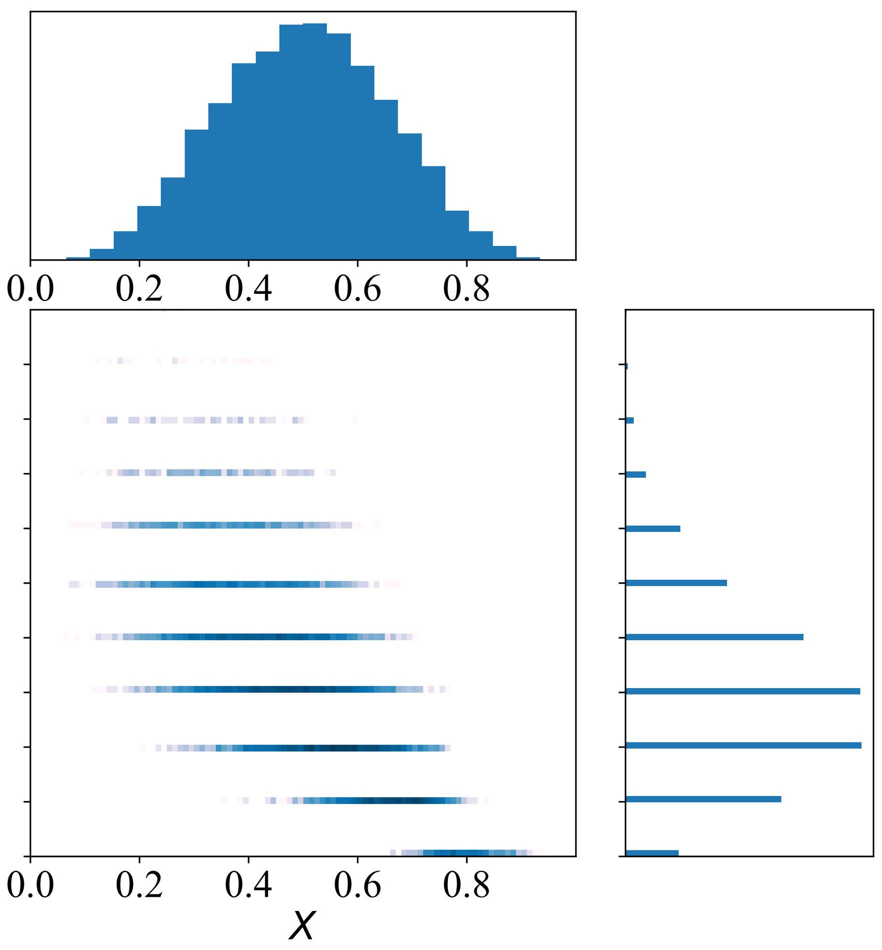
最小情報従属モデルにおける推論

矢野　恵佑　　数理・推論研究系　准教授

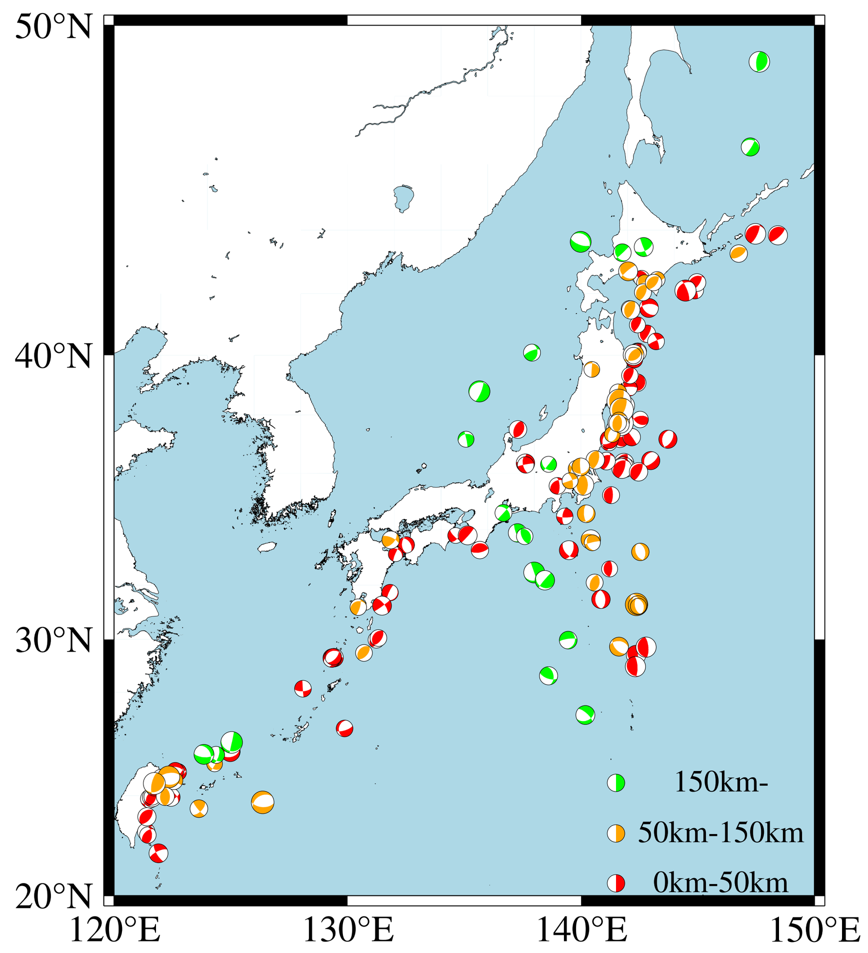
概要：
➢ 任意の対象間の任意の次数の依存関係を捉えるモデル(最小情報従属モデル)における依存関係を表すパラメータの推定法についての考察

背景：

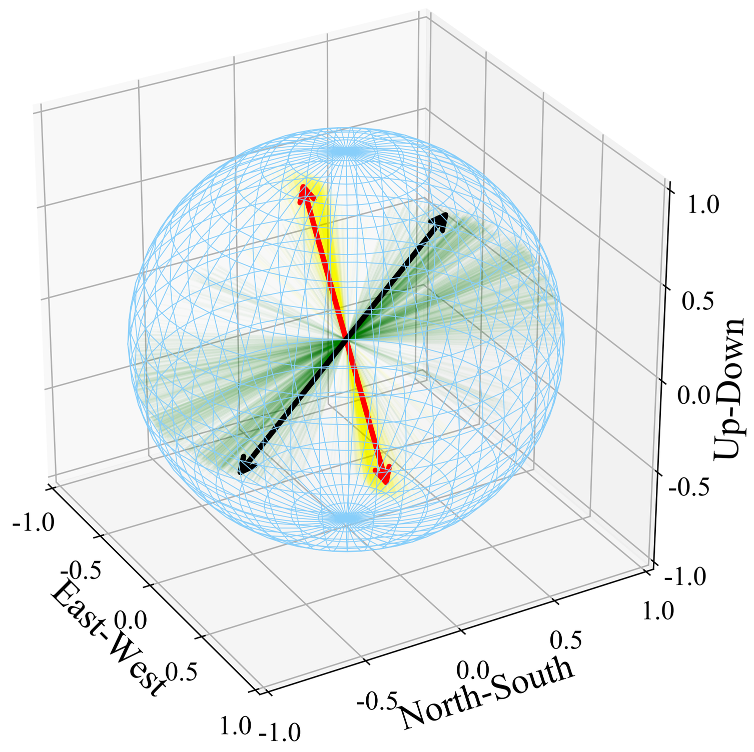
- 最小情報従属モデルは[1]で提案されたさまざまな対象(実数, カテゴリ変数, 多様体, …)の依存解析のためのモデル



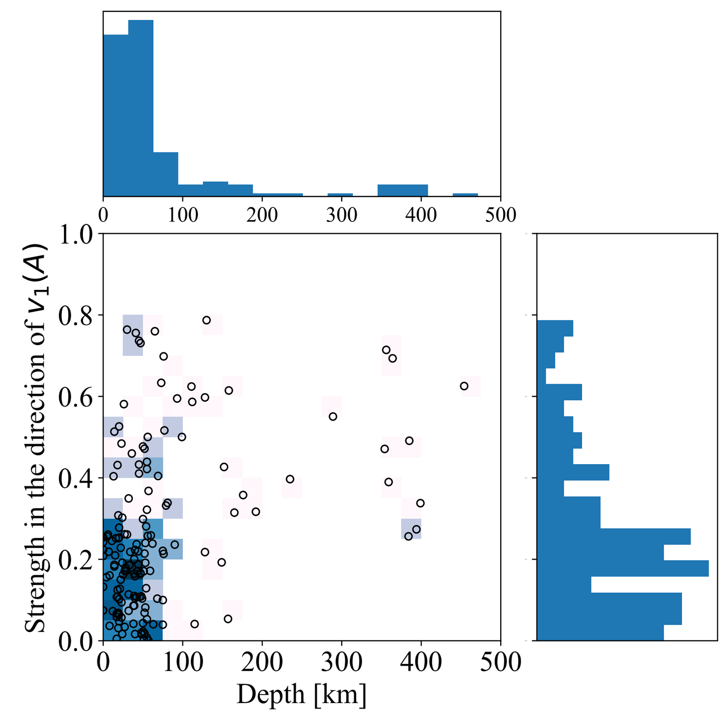
カウントデータと割合データの関係



深さと発震機構解(直交枠データ)の関係 [2]



Aの固有ベクトルの推定値とその不確実性
赤が第一固有ベクトル;黒が第3固有ベクトル



Aの第一固有ベクトルへの射影と深さ

最小情報従属モデル

- 任意の積空間$\mathcal{X} \coloneqq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$上の分布
- 周辺分布$r_j(x_j;\nu)$と関数$h: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$を与え積空間$\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$の分布を次で与える：

$$p(x;\theta,\nu) = \exp\left(\theta^\top h(x) - \sum_{j=1,\dots,d} a_j(x_j;\nu) - \psi(\theta,\nu)\right) \prod_{j=1,\dots,d} r_j(x_j;\nu)$$

- $a_j(\cdot;\nu)$と$\psi(\theta,\nu)$は次を満たすように決まる：

$$\int p(x;\theta,\nu)\mathrm{d}x_{-j} = r_i(x_j;\nu), j = 1,\dots,d \ \text{ and } \int \sum_{j=1,\dots,d} a_j(x_j;\theta,\nu) p(x;\theta,\nu)\mathrm{d}x = 0$$

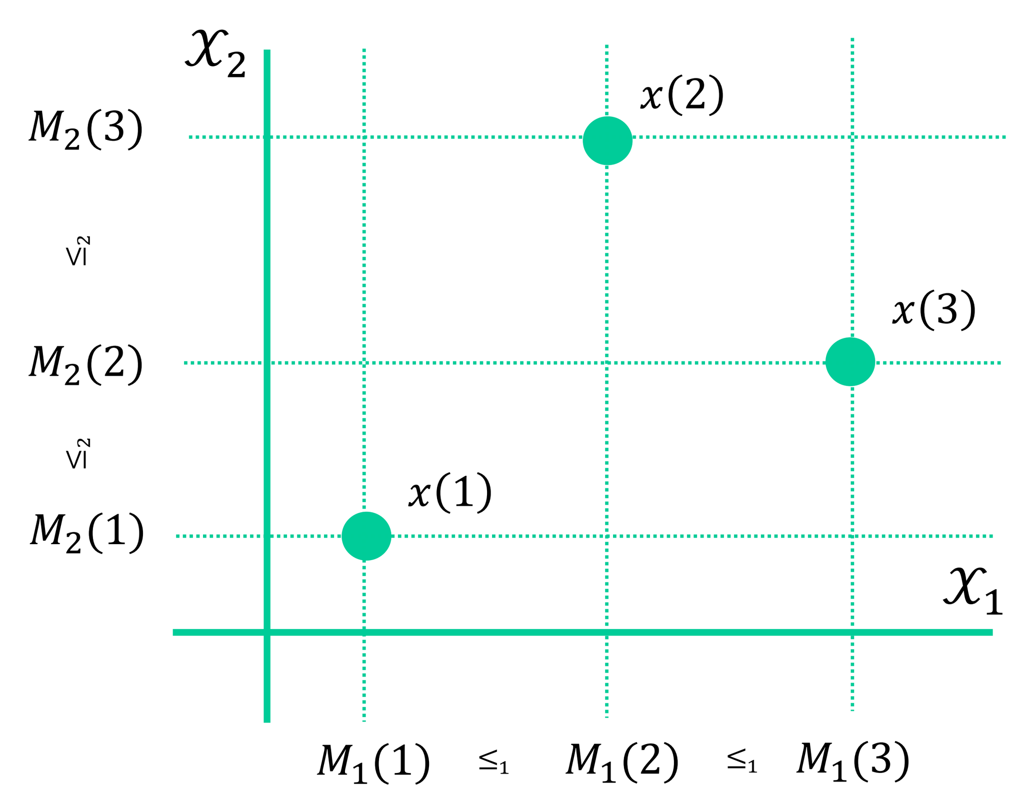
- $a_j(\cdot;\nu)$と$\psi(\theta,\nu)$は陽に与えられず一般に最尤法は難しい

提案モデルでの依存関係のパラメータ$\boldsymbol{\theta}$の二種類の推定法

1: 条件付き尤度最大化法(CLE)

- データ$\{x(t): t = 1,\dots,n\}$を右図のように周辺経験分布Mと置換$\pi \in S_n^d$に分解
- 次の条件付き分布の最大化によりθを推定

$$f(\pi \mid M;\theta) \propto \exp\left(\theta^\top \sum_t h((M \circ \pi)(t))\right)$$



2: 擬似尤度法(PLE)

- i番目の置換の条件付き分布の積によりθを推定

$$\mathrm{PL}(\pi \mid M;\theta) \propto \prod_{1 \leq s < t \leq n} \prod_{i=1,\dots,d} \frac{1}{1+\exp\left(\theta^\top\left\{h\left(\left(M\circ\pi\circ\tau_{st}^i(s)\right)\right)+h\left(\left(M\circ\pi\circ\tau_{st}^i(s)\right)\right)-h(M\circ\pi(s))-h(M\circ\pi(t))\right\}\right)}$$

τ_{st}^i: sとtのi番目の要素の入れ替え

二種類の推定法の性質

- 理論的性質：穏和な条件の下CLEとPLEはいずれも一致性を持つ
- 定性的性質：PLEはCLEで必要なMCMC(Gibbs sampler)を1ステップで止めた場合の推定法とみなすことが出来る

CLEの推定方程式

$$\sum_t h((M \circ \pi)(t)) - E_{\pi|M,\theta}\left[\sum_t h((M \circ \pi)(t))\right] = 0$$

PLEの推定方程式

$$\sum_t h((M \circ \pi)(t)) - E_{(i,s,t),\pi_i(s),\pi_i(t)|others}\left[\sum_t h\left(\left(M \circ \pi \circ \tau_{st}^i\right)(t)\right)\right] = 0$$

参考文献
[1] T. Sei and K. Yano, Minimum information dependence modeling, arXiv:2206.06792
[2] Japan Meteorological Agency. The seismological bulletin of Japan, 2022.