# あるガンマ行列の分解定理

**中島 秀斗**　**統計的機械学習研究センター 特任助教**

## 1　概要

リーマンゼータ関数$\zeta(s)$は次の関数等式を満たす．

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)\quad(s\in\mathbb{C}).$$

この等式は，リーマンのクシー関数$\xi(s)$を用いて記述すれば

$$\xi(1-s)=\xi(s),\qquad \xi(s):=\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)$$

のように，より対称性が高い形に書き換えることが可能である．概均質ベクトル空間の理論は，関数等式を満たす（多変数）ゼータ関数を系統的に構成する手法を与える．そのような多変数のゼータ関数に対しても上記のような現象が見られるのかどうか，あるいはどのような条件が必要か，といった問いが自然に提起される．

## 2　記号およびガンマ行列の分解例

$\Gamma(s)$は通常のガンマ関数とし，$\mathsf{c}(z)$, $\mathsf{s}(z)$および$\mathsf{e}[z]$は次で定義する．

$$\mathsf{c}(z):=\cos\frac{\pi z}{2},\quad \mathsf{s}(z):=\sin\frac{\pi z}{2},\quad \mathsf{e}[z]:=\exp\Big(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}z\Big).$$

**例1．**

Shintani (Chapter 1; 1975), F. Sato (§§7.2 Example (B); 1982) では，

$$\boldsymbol{\xi}\Big(s_1,\frac{3}{2}-s_1-s_2\Big)=M(s_1,s_2)\boldsymbol{\xi}^*(s_1,s_2)$$

という関数等式が与えられている．ただし$M(s_1,s_2)$は

$$M(s_1,s_2):=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{s_1+2s_2}\Gamma(s_2)\Gamma\Big(s_1+s_2-\frac{1}{2}\Big)\begin{pmatrix}\mathsf{s}(s_1+2s_2) & \mathsf{s}(s_1)\\ \mathsf{c}(s_1) & \mathsf{c}(s_1+2s_2)\end{pmatrix}$$

で定義される正方行列である．このとき$M(s_1,s_2)$は，直交行列$\tau:=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&-1\end{smallmatrix}\right)$による共役をとれば，次のように対角行列と直交行列の積に分解される．

$$\tau M(s_1,s_2)\tau^{-1}=D_-\Big(s_1+s_2-\frac{1}{2}\Big)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot D_+(s_2),\quad D_\pm(s):=\frac{2^s\Gamma(s)}{\pi^s}\begin{pmatrix}\mathsf{c}(s)&0\\0&\pm\mathsf{s}(s)\end{pmatrix}$$

## 3　等質錐に付随するゼータ関数のガンマ行列

階数$r$の等質錐が与えられたとき，それに付随して(局所)ゼータ関数$\boldsymbol{\Phi}(f;\,\boldsymbol{s})$が定義でき，それは，双対錐の(局所)ゼータ関数$\boldsymbol{\Phi}^*(f;\,\boldsymbol{s})$との関係式として，次の形の関数等式を満たす (cf. [2])．

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{f};\,s)=\frac{\Gamma\big(\boldsymbol{\alpha}(s)\big)}{(2\pi)^{|\boldsymbol{\alpha}(s)|}}A_r\big(\boldsymbol{\alpha}(s)\big)\boldsymbol{\Phi}^*\big(f;\,\boldsymbol{\tau}(s)\big)\quad(\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^r).$$

ただしベクトル$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^r$に対して$\Gamma(\boldsymbol{\alpha})=\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_r)$であり，$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{s})$はそれぞれ適切な$\mathbb{C}^r$上のアフィン変換である．また$\widehat{f}$は$f$のフーリエ変換を表しており，$A_r(\boldsymbol{\alpha})$は，$\mathcal{I}_r:=\{1,-1\}^r$を用いて

$$A_r(\boldsymbol{\alpha})=\left(\exp\Big\{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\Big(\sum_{j=1}^r\varepsilon_j\delta_j\alpha_j+\frac{1}{2}\sum_{1\le j<k\le r}\varepsilon_j\delta_k n_{kj}\Big)\Big\}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{I}_r}$$

により定義される正方行列である．$A_r(\boldsymbol{\alpha})$の定義に現れた$n_{kj}\in\mathbb{Z}_{\ge0}$は等質錐の構造情報である．さて，直交行列$J^{(j)}$を帰納的に

$$J^{(1)}:=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad J^{(j)}:=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}J^{(j-1)}&J^{(j-1)}\\J^{(j-1)}&-J^{(j-1)}\end{pmatrix}.$$

と定義し，さらに非可換元$a_i$に対して$\big(\prod^{\mathrm{rev}}\big)_{j=1}^r a_j:=a_r\cdots a_1$とおく．

**定理 ([1])**

関数等式のガンマ行列は，$J^{(r)}$に関して，次の行列と共役である．

$$2^r\begin{pmatrix}I_{2^{r-1}}&0\\0&\sqrt{-1}I_{2^{r-1}}\end{pmatrix}\prod_{j=1}^{r}{}^{\mathrm{rev}}\Big\{\prod_{k=j+1}^{r}\exp(n_{kj}X_{kj})\cdot\widetilde{D}_j^{(r)}(\alpha_j)\Big\}$$

すなわちガンマ行列は，等質錐の構造情報にのみ依存する直交行列$\exp(n_{kj}X_{kj})$と，1つの変数にのみ依存する対角行列$\widetilde{D}_j^{(r)}(\alpha_j)$たちの積に分解される．ただし$r\ge3$とし，$X_{kj}$および$\widetilde{D}_j^{(r)}(\alpha_j)$は，

$$X_{kj}=\frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\overbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}^{r-k}\otimes\overbrace{A_2\otimes\cdots\otimes A_2}^{k-j-1}\otimes R_2\otimes\overbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}^{j}}_{r},$$

$$\widetilde{D}_j^{(r)}(\alpha_j)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha_1)}{(2\pi)^{\alpha_1}}\begin{pmatrix}D_1^{(r)}(\alpha_1)&0\\0&D_1^{(r)}(\alpha_1-1)\end{pmatrix} & (j=1),\\[2ex] \dfrac{\Gamma(\alpha_j)}{(2\pi)^{\alpha_j}}\begin{pmatrix}D_j^{(r)}(\alpha_j)&0\\0&D_j^{(r)}(\alpha_j)\end{pmatrix} & (j=2,\dots,r),\end{cases}$$

ここで$D_j^{(k)}$は，次のように帰納的に定義される対角行列である．

$$D_1^{(2)}(\alpha):=\begin{pmatrix}\mathsf{c}(\alpha)&0\\0&\mathsf{s}(\alpha)\end{pmatrix},\qquad D_2^{(2)}(\alpha):=\begin{pmatrix}\mathsf{c}(\alpha)&0\\0&-\mathsf{s}(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$D_1^{(r)}(\alpha):=\begin{pmatrix}\mathsf{c}(\alpha)I_{2^{r-2}}&0\\0&\mathsf{s}(\alpha)I_{2^{r-2}}\end{pmatrix},\ D_2^{(r)}(\alpha):=\begin{pmatrix}D_1^{(r-1)}(\alpha)&0\\0&D_1^{(r-1)}(\alpha+1)\end{pmatrix},$$

$$D_k^{(r)}(\alpha):=D_{k-1}^{(r-1)}(\alpha)\otimes I_2=\begin{pmatrix}D_{k-1}^{(r-1)}(\alpha)&0\\0&D_{k-1}^{(r-1)}(\alpha)\end{pmatrix}\quad(k=3,\dots,r).$$

### 3.1　補足

- この定理は，局所ゼータ関数のなす空間において，基底をうまく選ぶと，ガンマ行列による変換は，底空間の構造情報から定まる直交行列と引数が1変数のみの対角行列たちの積という，非常にきれいな形に分解されることを示している．
- 今のところ本定理の応用は見つかっていないが，ガンマ行列の解析に有効に活用できるのであれば，他の概均質ゼータ関数のガンマ行列の解析にも応用が期待できる．
- 等質錐の構造情報$n_{kj}$がある条件を満たすときには，さらにリーマンのクシー関数のように，関数等式を完備化することもできる(cf. [1])．

**例2．**

$r=2$のとき，$\mathcal{I}_2$の順序を適当に定めると$A_2(\boldsymbol{\alpha})$は

$$A_2(s)=\begin{pmatrix}\mathsf{e}[+s_1+s_2+n_{21}]&\mathsf{e}[+s_1-s_2-n_{21}]&\mathsf{e}[-s_1-s_2-n_{21}]&\mathsf{e}[-s_1+s_2+n_{21}]\\ \mathsf{e}[+s_1-s_2+n_{21}]&\mathsf{e}[+s_1+s_2-n_{21}]&\mathsf{e}[-s_1+s_2-n_{21}]&\mathsf{e}[-s_1-s_2+n_{21}]\\ \mathsf{e}[-s_1-s_2-n_{21}]&\mathsf{e}[-s_1+s_2+n_{21}]&\mathsf{e}[+s_1+s_2+n_{21}]&\mathsf{e}[+s_1-s_2-n_{21}]\\ \mathsf{e}[-s_1+s_2-n_{21}]&\mathsf{e}[-s_1-s_2+n_{21}]&\mathsf{e}[+s_1-s_2+n_{21}]&\mathsf{e}[+s_1+s_2-n_{21}]\end{pmatrix}$$

となる．定理により，$A_2(\boldsymbol{s})$は次の行列と$J^{(2)}$に関して共役である．

$$2^2\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\sqrt{-1}&\\&&&\sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{c}(s_2)&&&\\&\mathsf{s}(s_2)&&\\&&\mathsf{c}(s_2)&\\&&&\mathsf{c}(s_2)\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\mathsf{c}(n_{21})&-\mathsf{s}(n_{21})&&\\ \mathsf{s}(n_{21})&\mathsf{c}(n_{21})&&\\&&\mathsf{c}(n_{21})&-\mathsf{s}(n_{21})\\&&\mathsf{s}(n_{21})&\mathsf{c}(n_{21})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{c}(s_1)&&&\\&\mathsf{s}(s_1)&&\\&&\mathsf{c}(s_1-1)&\\&&&\mathsf{c}(s_1-1)\end{pmatrix}.$$

## 参考文献

[1] H. Nakashima, Decomposition of gamma matrices of local zeta functions associated with homogeneous cones, to appear in Tohoku Math. J., 21 pages.

[2] H. Nakashima, Functional equations of zeta functions associated with homogeneous cones, Tohoku Math. J. **72** (2020), 349–378.