2023年5月26日 統計数理研究所 オープンハウス

非凸性制御によるアルゴリズム軌道の安定化

坂田 綾香 数理・推論研究系 准教授

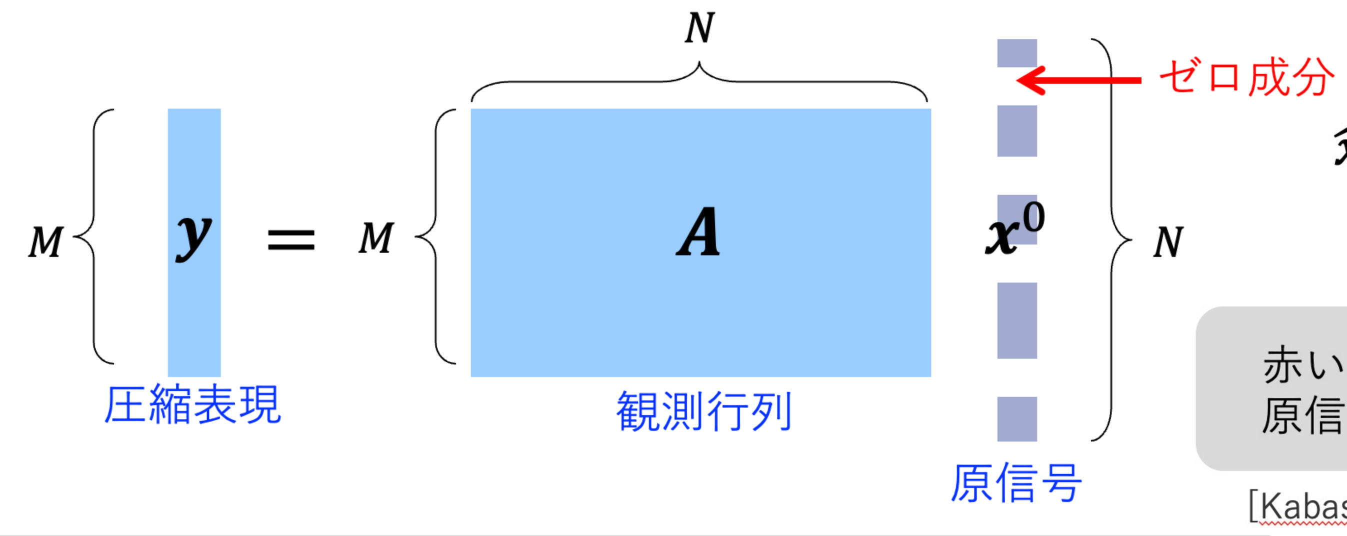
概要

非凸制約を使った推定について

- 圧縮センシングにおける非凸制約最小化法
- 確率伝搬法の適用
- 密度発展法による典型性能の理解
- 「非凸性制御」法の提案

圧縮センシングとは

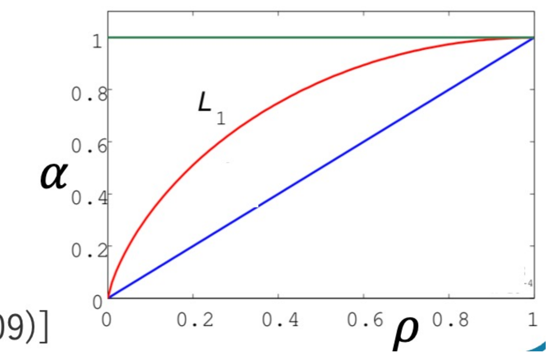
線形観測 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0$ から 原信号 $\boldsymbol{x}^0$ を復元する



$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{x}}{\mathrm{argmin}}\|\boldsymbol{x}\|_1, \text{subject to } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

線形計画法

赤い線より上の領域で原信号の復元が可能



[Kabashima, Wadayama, Tanaka (2009)]

重要なパラメータ
- ✓ $\alpha = M/N$: 圧縮率
- ✓ ρ: 原信号内の非ゼロ成分の割合

今回考える問題

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{x}}{\mathrm{argmin}}\, J(\boldsymbol{x}), \text{subject to } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

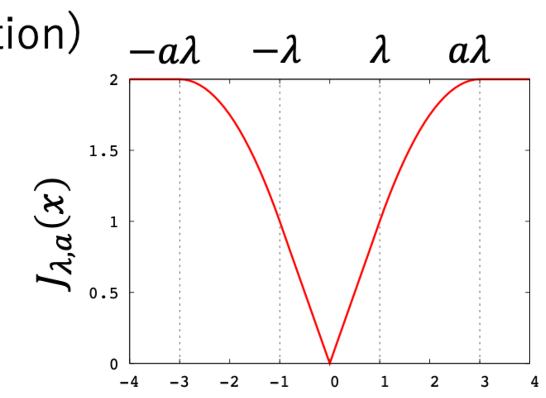
$J(\boldsymbol{x})$ は非凸スパース正則化

ここでは SCAD, MCPと呼ばれる制約を導入する

- ℓ_1最小化法よりも高い性能を与えると期待される
- パラメータ領域によってはℓ_1最小化法と同程度の計算コストで済む

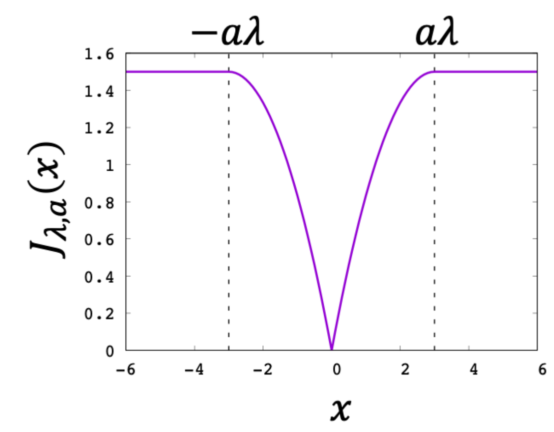
● SCAD (Smoothly Clipped Absolute Deviation)

$$J_{\lambda,a}(x) = \begin{cases} \lambda|x| & (|x| \leq \lambda) \\ -\dfrac{x^2 - 2a\lambda|x| + \lambda^2}{2(a-1)} & (\lambda < |x| \leq a\lambda) \\ \dfrac{(a+1)\lambda^2}{2} & (|x| > a\lambda) \end{cases}$$



● MCP (Minimax Concave Penalty)

$$J_{\lambda,a}(x) = \begin{cases} \lambda|x| - \dfrac{x^2}{2a} & (|x| \leq a\lambda) \\ \dfrac{a\lambda^2}{2} & (|x| > a\lambda) \end{cases}$$



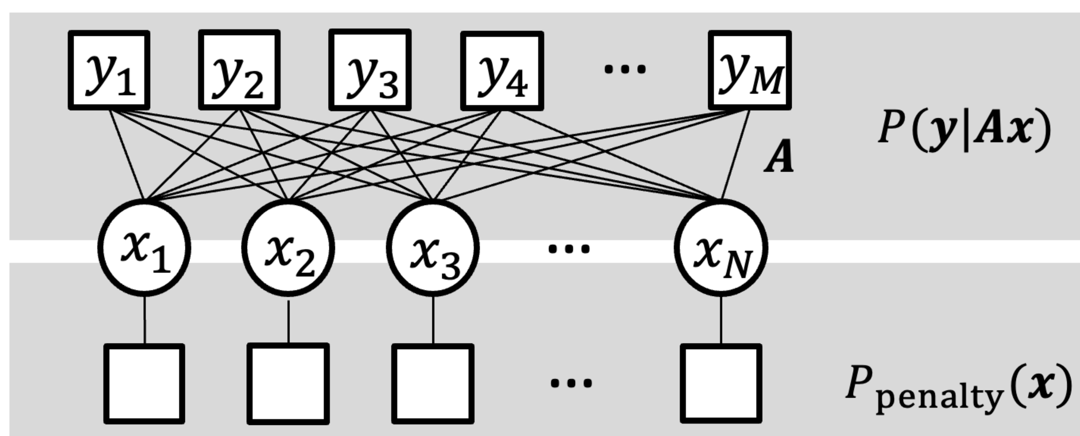
- $a \to \infty, \lambda = 1$ で ℓ_1 制約と一致する
- a, λを非凸性パラメータと呼ぶ

定式化

- $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^N$: 原信号
- 生成モデル : $P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)$
  - ➢ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^M$
- 制約(事前分布) : $P_{\mathrm{penalty}}(\boldsymbol{x}) \propto \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^N J(x_i)\right)$
- 解を次のように表現する

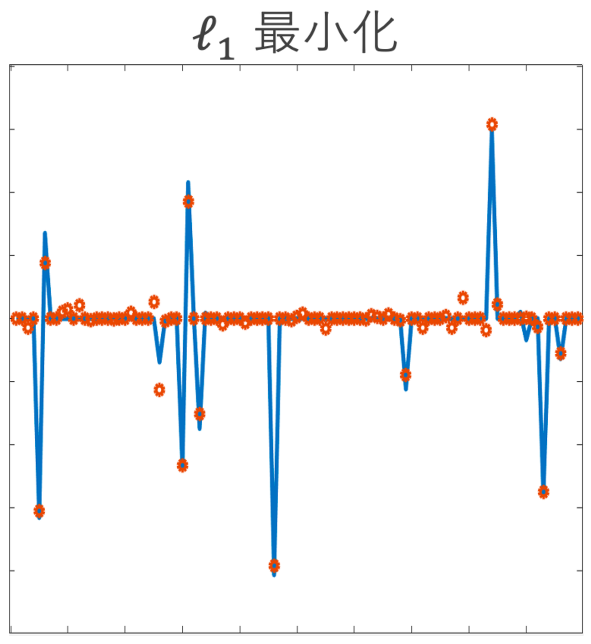
$$\hat{x}_i = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\int d\boldsymbol{x}\; x_i\, P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0) P_{\mathrm{penalty}}(\boldsymbol{x})}{\int d\boldsymbol{x}\; P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0) P_{\mathrm{penalty}}(\boldsymbol{x})}$$

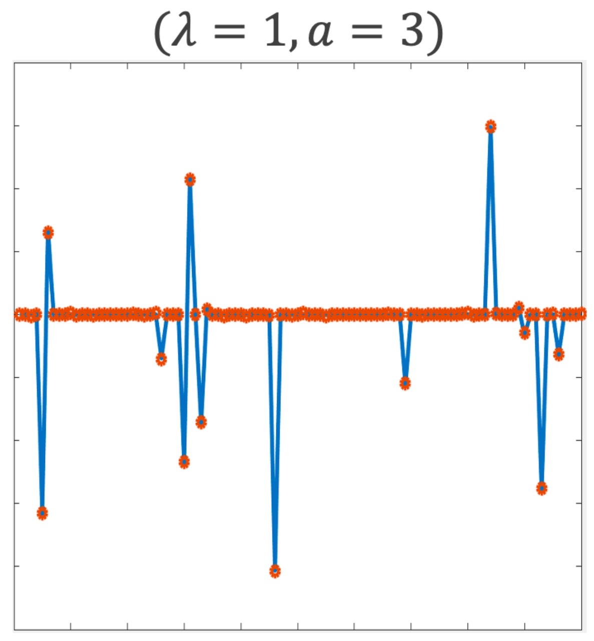
→確率伝搬法で求める



結果

$\alpha = 0.5, \rho = 0.2$での例

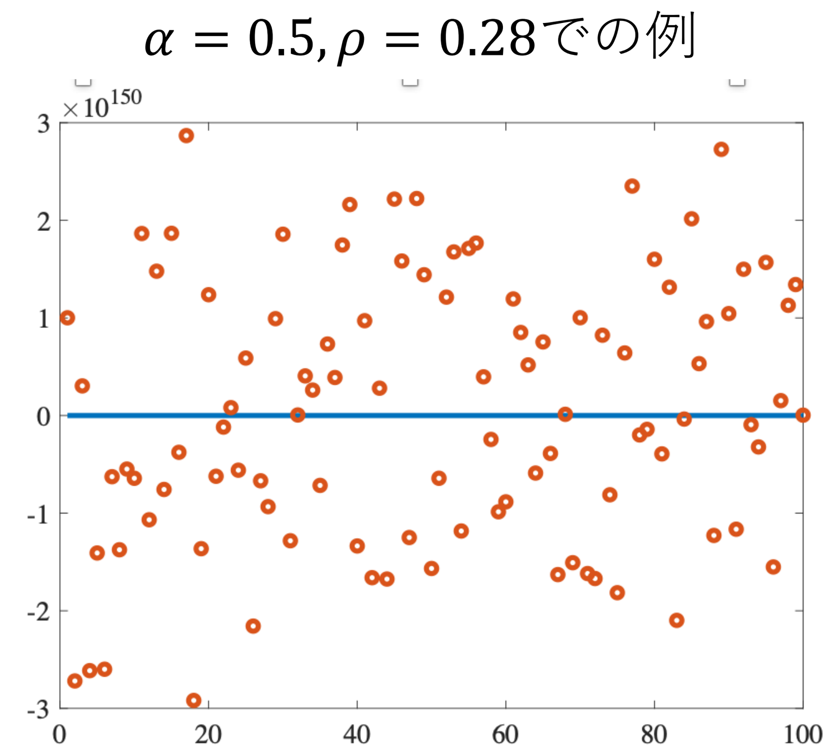




線：真の信号， 丸：推定値

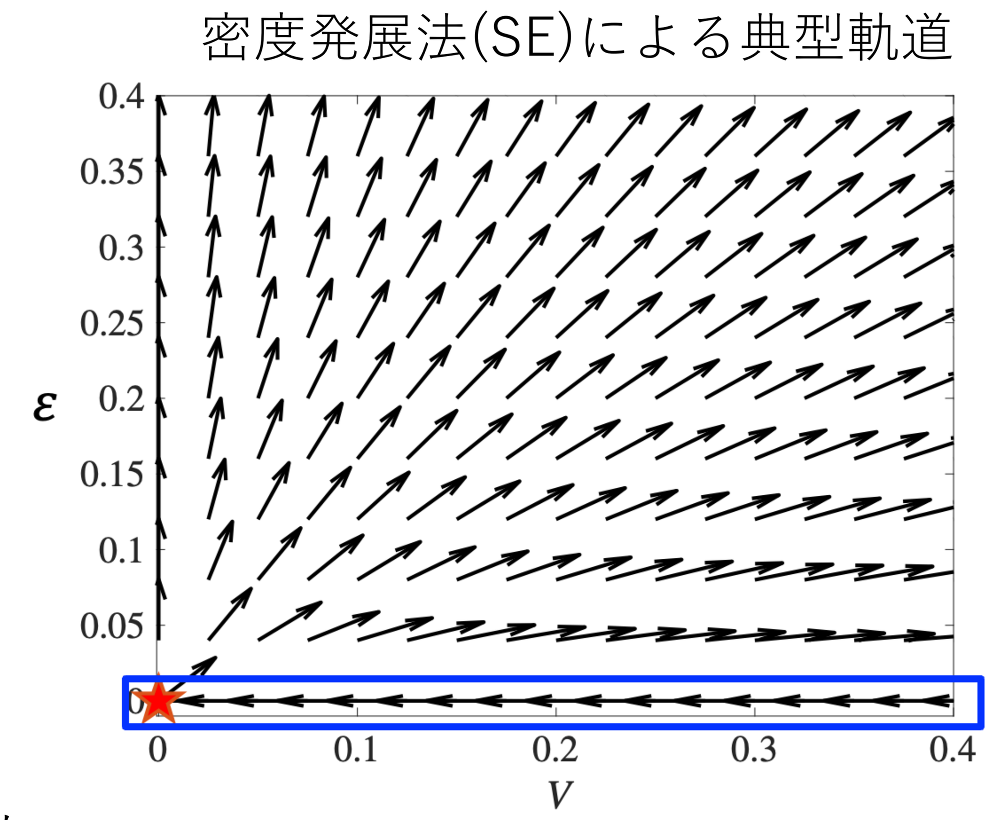
ℓ_1最小化よりも密な信号を再構成できる

$\alpha = 0.5, \rho = 0.28$での例



しかし，理論的に成功するはずの条件でも失敗することがある

密度発展法(SE)による典型軌道



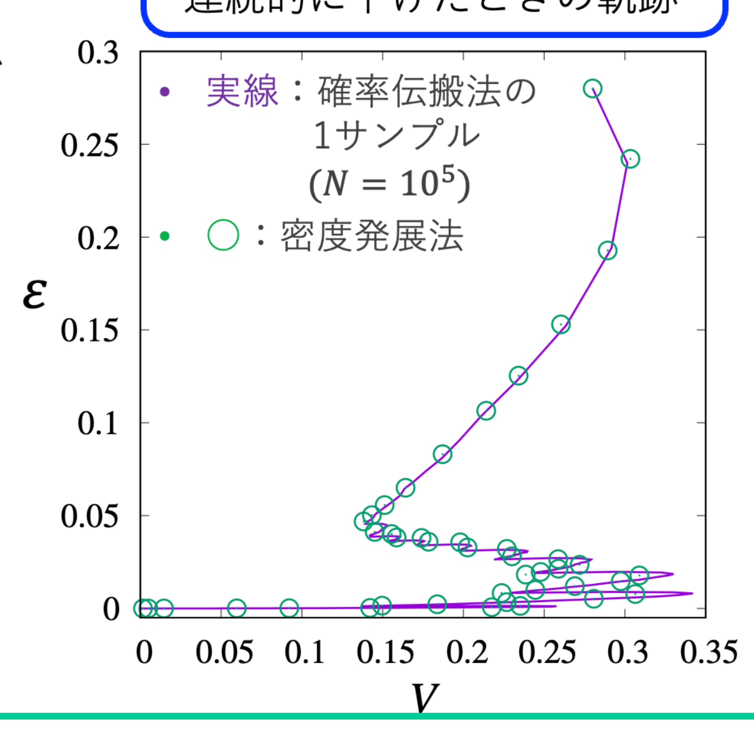
大域安定解が存在していても引き込み領域が極めて小さいことが原因
(縦軸：二乗誤差， 横軸：分散)

解決法：非凸性制御

$\alpha = 0.5, \rho = 0.28$での例

- 20ステップごとに0.1ずつ下げ最終的に$\lambda = 0.1$とした
- 初期条件はゼロベクトル ($\varepsilon = V = \rho$)

$a = 3$として，λを1から連続的に下げたときの軌跡



- 固定点を辿ることで $\varepsilon = V = 0$に到達する
- SEの軌道とよく合う

[Reference]
Ayaka Sakata and Tomoyuki Obuchi,
"Perfect reconstruction of sparse signals with piecewise continuous nonconvex penalties and nonconvexity control"
Journal of Statistical Mechanics (2021)