2023 年 5 月 26 日 統計数理研究所 オープンハウス

最適ポートフォリオ資産取引戦略

公文　雅之　リスク解析戦略研究センター 特任准教授

1　概要

複数銘柄の資産取引ゲームにおける逐次最適戦略 (SOS : sequential optimizing strategy) による所持資金系列は，資産価格系列に対する測度論的仮定なしに最適なポートフォリオ銘柄の選択を含めた漸近的最適性をもつことが示され，SOSの有効性は実際の株式市場データにより実証される．これらの結果を竹内　啓先生，竹村　彰通先生との共同研究による以下の論文から紹介する．

Masayuki Kumon, Akimichi Takemura and Kei Takeuchi
Sequential optimizing strategy in multi-dimensional bounded forecasting games. Stochastic Processes and their Applications, 121, 155-183, 2011

2　多次元資産取引ゲームにおける逐次最適戦略

$\boldsymbol{M}_n = [M_n^1, \dots, M_n^k]' \in \mathbb{R}^k$　$[\cdot]'$: 転置

～ 第 n ラウンドに Investor が k 種類の資産を取引する量

$x_n = [x_n^1, \dots, x_n^k]' \in D$ (有界領域) $\subset \mathbb{R}^k$

～ 第 n ラウンドで の k 種類の資産価格の変化額

$\mathcal{K}_n$: 第 n ラウンド終了時の Investor の所持資金額　$\mathcal{K}_0 = 1$

$\Rightarrow \mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} + \boldsymbol{M}_n \cdot x_n = \mathcal{K}_{n-1}(1 + \boldsymbol{\alpha}_n \cdot x_n)$　$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{M}_n / \mathcal{K}_{n-1} \in \mathbb{R}^k$

$\boldsymbol{M}_n \cdot x_n = M_n^1 x_n^1 + \cdots + M_n^k x_n^k$: 標準内積

$\Phi_N(\boldsymbol{\alpha}) = \log \mathcal{K}_N = \sum_{n=1}^{N} \log(1 + \boldsymbol{\alpha} \cdot x_n)$ ($\boldsymbol{\alpha}$ について concave) の最大化

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_N(\boldsymbol{\alpha}_N^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{1 + \boldsymbol{\alpha}_N^* \cdot x_n} = 0 \quad \boldsymbol{\alpha}_N^* = \boldsymbol{\alpha}_N^*(x_1, \dots, x_N) : \text{後知恵戦略}$$

$$\log \mathcal{K}_N^* = \sum_{n=1}^{N} \log(1 + \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^* \cdot x_n), \quad N = 1, 2, \dots$$

$\sim \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^*(x_1, \dots, x_{n-1})$ (逐次最適戦略 : SOS) による対数資金系列

3　SOS による対数資金系列の構造

$$g_N(x_n) = \frac{1}{N}, \quad n = 1, \dots, N : \{x_1, \dots, x_N\} \text{ の経験確率分布}$$

$$g_N^*(x_n) = \frac{1}{N(1 + \boldsymbol{\alpha}_N^* \cdot x_n)}, \quad n = 1, \dots, N : \{x_1, \dots, x_N\} \text{ のリスク中立分布}$$

即ち　$\sum_{n=1}^{N} g_N^*(x_n) = 1$　$\sum_{n=1}^{N} x_n g_N^*(x_n) = \boldsymbol{0}$

$$\Phi_N(\boldsymbol{\alpha}_N^*) = ND(g_N \| g_N^*) = N \sum_{n=1}^{N} g_N(x_n) \log \frac{g_N(x_N)}{g_N^*(x_N)}$$

$D(g_N \| g_N^*)$: $g_N(x)$ と $g_N^*(x)$ の間のカルバック情報量

$$\Phi_N(\boldsymbol{\alpha}_N^*) - \log \mathcal{K}_N^* = \sum_{n=1}^{N} \Delta\Phi_n \quad \Delta\Phi_n = \Phi_n(\boldsymbol{\alpha}_n^*) - \Phi_n(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}^*)$$

$$I_n(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{\partial^2 \Phi_n(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_i'}{(1 + \boldsymbol{\alpha} \cdot x_i)^2} : k \times k \text{ 正定値情報行列}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi_n \doteqdot \frac{1}{2} \log \frac{|I_n(\boldsymbol{\alpha}_n^*)|}{|I_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_n^*)|} \quad \sum_{n=1}^{N} \Delta\Phi_n \doteqdot \frac{1}{2} \log[I_N] \quad [I_N] = \prod_{n=1}^{N} \frac{|I_n(\boldsymbol{\alpha}_n^*)|}{|I_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_n^*)|}$$

$$\Rightarrow \log \mathcal{K}_N^* \doteqdot ND(g_N \| g_N^*) - \frac{1}{2} \log[I_N] : \text{最適対数資金系列の分解表現}$$

$$D(g_N \| g_N^*) \doteqdot \frac{1}{2} \bar{x}_N' \bar{V}_N^{-1} \bar{x}_N \quad \bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \quad \bar{V}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n x_n'}{1 + \boldsymbol{\alpha}_N^* \cdot x_n}$$

$$\Rightarrow \log \mathcal{K}_N^* \doteqdot \frac{N}{2A_N} \left[\|\bar{x}_N\|^2 - \frac{A_N \log[I_N]}{N} \right] \quad A_N = \frac{\|\bar{x}_N\|^2}{\bar{x}_N' \bar{V}_N^{-1} \bar{x}_N}$$

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\|\bar{x}_N\|}{\sqrt{A_N \log[I_N]/N}} > 1 \;\Rightarrow\; \limsup_{N \to \infty} \mathcal{K}_N^* = \infty : \text{ゲーム論的大数強法則}$$

4　最適ポートフォリオ戦略

Game (k) :「賭け口」が k 種類の資産取引ゲーム

Game $(1) \subset$ Game $(2) \subset \cdots \subset$ Game (K)

のように各ゲームが「入れ子」になっているとき $\log \mathcal{K}_N^*(k)$ の分解表現

$$\log \mathcal{K}_N^*(k) \doteqdot ND_k(g_N \| g_N^*) - \frac{1}{2} \log[I_N]_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

において $D_k(g_N \| g_N^*)$: k に関して単調増大

対数情報量損失項については

$$\frac{k}{2} \log \prod_{n=1}^{N} (1 + c_n) \le \frac{1}{2} \log[I_N]_k \le \frac{k}{2} \log \prod_{n=1}^{N} (1 + d_n) \quad 0 < \exists c_n < \exists d_n$$

$ND_k(g_N \| g_N^*)$ と $\frac{1}{2} \log[I_N]_k$ の k に関するトレードオフより

$\max_{1 \le k \le K} \log \mathcal{K}_N^*(k) \;\Rightarrow$ 最適なポートフォリオ数 k^*

$\log \mathcal{K}_N^*$: 多次元ポートフォリオゲーム選択の情報量規準

5　株式市場データによる実証

5次元ポートフォリオゲーム :

Game $(1) \subset$ Game $(2) \subset$ Game $(3) \subset$ Game $(4) \subset$ Game (5)

5銘柄 1.Takeda　2.Toyota　3.Kirin　4.Tepco　5.NNK の順に入れ子構造

各図の記号 : $LD_n^2 = \frac{1}{2} \log[I_n]$　$K_n^0 = \exp(nD(g_n \| g_n^*))$

$K_n^1 = \mathcal{K}_n^*$　$LK_n^0 = nD(g_n \| g_n^*)$　$LK_n^1 = \log \mathcal{K}_n^*$

$LK_n^0, LD_n^2 : G(1) < G(2) < G(3) < G(4) < G(5)$

$LK_n^1 : G(1) < G(5) < G(2) < G(4) < G(3) \sim LK_n^0$ と LD_n^2 のトレードオフ

$\Rightarrow$　1.Takeda　2.Toyota　3.Kirin : 最適なポートフォリオ銘柄

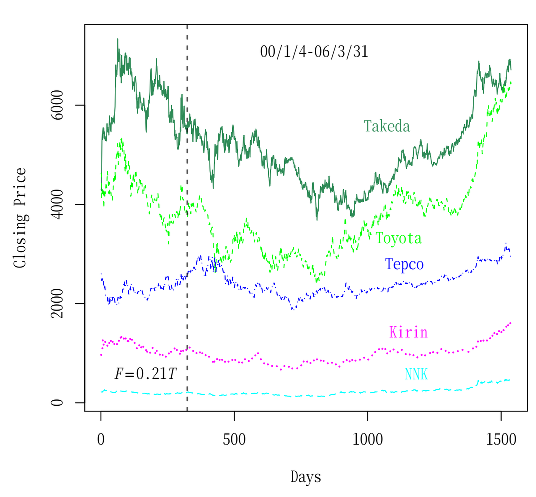

図 1: 5銘柄の終値

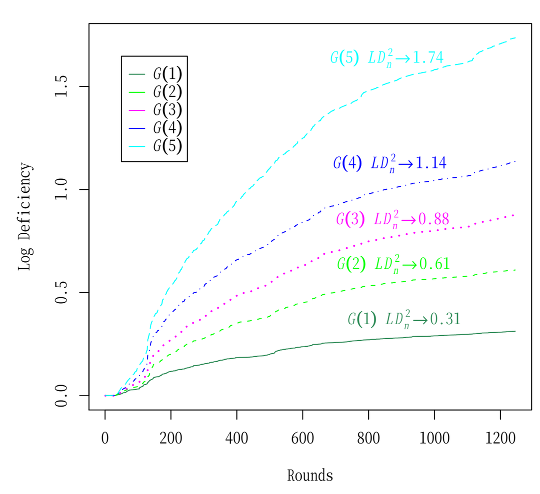

図 2: $\frac{1}{2} \log[I_n]$

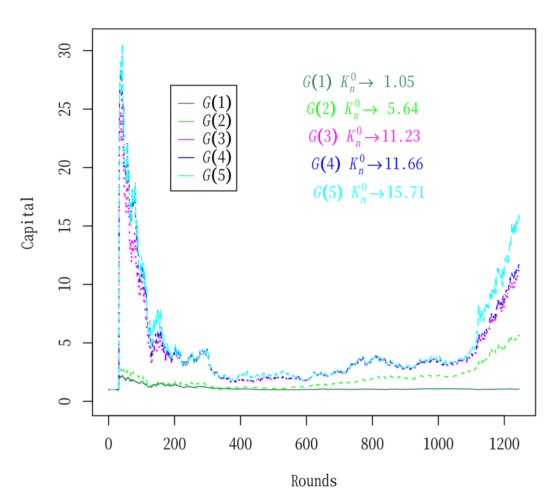

図 3: $\exp(nD(g_n \| g_n^*))$

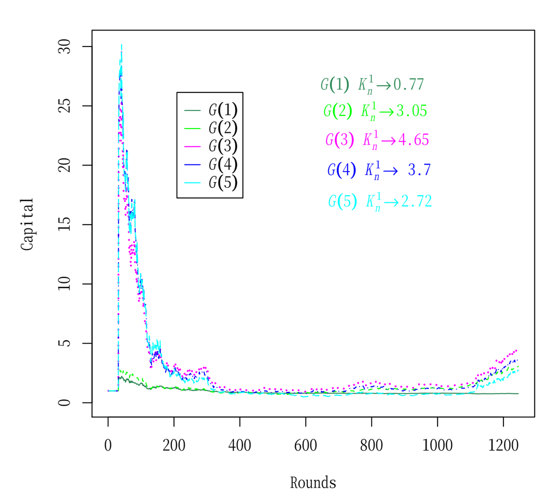

図 4: $\mathcal{K}_n^*$

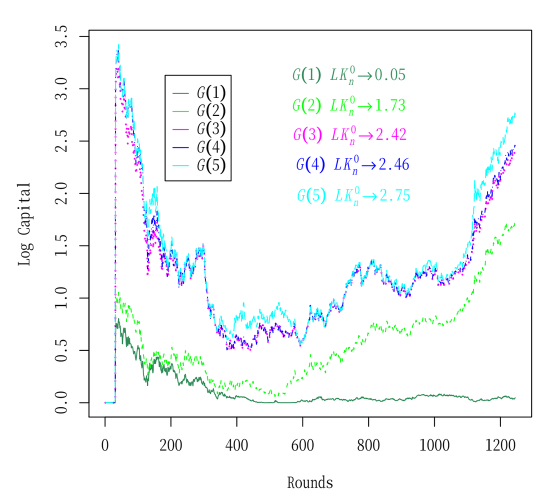

図 5: $nD(g_n \| g_n^*)$

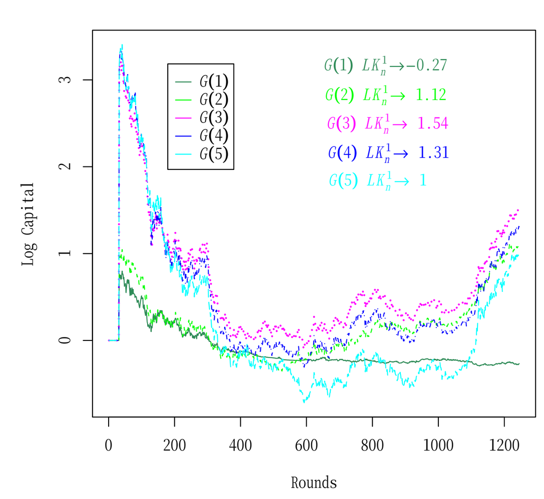

図 6: $\log \mathcal{K}_n^*$