Shrunk Subspaces via Operator Sinkhorn Iteration

相馬 輔　数理・推論研究系　准教授

Abstract

We provide a simple Sinkhorn-style algorithm to find the smallest shrunk subspace over the complex field in deterministic polynomial time. To this end, we introduce a generalization of the operator scaling problem, where the spectra of the marginals must be majorized by specified vectors. Then we design an efficient Sinkhorn-style algorithm for the generalized operator scaling problem. Applying this to the shrunk subspace problem, we show that a sufficiently long run of the algorithm also finds an approximate shrunk subspace close to the minimum exact shrunk subspace. Finally, we show that the approximate shrunk subspace can be rounded if it is sufficiently close. This is joint work with Cole Franks and Michel Goemans (MIT).

Edmonds問題

Edmonds問題

入力: $A = x_1 A_1 + \cdots + x_p A_p$ $(A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}, x_1, \ldots, x_p$: スカラー変数)
出力: $\det A$は恒等的に0か？

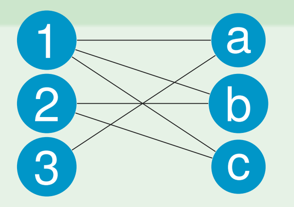
例

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ x_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & x_3 \\ x_4 + x_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

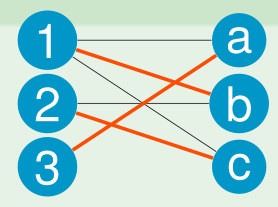
- 乱数を使ってよいなら簡単！ 決定性アルゴリズムがあるか？
  $\longrightarrow$ **P vs BPP**（計算量理論の未解決問題）
- 様々な組合せ最適化問題を定式化できる！

例：二部マッチング

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



台グラフ



完全マッチング

他にも，線形マトロイド交差，一般グラフマッチング，線形マトロイドパリティ，赤青マッチングなど

非可換ランク

非可換ランク (Amitsur, 1966; Cohn, 2003; Fortin and Reutenauer, 2004)

$$\text{nc-rank}\, A = \min\left\{ n - \dim U + \dim\left(\sum_i A_i U\right) : U \text{は}\mathbb{C}^n\text{の部分空間} \right\}.$$

注 元々の非可換ランクの定義 (Amitsur, 1966) は，非可換変数を含む自由斜体上のランク．上の式は (Cohn, 2003; Fortin and Reutenauer, 2004) の結果を定義としたもの

- $\operatorname{rank} A \le \text{nc-rank}\, A$
- 非可換ランクは作用素スケーリングを用いて決定性多項式時間で計算可能 [Garg et al., 2019]

作用素スケーリング

作用素スケーリング (Gurvits, 2004)

入力: 行列$A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$
出力: 正則行列L, R s.t. $\tilde{A}_i = L A_i R$が次を満たす:

$$\sum_{i=1}^p \tilde{A}_i \tilde{A}_i^\dagger = I \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^p \tilde{A}_i^\dagger \tilde{A}_i = I$$

†: 複素共役転置

- $\text{nc-rank}\, A = n \iff$ 作用素スケーリングに解が存在

記法

- 行列間の線形写像$\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$と$\Phi^* : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$をそれぞれ
$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^p A_i X A_i^\dagger, \qquad \Phi^*(X) = \sum_{i=1}^p A_i^\dagger X A_i$$
と定める．（Φは完全正値写像，Φ^*はΦの双対写像と呼ばれる）
- 正則行列L, Rに対し，“スケーリングされた写像” $\Phi_{L,R}$と$\Phi^*_{L,R}$を
$$\Phi_{L,R}(X) = \sum_{i=1}^p \tilde{A}_i X \tilde{A}_i^\dagger, \qquad \Phi^*_{L,R}(X) = \sum_{i=1}^p \tilde{A}_i^\dagger X \tilde{A}_i$$
で定める．
- 作用素スケーリングは$\Phi_{L,R}(I) = I$, $\Phi^*_{L,R}(I) = I$となる正則行列L, Rを求める問題．

作用素Sinkhornアルゴリズム

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= \Phi \\ \Phi^{(2t+1)} &= \Phi^{(2t)}_{L,I} & \text{ここで } L &= \Phi^{(2t)}(I)^{-1/2}, \\ \Phi^{(2t+2)} &= \Phi^{(2t+1)}_{I,R} & \text{ここで } R &= (\Phi^{(2t+1)})^*(I)^{-1/2}. \end{aligned}$$

- 作用素スケーリングに解が存在するなら，作用素Sinkhornアルゴリズムは解に収束する
- SLD計量に関する交互e射影としての解釈 [Matsuda and Soma, 2022]

非可換ランクとShrunk subspace

作用素Sinkhornアルゴリズムは非可換ランクの右辺最適解(**shrunk subspace**)は与えない．

既存の非可換ランク計算アルゴリズム

- 代数的増加道 [Ivanyos, Qiao, and Subrahmanyam, 2018]
- CAT(0)空間上の離散凸解析 [Hamada and Hirai, 2021]

これらはshrunk subspaceも与えるが，計算量が大きく複雑．

主結果 (Franks, Soma, and Goemans, 2023)

最小のshrunk subspaceを求めるSinkhorn型決定性多項式時間アルゴリズム

- 右辺は部分空間のなす束上の劣モジュラ関数最小化 $\Longrightarrow$ 最小のshrunk subspaceの存在
  $f(U) + f(V) \ge f(U+V) + f(U \cap V)$　(U, V:部分空間)
- **応用:** 分数マトロイドマッチング，rank-2 BL多面体
- 計算量（arithmeticモデル）

IQS18	HH21	本研究
少なくとも$O(pn^{18})$	少なくとも$O(pn^{17})$	$\tilde{O}(n^{12}(n+p))$

$n :=$ 行列サイズ，$p :=$ 行列の数

アルゴリズム

作用素(k, r)スケーリング

入力: 行列$A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\varepsilon > 0$, $k, r > 0$
出力: 正則行列$L_\varepsilon, R_\varepsilon$, $z \ge 0$ s.t.

$$\sum_{i=1}^p \tilde{A}_i \tilde{A}_i^\dagger \preceq I, \quad \lambda\left(\sum_{i=1}^p \tilde{A}_i^\dagger \tilde{A}_i\right) \prec_{\mathrm{w}} \alpha_r, \quad \operatorname{tr} \sum_{i=1}^p \tilde{A}_i \tilde{A}_i^\dagger \ge k - \varepsilon$$

（ここで $\tilde{A}_i = e^z L_\varepsilon A_i R_\varepsilon$）

(Weak) Majorization:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$に対し，$\alpha \prec_{\mathrm{w}} \beta \overset{\text{def}}{\iff} \alpha_1^\downarrow + \cdots + \alpha_i^\downarrow \le \beta_1^\downarrow + \cdots + \beta_i^\downarrow \quad (i = 1, \ldots, n)$

($\alpha_i^\downarrow$: αのi番目に大きい成分)

例

$$(0.5, 0.5, 0.5) \prec_{\mathrm{w}} \begin{matrix}(1.0, 0.4, 0.1) \\ (0.9, 0.6, 0.0)\end{matrix} \prec_{\mathrm{w}} (1.5, 0.0, 0.0)$$

$\tilde{\Phi}(X) = \sum_i \tilde{A}_i X \tilde{A}_i^\dagger$とすると，上の条件は

$$\tilde{\Phi}(I) \preceq I, \quad \lambda(\tilde{\Phi}^*(I)) \prec_{\mathrm{w}} \alpha_r, \quad \operatorname{tr} \tilde{\Phi}(I) \ge k - \varepsilon$$

作用素(k, r)スケーリングに対するSinkhornアルゴリズム

1. $\operatorname{tr} \Phi^{(t)}(I) < k - \varepsilon$なら，$z$を制約を満たすよう更新し，$\Phi^{(t+1)} \leftarrow e^z \Phi^{(t)}$とおく．
2. $\Phi^{(t+1)}$が行和制約か列和制約を破っているなら，破り方の大きい制約を満たすようにL or Rを更新し，$\Phi^{(t+2)} \leftarrow \Phi^{(t+1)}_{L,R}$とおく．

Rの更新: $\lambda(\Phi(I))$のα_rに関する置換多面体へのKL射影（$O(n^3)$で可能）

定理 (Franks, Soma, and Goemans, 2023)

以下は同値:

1. Φは(k, r)スケーリング可能
2. $k \le \text{nc-rank}\, A$かつ$r \le \dim U^*$　(U^*: 最小のshrunk subspace)

さらに，これらはSinkhornアルゴリズムにより多項式時間で判定可能．

定理 (Franks, Soma, and Goemans, 2023)

特に$(k, r) = (\text{nc-rank}\, A, \dim U^* + 1)$に対してSinkhornアルゴリズムを実行すると，多項式回反復の後，最小のShrunk subspace U^*が得られる．

参考文献

Amitsur, S. (1966). “Rational identities and applications to algebra and geometry”. In: *Journal of Algebra* 3.3, pp. 304–359.
Cohn, P. M. (2003). “Skew fields”. In: *Further Algebra and Applications*. Springer, pp. 343–370.
Fortin, M. and C. Reutenauer (2004). “Commutative/noncommutative rank of linear matrices and subspaces of matrices of low rank”. In: *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* 52, B52f.
Franks, C., T. Soma, and M. X. Goemans (2023). “Shrunk subspaces via operator Sinkhorn iteration”. In: *Proceedings of the 2023 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 1655–1668. DOI: 10.1137/1.9781611977554.ch62.
Garg, A., L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson (2019). “Operator Scaling: Theory and Applications”. In: *Foundations of Computational Mathematics* 20, pp. 223–290. ISSN: 1615-3383. DOI: 10.1007/s10208-019-09417-z.
Gurvits, L. (2004). “Classical complexity and quantum entanglement”. In: *Journal of Computer and System Sciences* 69.3, pp. 448–484. ISSN: 00220000. DOI: 10.1016/j.jcss.2004.06.003.
Hamada, M. and H. Hirai (2021). “Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces”. In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 5.3, pp. 455–478. DOI: 10.1137/20M138836X.
Ivanyos, G., Y. Qiao, and K. V. Subrahmanyam (2018). “Constructive non-commutative rank computation is in deterministic polynomial time”. In: *Computational Complexity* 27.4, pp. 561–593. ISSN: 1420-8954. DOI: 10.1007/s00037-018-0165-7.
Matsuda, T. and T. Soma (2022). “Information geometry of operator scaling”. In: *Linear Algebra and its Applications* 649, pp. 240–267. DOI: 10.1016/j.laa.2022.04.022.