2023 年 5 月 26 日 統計数理研究所 オープンハウス

Lévy過程に対するPoisson的観察下での確率制御問題

野場 啓　**統計思考院 助教**

1　序

ある企業の製品の制御前の在庫量は，一次元Lévy過程(図1のグレーの線)の挙動をするとする(Lévy過程が負の値を取る時は，製品が取り寄せ待ちの状態にあるとする)．この時，多くの在庫を持つ状態には，その保持コストがかかる．一方，多くの取り寄せ待ちがある状態でも多くのコストがかかるとみなすことにする(これらのコストを在庫保持コストと呼ぶことにする.)．この時，適宜在庫を補充することで，在庫保持コストを下げたい(図1の濃い赤線は，補充した在庫の総量の変化を表し，黒線は濃い赤線の量だけ在庫を補充した場合の在庫量の変化を表す)．しかしこの場合，在庫の補充にもコストがかかる(このコストを制御コストと呼ぶことにする.)．企業にとっては，在庫保持コストと制御コストの和をより少なくする在庫補充戦略を用いることが望ましい．ただし，在庫の補充は，ある独立に動くPoisson過程がジャンプをする時間にしか行えないものとする(図1の薄い赤線は，Poisson過程のジャンプ時刻を表す．この線があるところでしか在庫を補充できない.)．このポスターでは，山崎和俊氏(クイーンズランド大学)との共同研究である，arXiv:2210.00501の論文を参考に，在庫保持コストと制御コストの期待賞味現在価値を最小化する戦略を求める確率制御の問題について解説する．

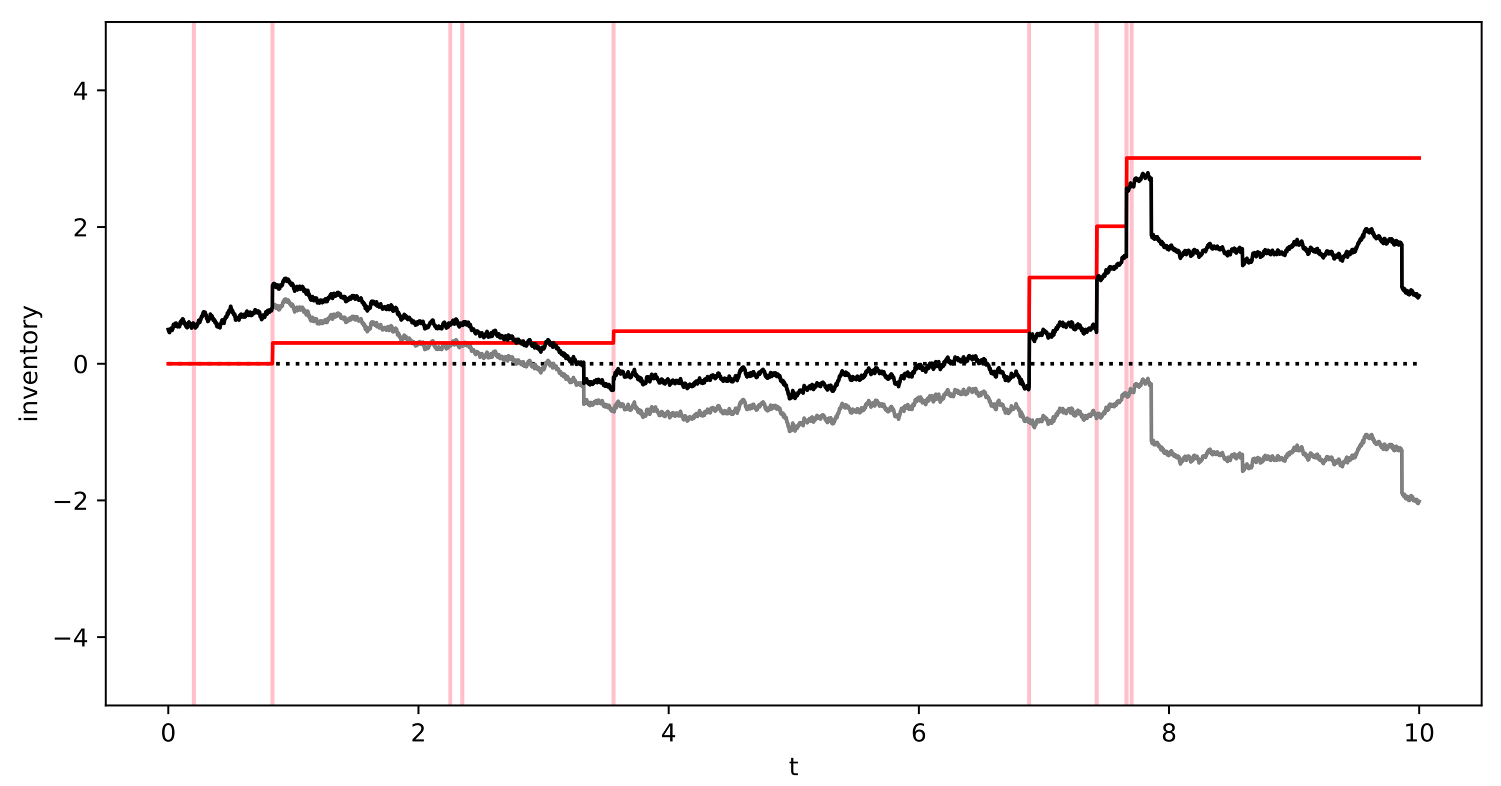

図 1: 在庫補充の例

2　数学的な設定

本ポスターで扱う問題の数学的な設定を述べる．

いくつかの条件を満たすLévy過程$X = \{X_t : t \geq 0\}$は，ある企業の製品の制御前の在庫量を表すとする．これとは独立なPoisson過程$N = \{N_t : t \geq 0\}$を固定する．在庫の補充は，Nがジャンプを持つ時にしか行えないものとする．

在庫の補充の戦略は，図1の濃い赤線のような，単調増加な確率過程で表すことができる．正確には戦略とは，以下の条件を満たす(他の細かい条件は省略する)確率過程$\pi = R^\pi = \{R^\pi_t : t \geq 0\}$で表せる．

- XとNによって生成されるfiltrationに適合なcàglàdな非負値確率過程$\nu^\pi = \{\nu^\pi_t : t \geq 0\}$ が存在して，
$$R^\pi_t = \int_{[0,t]} \nu^\pi_s dN_s, \qquad t \geq 0,$$
と表せる．(この形からR^πは，Nがジャンプする時にしか増加しないことがわかる.)

このような条件を満たす戦略全てからなる集合を，$\mathcal{A}$で表す．戦略$\pi \in \mathcal{A}$をとった時の在庫量の変化は，
$$U^\pi_t = X_t + R^\pi_t, \qquad t \geq 0,$$
で表される．

割引率を$q > 0$とする．つまり，時間$t \geq 0$での金の価値は，e^{-qt}倍されるものとする．

凸関数fで在庫保持コストを表すとする．つまり，在庫量が$x \in \mathbb{R}$の時，在庫保持には$f(x)$のコストがかかると見做せる．この時，戦略$\pi \in \mathcal{A}$を用いた時の在庫保持にかかる総コストは，$\int_0^\infty e^{-qt} f(U^\pi_t)dt$で表される．

在庫補充1単位にかかるコスト/リワードを$C \in \mathbb{R}$で表すとする．この時，戦略$\pi \in \mathcal{A}$を用いた時の在庫補充にかかる総コストは，$C\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR^\pi_t$で表される．

以上から，在庫保持コストと制御コストの和の期待賞味現在価値は，
$$v_\pi(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} f(U^\pi_t)dt + C\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR^\pi_t\right], \quad x \in \mathbb{R},$$
で表される．ここで，xはLévy過程Xの出発点を表す．この関数v_πを小さくする戦略$\pi \in \mathcal{A}$が，企業にとって望ましい戦略と言える．つまり，
$$v_{\pi^*}(x) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$
を満たす戦略$\pi^* \in \mathcal{A}$が最適戦略である．

q，f，Cにはいくつかの条件を持たす必要があるが，本ポスターでは省略する．

3　Poisson的反射戦略と主結果

値$b \in \mathbb{R}$でのPoisson的反射戦略π^bとは，Nがジャンプした時間tに，直前の在庫量$U^{\pi^b}_{t-}$が値bを超えてたら在庫を補充せず，値bを超えていなかったらその差だけ在庫を補充し，在庫量がbになるようにする在庫補充戦略を指す．

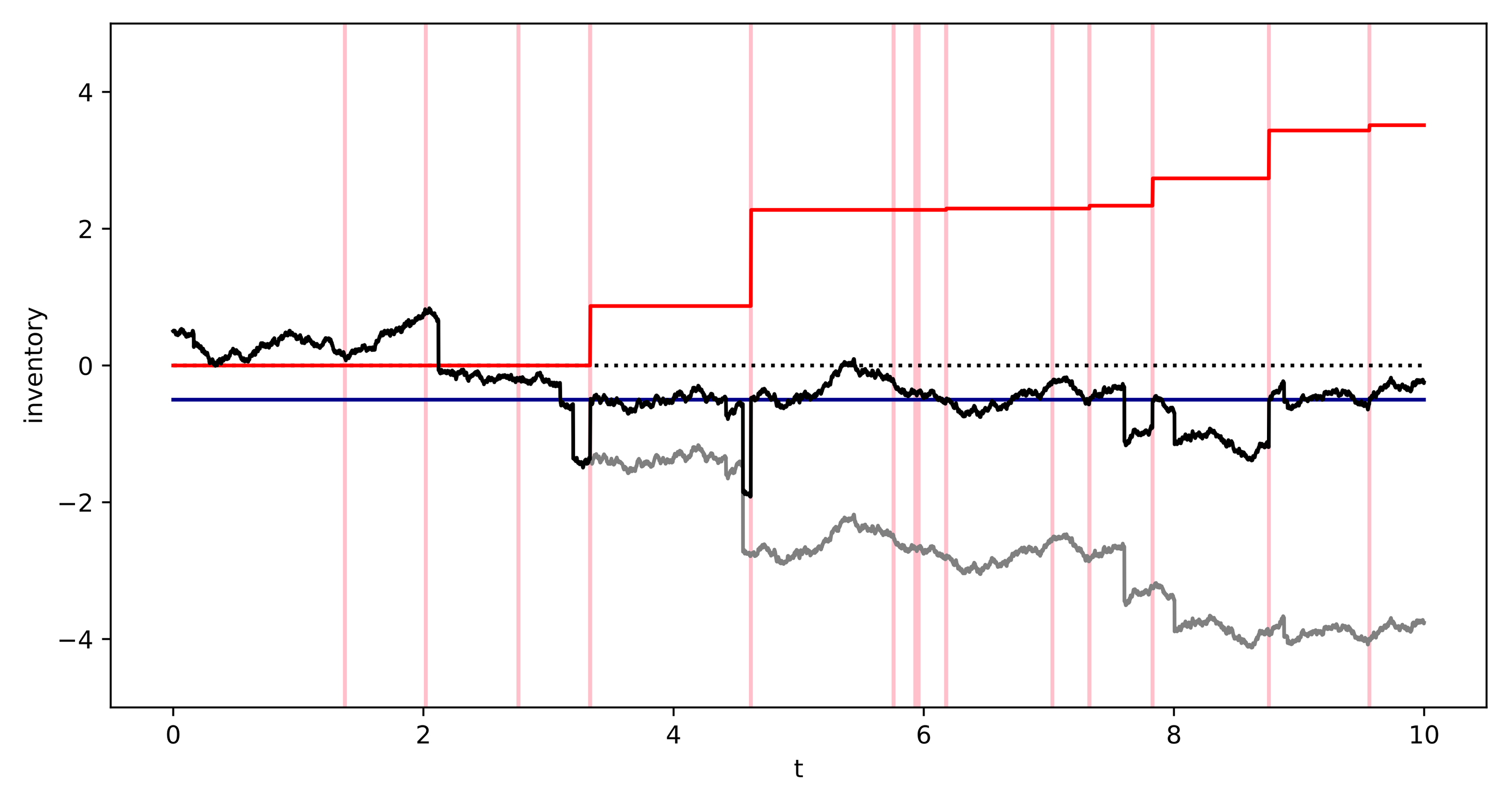

図 2: 値-0.5でのPoisson的配当戦略

ある値$b^* \in \mathbb{R}$を定義し(b^*の定義の詳細はarXiv:2210.00501の論文を参照)，以下の主結果を得ることができる．

定理 1. 値b^*での*Poisson*的反射戦略π^{b^*}は最適戦略である．

4　この研究の面白さ

戦略の集合$\mathcal{A}$は，数学的に表す際非常に複雑になってしまう戦略も含んでおり，一般的な大学の学部までに習う数学のみで戦略の最適性を証明するのは困難だと思われる．しかし，今日まで発達してきた確率解析の技術を用いることにより，抽象的な定義の戦略も扱うことができ，上記のような定理を証明することができる．本研究の価値の一つは，その証明において，どのように確率解析の技術を用いているかにある．