

不確かさのもとでの意思決定

伊藤 聡 数理・推論研究系 教授

ロバスト最適化と確率測度

外乱やシステムパラメータの変動などの不確かさが存在するとき、このような不確定性を確率的な変動として取り扱う最適化手法として確率計画法があり、制約条件が満たされる確率を保証する機会制約モデルなどがよく知られている。不確定要素に関する確率的情報が利用できない場合、ゲーム論的なmin-max戦略を考えることになるが、このようないわゆるロバスト最適化問題は無限個の不等式制約条件を持つ最適化問題

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{subject to} \quad g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y$$

あるいは最大値関数を含む最適化問題

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{subject to} \quad \sup_{y \in Y} g(x, y) \leq 0$$

として記述することができる。 X を実 Hilbert 空間、 Y を Hausdorff 空間、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ とするが、特に X が有限次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^n のとき、半無限計画問題と呼ばれる。

ここで、最大値関数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$v(x) := \sup_{y \in Y} g(x, y)$$

と定義する。いま、 Y がコンパクトで、 g が $X \times Y$ 上で連続ならば、最大解写像 $\hat{Y}: X \rightarrow 2^Y$ を

$$\hat{Y}(x) := \arg \max_{y \in Y} g(x, y) = \{y \in Y \mid g(x, y) = v(x)\}$$

により定義することができるが、最大解集合 $\hat{Y}(x) \in 2^Y$ は任意の $x \in X$ に対して非空コンパクト、最大値関数 v は X 上で連続となる。さらに g が任意の $y \in Y$ に対し X 上で Fréchet 偏微分可能、かつ偏導関数 $\nabla_x g: X \times Y \rightarrow X$ が $X \times Y$ 上で連続ならば、最大値関数 v は X の任意の点の近傍で局所 Lipschitz 連続であり、 $x \in X$ における一般勾配 $\partial^\circ v(x)$ は、最大解集合 $\hat{Y}(x)$ 上でのみ正となる確率測度を用いて表現できる。

$$\begin{aligned} \partial^\circ v(x) &= \overline{\text{co}} \{ \nabla_x g(x, y) \mid y \in \hat{Y}(x) \} \\ &= \left\{ \int_Y \nabla_x g(x, y) d\mu \mid \int_Y d\mu = 1, \mu \geq 0, \int_{\hat{Y}(x)^c} d\mu = 0 \right\} \end{aligned}$$

ここで $\overline{\text{co}}$ は閉凸包を表している。

この確率測度による一般勾配の表現を用いれば、ロバスト最適化問題など、最大値関数を含む実 Hilbert 空間上で定義された最適化問題の KKT 型最適性条件が得られ、またこれらを数値的に解くためのアルゴリズムを構成することができる。

確率測度の推定と測度空間における最適化

ロバスト最適化問題に留まらず、本質的に確率測度の推定問題に帰着する問題は少なくないが、測度空間における線形最適化問題を考える。

コンパクトな Hausdorff 空間 X に対して、 X 上の有限な符号つき Borel 測度からなる Banach 空間を $M(X)$ 、また X 上の有限な (非負の) Borel 測度からなる閉凸錐を $M(X)_+$ と書くことにし、以下のような $M(X)$ 上の最適化問題 (一般化モーメント問題) を考える。

$$\begin{cases} \min_{\mu \in \mathcal{M}} \int_X f(x) d\mu \\ \text{subject to} \quad \int_X \psi(x, z) d\mu = h(z) \quad \forall z \in Z \end{cases}$$

ただし、 \mathcal{M} を $M(X)$ の凸集合、 $h: Z \rightarrow \mathbb{R}$ とし、関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ および、各 $z \in Z$ に対して、関数 $\psi(\cdot, z): X \rightarrow \mathbb{R}$ は任意の $\mu \in \mathcal{M}$ に関して可積分であるとする。 Z は必ずしも有限集合でなくてよい。

応用上重要なのは \mathcal{M} が $\mathcal{M} \subset M(X)_+$ かつ線形不等式制約条件で規定されるとき、すなわち

$$\mathcal{M} = \left\{ \mu \in M(X)_+ \mid \int_X \varphi(x, y) d\mu \geq g(y) \quad \forall y \in Y \right\}$$

のように与えられるときである。ここで、 $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ とし、各 $y \in Y$ に対して、関数 $\varphi(\cdot, y): X \rightarrow \mathbb{R}$ は任意の $\mu \in M(X)_+$ に関して可積分であるとする。 Y も有限集合であるとは限らない。

このとき、一般化モーメント問題は $M(X)$ 上の等式および不等式制約条件つき線形計画問題として以下のように書ける。

$$\begin{cases} \min_{\mu \in M(X)} \int_X f(x) d\mu \\ \text{subject to} \quad \int_X \varphi(x, y) d\mu \geq g(y) \quad \forall y \in Y \\ \int_X \psi(x, z) d\mu = h(z) \quad \forall z \in Z \\ \mu \geq 0 \end{cases} \quad (P)$$

特に、 Y, Z がコンパクトな Hausdorff 空間で、関数 f, g, h, φ, ψ がすべて連続であるとき、以下のような双対問題を考えることができる。

$$\begin{cases} \max_{\nu \in M(Y)} \int_Y g(y) d\nu + \int_Z h(z) d\xi \\ \xi \in M(Z) \\ \text{subject to} \quad \int_Y \varphi(x, y) d\nu + \int_Z \psi(x, z) d\xi \leq f(x) \quad \forall x \in X \\ \nu \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

Y, Z が有限集合ならば、双対問題 (D) は半無限線形計画問題となる。

測度空間 $M(X)$ は回帰的ではないが、関数 f, g 等の連続性を仮定することにより、双対問題 (D) の双対が主問題 (P) となるなど、回帰的な Banach 空間に準じた双対理論を展開することができる。また、 X, Y, Z のいずれかが無限集合であっても、それらを有限部分集合 ($X_k := \{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\} \subset X$, $Y_k := \{y_1^k, \dots, y_{m_k}^k\} \subset Y$, $Z_k := \{z_1^k, \dots, z_{l_k}^k\} \subset Z$) で緩和して得られる有限次元の線形計画問題を逐次的に主双対内点法を用いて解く効率のよいアルゴリズムを構築することができる。

測度空間における確率計画

y を確率変数とし、 Y 上での確率分布 (測度) ν がわかっている場合、測度空間 $M(X)$ 上で次のような確率的最適化問題を考えることができる。

$$\begin{cases} \min_{\mu \in M(X)} \int_X f(x) d\mu \\ \text{subject to} \quad \int_X d\mu = 1, \quad \mu \geq 0 \\ \int_X \int_Y \mathbb{I}\{g(x, y)\} d\nu d\mu \geq 1 - \alpha \end{cases}$$

ここで、 $\mathbb{I}\{g(x, y)\}$ は $g(x, y) \leq 0$ のとき 1 を、 $g(x, y) > 0$ のとき 0 をとる指示関数であり、 $\alpha \in (0, 1)$ は充足水準 (確率) を表す。したがって、最後の不等式制約条件は $g(x, y) \leq 0$ が満たされる確率が $1 - \alpha$ 以上 (侵される確率が α 未満) であることを保証する機会制約条件となっている。

このような確率的最適化問題も前節の最後に述べた逐次緩和などを用いて効率的に解くことができ、複雑なシステムの最適制御などへの応用が期待できる。