離散凸集合の多面体表現

室田 一雄 大学統計教員育成センター 特任教授

1 概観

離散凸解析では，種々の離散凸性が定義されるが，それぞれの離散凸集合に対して多面体表現が知られている．ここで，「離散凸集合の多面体表現」とは，離散凸集合の凸包の不等式系による表現のことである．このような表現は，多面体的組合せ論と呼ばれる組合せ最適化の標準的なアプローチの基礎となる．

離散凸解析で扱われる（ほとんど）すべての種類の離散凸集合 $S\ (\subseteq \mathbb{Z}^n)$ について，次のことが成り立つ．

- 凸包 $\overline{S}$ は多面体で，不等式による表現 $\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ をもつ．
- S は穴をもたない．すなわち，$S = \overline{S} \cap \mathbb{Z}^n$ である．
- $\overline{S}$ の表現から S 自身の表現 $S = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ が導かれる．

M凸集合, L凸集合などについて, その凸包を表現する不等式 $\langle a, x\rangle \leq b$ の係数ベクトル a（行列 A の行ベクトル）の特徴が知られている．以下のすべての場合に $a \in \{-1, 0, +1\}^n$ である．

集合 S	不等式 $\langle a, x\rangle \leq b$ の係数ベクトル a
整数区間	$\pm \mathbf{1}^i$
M 凸集合	$\mathbf{1}^I, \quad -\mathbf{1}^N\ (= -\mathbf{1})$
M$^\natural$凸集合	$\pm \mathbf{1}^I$
M$_2$凸集合	$\mathbf{1}^I, \quad -\mathbf{1}^N\ (= -\mathbf{1})$
M$_2^\natural$凸集合	$\pm \mathbf{1}^I$
L 凸集合	$\mathbf{1}^j - \mathbf{1}^i$
L$^\natural$凸集合	$\mathbf{1}^j - \mathbf{1}^i, \quad \pm \mathbf{1}^i$
L$_2$凸集合	$\mathbf{1}^J - \mathbf{1}^I \quad (\|I\| = \|J\|)$
L$_2^\natural$凸集合	$\mathbf{1}^J - \mathbf{1}^I \quad (\|I\| - \|J\| \in \{-1, 0, 1\})$
マルチモジュラ集合	$\pm \mathbf{1}^I \quad (I = \{i \mid k \leq i \leq l\}$: 連続区間)

（注）$N = \{1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbf{1}^I$: 集合 I の特性ベクトル，$\mathbf{1}^i$: 第 i 単位ベクトル

なお，整凸集合や有向離散中点凸集合については，凸包が多面体を成すことは示されているものの，不等式の特徴づけは知られていない．

例 1.1 集合 $S\ (\subseteq \mathbb{Z}^4)$ の凸包が

$$\overline{S} = \{x \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

であるとする．等式を不等式に書き換えると，

$$a^{(1)} = (1, 1, -1, -1), \qquad a^{(2)} = (-1, -1, 1, 1)$$

に対する不等式 $\langle a, x\rangle \leq 0$ となる．上の表によると，M$^\natural$凸集合では $a = \pm \mathbf{1}^I$ で，a の成分に $+1$ と -1 の両方が現れることはないから，この S は M$^\natural$凸ではない．L$^\natural$凸集合の場合は $a = \mathbf{1}^j - \mathbf{1}^i$ または $a = \pm\mathbf{1}^i$ で，非零成分の個数は2以下であるから，この S は L$^\natural$凸ではない．次に，L$_2$凸集合の可能性を考える．この場合，上の表では $a = \mathbf{1}^J - \mathbf{1}^I\ (|I| = |J|)$ となっており，ベクトル $a^{(1)}, a^{(2)}$ はともにこの形である．実際，S は L 凸集合

$$S_1 = \{y \in \mathbb{Z}^4 \mid y_1 - y_3 = 0, y_2 - y_4 = 0\},$$
$$S_2 = \{z \in \mathbb{Z}^4 \mid z_1 - z_4 = 0, z_2 - z_3 = 0\}$$

のミンコフスキー和 $S = \{y + z \mid y \in S_1, z \in S_2\}$ である． ■

例 1.2 集合

$$S = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

は（単位立方体に含まれるから）整凸集合である．S の凸包は四面体であり，４本の不等式

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 0,\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0,\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0$$

で記述される．第２の不等式の係数ベクトルが $a = (1, -1, -1)$ であることから，表より，S は M$_2^\natural$凸集合ではない．第１の不等式では $a = (1, 1, 1)$ であるが，表によると，L$_2^\natural$凸集合では $a = \mathbf{1}^J - \mathbf{1}^I\ (|I| - |J| \in \{-1, 0, 1\})$ の形でなければならないから，S は L$_2^\natural$凸集合でもない．さらに，S はマルチモジュラでないことも第２の不等式から分かる． ■

2 L$_2$凸集合の多面体表現

非空集合 $S\ (\subseteq \mathbb{Z}^n)$ が次の二つの条件を満たすとき，L凸集合であるいう：

$$x, y \in S \implies x \vee y,\ x \wedge y \in S,$$
$$x \in S, \mu \in \mathbb{Z} \implies x + \mu\mathbf{1} \in S$$

（記号：$x \vee y,\ x \wedge y$ は，成分毎の最大値，最小値を成分とするベクトル）．２つのL凸集合のミンコフスキー和（ベクトル和）で表現できる集合 $S = \{y + z \mid y \in S_1, z \in S_2\}$ をL$_2$凸集合という．

定理 2.1 L$_2$凸集合 $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ は，(I, J) によって添字づけられた適当な $\gamma_{IJ} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ に対して

$$S = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid\ x(J) - x(I) \leq \gamma_{IJ}\ (\forall I, J : |I| = |J|, I \cap J = \emptyset)\} \qquad (1)$$

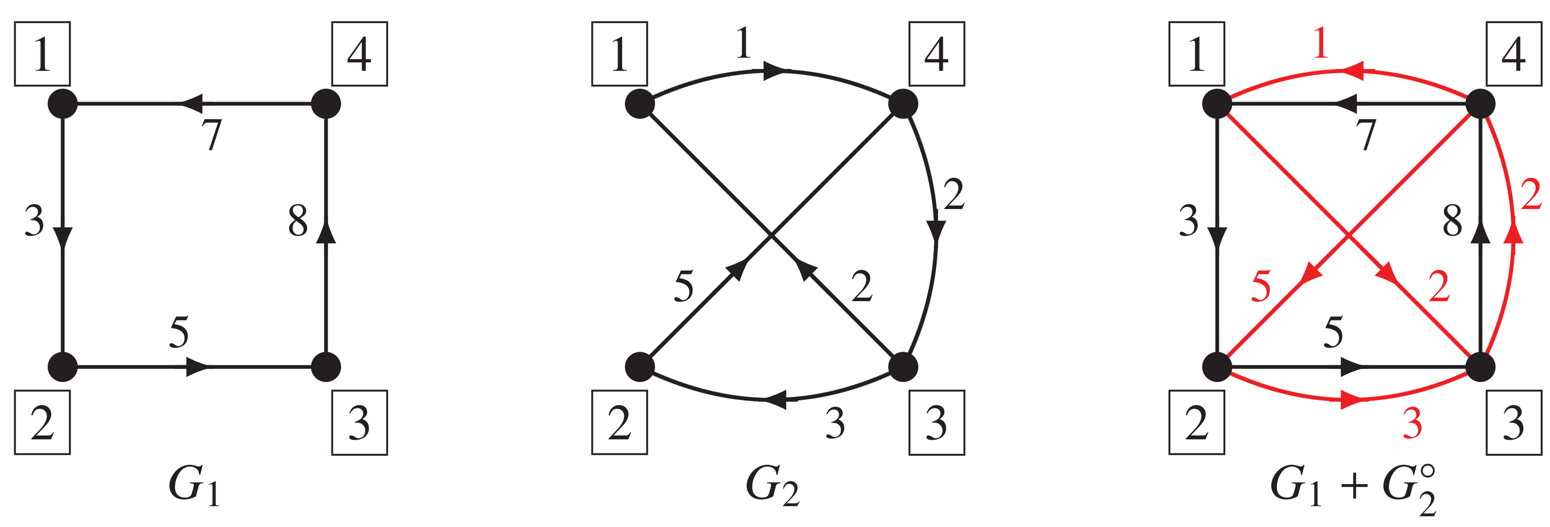
と表現できる（記号：$x(I) = \sum_{i \in I} x_i,\ x(J) = \sum_{j \in J} x_j$）．

この定理には２つの異なる証明がある．一つは共役性定理やM$_2$最適性規準といった離散凸解析の構造的結果を用いた証明である．もう一つは代数的な直接証明であり，構成するL凸集合の多面体表現の不等式系にフーリエ・モツキンの消去法を適用する．なお，L$_2$凸集合を表現する不等式の個数は指数個になりうる．

式 (1) の (I, J) は，グラフ上の有向閉路に対応する．例えば，

$$S_1 = \{y \in \mathbb{Z}^4 \mid y_2 - y_1 \leq 3,\ y_3 - y_2 \leq 5,\ y_4 - y_3 \leq 8,$$
$$y_1 - y_4 \leq 7\},$$
$$S_2 = \{z \in \mathbb{Z}^4 \mid z_1 - z_3 \leq 2,\ z_4 - z_1 \leq 1,\ z_2 - z_3 \leq 3,$$
$$z_4 - z_2 \leq 5,\ z_3 - z_4 \leq 2\}$$

で定義されるL$_2$凸集合 $S = S_1 + S_2$ に対して，S_1, S_2, S に対応するグラフ $G_1, G_2, G_1 + G_2^\circ$（$G_2^\circ$ は G_2 の辺の向きを反転したグラフ）は



となる．S の不等式表現は

$$x_1 - x_3 \leq 17, \quad x_1 - x_4 \leq 11,$$
$$x_2 - x_1 \leq 9, \quad x_2 - x_3 \leq 21, \quad x_2 - x_4 \leq 15,$$
$$x_3 - x_1 \leq 11,\ x_3 - x_2 \leq 12,\ x_3 - x_4 \leq 17,$$
$$x_4 - x_1 \leq 17, \quad x_4 - x_2 \leq 18, \quad x_4 - x_3 \leq 11,$$
$$x_2 + x_4 - x_1 - x_3 \leq 15$$

であり，４つの変数を含む不等式 $x_2 + x_4 - x_1 - x_3 \leq 15$ は混合閉路 $C = (1, 2)_1(2, 3)_2(3, 4)_1(4, 1)_2$ に対応する．

参考文献

・Moriguchi, S., Murota, K.: Note on the polyhedral description of the Minkowski sum of two L-convex sets. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics **40**, 223–263 (2023)
・室田一雄: 離散凸解析, 共立出版 (2001)
・室田一雄: 離散凸解析の考えかた, 共立出版 (2007)