in\mathbb{Z}^d}$、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}>0$、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を構成できる。$|D_{n+1}|/|D_n|\to a>1$の場合も同様の構成のし方をすると$G(x)$そのものではないが、極値分布以外も取り得る分布に収束することが示せた。

【$\mathbb{R}^d$上の確率場】

ここでは次のような確率場を考える。

$$X_v=\int_{\mathbb{R}^d}f(v-u)\Lambda(du)\quad v\in\mathbb{R}^d$$

ここでfはintegration kernelで、ΛはLévy basisと呼ばれる$\mathbb{R}^d$上のrandom measureとする。このように表される確率場をLévy-driven random fieldと呼ぶ。

Λに適当な仮定を置くと、任意のBorel集合$A\subseteq\mathbb{R}^d$に対して、確率変数$\Lambda(A)$は以下のようなLévy-Khintchine表現と呼ばれるものを持つ。

$$C(\lambda\dagger\Lambda(A))$$
$$=i\lambda a|A|-\frac{1}{2}\lambda^2\theta|A|+\int_{A\times\mathbb{R}}\left(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right)F(du,dx)$$

ここで、$C(\lambda\dagger Y)$は確率変数Yのcumulant functionを表し、$a\in\mathbb{R},\theta\ge0,F$はLebesgue測度$m$とLévy測度$\rho$を用いて$F=m\otimes\rho$と表されるとする。

それぞれの論文では次のケースを考えている。

① ρの右側の裾が正則変動する、すなわちある$\alpha>0$が存在して、任意の$t>0$に対して、

$$\frac{\rho((tx,\infty))}{\rho((x,\infty))}\to t^{-\alpha}\quad\text{as }x\to\infty$$

を満たす場合。[4]

② $\rho\in\mathcal{S}_\beta(\beta>0)$である、すなわち任意の$y\in\mathbb{R}$に対して、

$$\frac{\rho((x-y,\infty))}{\rho((x,\infty))}\to e^{\beta y}\quad\text{as }x\to\infty$$

を満たす場合。[5]

③ ρの右側の裾がGumbel分布の吸引領域に属し、$\rho\in\mathcal{S}_0$である場合。[6]

それぞれ次のような結果が得られている。

1. 適当な条件下で、任意のfull-dimensionalで有界な$B\subseteq\mathbb{R}^d$に対して、
$$\mathbb{P}\left(\sup_{v\in B}X_v>x\right)\sim\rho(x,\infty)\cdot(f,\rho\text{による定数})\text{ as }x\to\infty.$$
2. 適当な仮定を満たす添字集合列$\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^d$,定数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}>0$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,任意の実数xに対して、
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{v\in C_n}X_v>a_nx+b_n\right)=$$
$$\begin{cases}\exp(-x^{-\alpha}\cdot(f,\rho\text{による定数}))&(①)\\\exp(-e^{-x}\cdot(f,\rho\text{による定数}))&(②、③)\end{cases}.$$

つまりこれらの論文の設定では$\sup X_v$の分布はρ（の右側の裾を正規化した分布）がどの極値分布の吸引領域に属するかに対応している。今後はより広い設定で同様のことが言えるか議論していきたい。

【参考文献】

[1] Leadbetter, M.R., Lindgren, G., Rootzén, H. (1983), *Extremes and Related Properties of Random Sequence and Processes*, Springer Series in Statistics, Springer, New York.

[2] Green, R.F. (1976). Partial attraction of maxima, *J. of Appl. Probab.*, **13**, 159-163.

[3] Green, R.F. (1977). Correction: Partial attraction of maxima, *J. of Appl. Probab.*, **14**, 897.

[4] Rønn-Nielsen, A., Stehr, M. (2022). Extremes of Lévy-driven random fields with regularly varying Lévy measure, *Stoch. Process. Their Appl.*, **150**, 19-49

[5] Stehr, M., Rønn-Nielsen, A. (2021). Extreme value theory for spatial random fields – with application to a Lévy-driven field, *Extremes*, **24**, 753-795.

[6] Stehr, M., Rønn-Nielsen, A. (2022). Extremes of subexponential Lévy-driven random fields in the Gumbel domain of attraction, *Extremes*, **25**, 79-105.