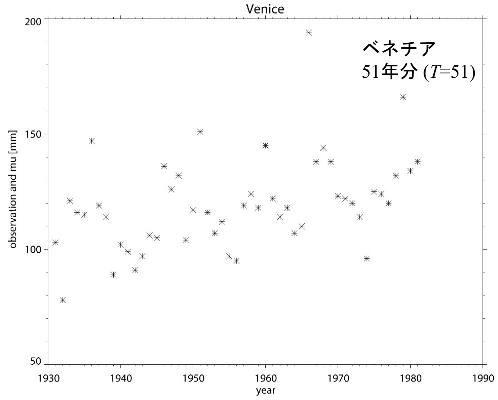
2023年5月26日　統計数理研究所　オープンハウス

極値時系列の状態空間モデル

上野　玄太　　モデリング研究系　教授

【海面水位の年最大値】



【動機】

- パラメータの時間変化を表す数学関数のクセが強すぎる
- 緩い条件で時間変化を表現したい
  (将来的に)
- 多変量の極端事象のモデル化を行いたい
- 気候変動(時間変化)＋隣接地域(空間変化)
- 風水害の適応策の検討

【極値時系列の状態空間モデル】

時系列データ　$y_1, y_2, \cdots, y_T$　年最大値。ベネチア51年分ならT=51

観測モデル

$$p\left(y_t;\mu_t,\sigma_t,\xi_t\right)=\frac{1}{\sigma_t}\left[\left(1+\xi_t\frac{y_t-\mu_t}{\sigma_t}\right)^{-1-1/\xi_t}\right]\exp\left[-\left(1+\xi_t\frac{y_t-\mu_t}{\sigma_t}\right)^{-1/\xi_t}\right]$$

システムモデル　「前年と近い値」

$$\begin{pmatrix}\mu_t\\ \log\sigma_t\\ \xi_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{t-1}\\ \log\sigma_{t-1}\\ \xi_{t-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_t\\ b_t\\ c_t\end{pmatrix}$$

システムノイズ　$a_t \sim N(0,A)$, $b_t \sim N(0,B)$, $c_t \sim N(0,C)$

【位置パラメータのトレンド】

- 波打つμ_tは妥当なのか？
- 2次以上のトレンド成分を用いた場合はどうなるか？

1次トレンド (前年と近い値)　$\mu_t = \mu_{t-1} + a_t$

2次トレンド (前年と近い変化)　$\mu_t - \mu_{t-1} = \mu_{t-1} - \mu_{t-2} + a_t$

3次トレンド　$\mu_t - 2\mu_{t-1} + \mu_{t-2} = \mu_{t-1} - 2\mu_{t-2} + \mu_{t-3} + a_t$

【1次トレンド＋短期変動】

- 1次トレンド(波打つμ_t) の尤度が最も大きいので、こちらを追求

システムモデル　「前年と近い値」

$$\boxed{\begin{pmatrix}\mu_t\\ \log\sigma_t\\ \xi_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{t-1}\\ \log\sigma_{t-1}\\ \xi_{t-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_t\\ b_t\\ c_t\end{pmatrix}}\ \text{1次トレンド}$$

$a_t \sim N(0,A)$, $b_t \sim N(0,B)$, $c_t \sim N(0,C)$

- 定常AR成分を追加して短期変動を表現できるか？

$$r_t = \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_2 r_{t-2} + \cdots + \alpha_{10} r_{t-10} + d_t \qquad d_t \sim N(0,D)$$

観測モデル

$$p\left(y_t;\mu_t\boxed{+r_t},\sigma_t,\xi_t\right)=\frac{1}{\sigma_t}\left[\left(1+\xi_t\frac{y_t-\mu_t\boxed{-r_t}}{\sigma_t}\right)^{-1-1/\xi_t}\right]\exp\left[-\left(1+\xi_t\frac{y_t-\mu_t\boxed{-r_t}}{\sigma_t}\right)^{-1/\xi_t}\right]$$

【まとめ】

- 一般化極値分布(GEV)のパラメータ(位置・尺度・形状)を時間変化を許して推定したい
- パラメータに関するシステムモデル、一般化極値分布を観測モデルとした状態空間モデル
- 粒子フィルタ(PF)・粒子スムーザ(PS)の適用。粒子数 N=100万
- ハイパーパラメータA,B,Cは最尤法、グリッドサーチで推定。凸でないため探索が必要
- 位置パラメータの推定結果
  - 1次トレンドモデルが2次、3次と比べ尤度が大きい
  - ただし約10年周期の変動が乗る
- 位置パラメータを分解し、長期変動(1次トレンド)＋短期変動(10次AR) と表現・推定が可能

【一般化極値分布】

$$p\left(y;\mu,\sigma,\xi\right)=\frac{1}{\sigma}\left[\left(1+\xi\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^{-1-1/\xi}\right]\exp\left[-\left(1+\xi\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right]$$

【先行研究 (Smith 1986)】

Smith, R. L., Extreme value theory based on the r largest annual events, Journal of Hydrology, 86(1986)27-43

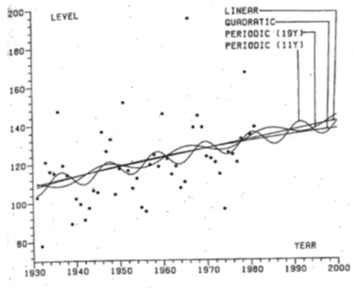


Fig. 2. Annual maxima 1931–1981 and median predicted values under four models.

位置パラメータ：時変

$\mu_t = \alpha + \beta t$

$\mu_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2$

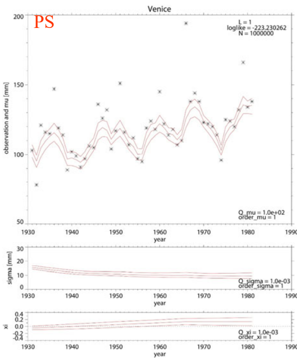
$\mu_t = \alpha + \beta t + A\cos(\omega t + \phi)$

尺度・形状パラメータは定常

$\sigma_t = \sigma$

$\xi_t \to 0$

y_t μ_t



μ_tは波打つ (約10年周期?)

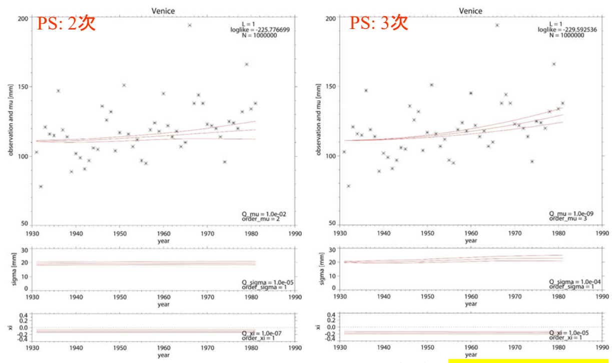
$A = 10^2$

σ_t　$B = 10^{-3}$

ξ_t　$C = 10^{-3}$

t

y_t μ_t



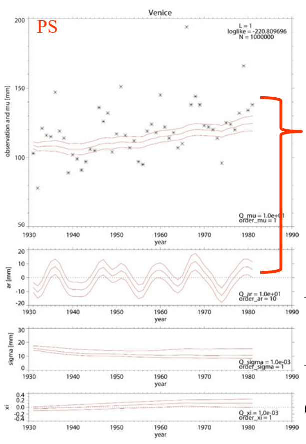
σ_t

ξ_t

t

μ_tは滑らか (ただし尤度は小)

y_t μ_t



位置パラメータを分解し、
μ_t(緩やかに増加する成分)
r_t(10年程度で変動する成分)
の和として表現

$A = 10^1$

r_t　$D = 10^1$

σ_t　$B = 10^{-3}$

ξ_t　$C = 10^{-3}$