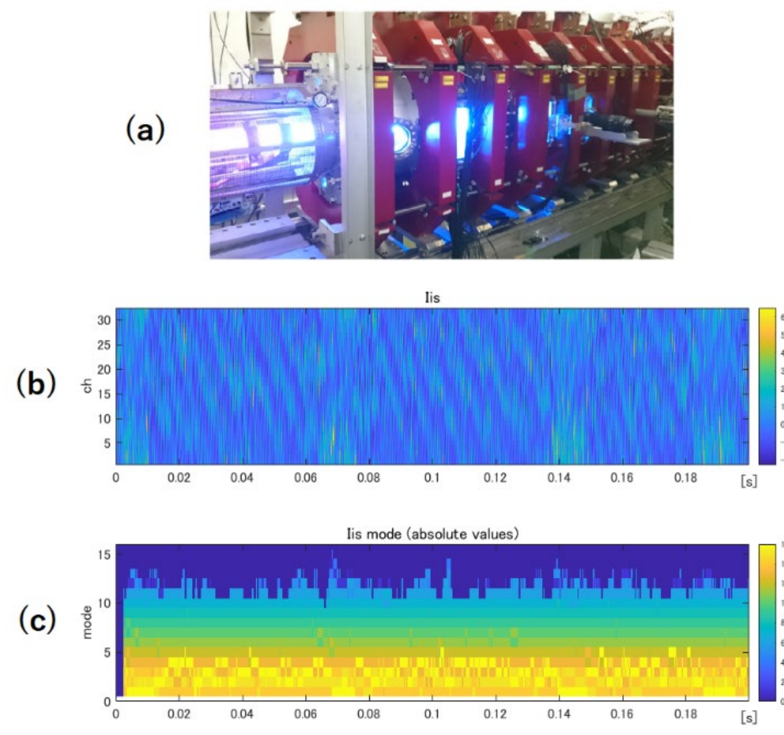
円筒プラズマ乱流データの理解に向けた統計的時系列解析の適用可能性

みわけいち
三分一 史和　　モデリング研究系　准教授

1 はじめに

核融合研究の対象であるプラズマは、多様な時空間スケールの現象が複雑に絡み合い、非常に非線形な媒質である。加熱・波動、電磁流体力学不安定性、乱流といった各物理階層の詳細な理解は進み、プラズマ物理学が体系化してきた。これらの研究に基づき、核融合発電の実用化研究が進行している。しかし、基礎的な部分で未解明な問題は依然として存在する。特に、プラズマ中の電流が突如切れるディスラプション現象の制御は未開発である。プラズマ乱流は多自由度の問題で、大規模構造の励起がシステムの発展を左右する。これを理解するには、観測データの分析が不可欠だ。周波数ドメインのモード分解法が乱流パターンの分類に用いられるものの、自由度の多さが非線形過程の理解を難しくしている。

空間モード分解に関するこれまでの研究では、システムの輸送やエネルギー交換に関わるモードの時間発展に何らかの規則性が存在することが示唆されている。本研究では、あるモードが他のモードを励起したり、または抑制したりするフィードバック機構が存在するか否かを、多変量時系列解析のアプローチによる因果解析での検証可能性を検討する。さらに、プラズマの動的挙動の理解と予測には非線形解析が不可欠であるため、その展望についても議論する。



(a) 線形型プラズマ発生装置
(b) 円筒状に測定された電子密度データの時間遷移の2次元展開
(c) 最適なモード数と主要なモードの時間遷移

64chプローブは一つ飛びに
電子密度(N)と静電ポテンシャル(φ)を計測 (各32ch)

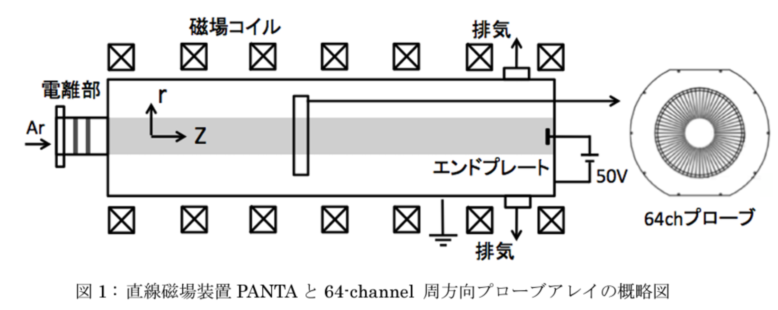


図1：直線磁場装置 PANTA と 64-channel 周方向プローブアレイの概略図

(九州大学応用力学研究所HPより)

各時点毎に空間フーリエ変換を施し振動modelに分解

$$f=\sum_{m,n} f_{mn}(r,t)\exp\left\{i\left(m\theta+2\pi nz\lambda^{-1}\right)\right\},\quad -16\le m\le 16,\quad -8\le n\le 8$$

特異値分解により特徴的なmodeを選択

$$\phi(r,\theta,t)=\sum_j s_j \Psi_j(r,\theta)h_t$$

2 動的因果解析

AR model

$$x_t=\sum_{i=1}^{\infty} a_{1i}x_{t-i}+\varepsilon_{1t},\ y_t=\sum_{i=1}^{\infty} b_{1i}y_{t-i}+\varepsilon_{2t}$$

AR Exogenous (ARX) model

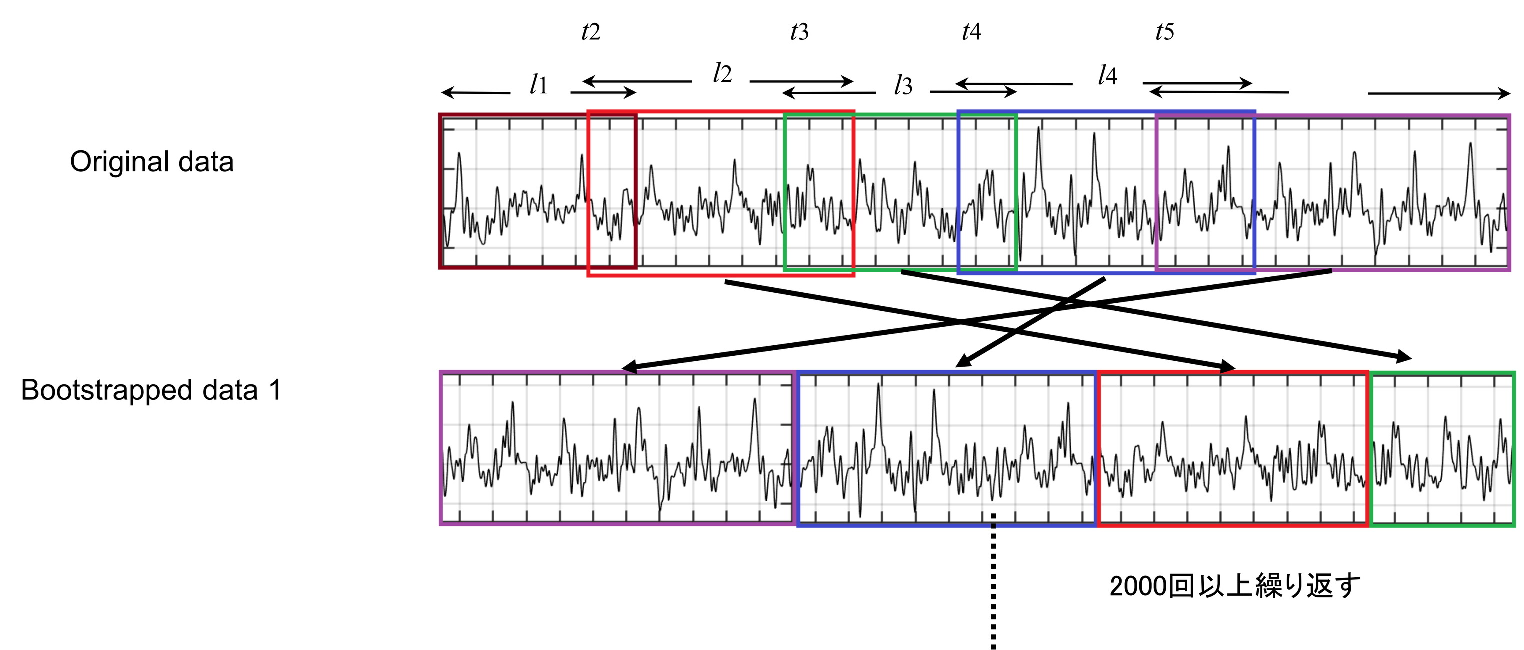
$$\begin{cases} x_t=\sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}x_{t-i}+\sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}y_{t-i}+\varepsilon_{3t} \\ y_t=\sum_{i=1}^{\infty} b_{2i}y_{t-i}+\sum_{i=1}^{\infty} d_{2i}x_{t-i}+\varepsilon_{4t} \end{cases}$$

Granger Causality (GC)

$$F_{y\to x}=\ln\left(\frac{\mathrm{var}(\varepsilon_{1t})}{\mathrm{var}(\varepsilon_{3t})}\right)\qquad F_{x\to y}=\ln\left(\frac{\mathrm{var}(\varepsilon_{2t})}{\mathrm{var}(\varepsilon_{4t})}\right)$$

(Granger, C. W. J. (1969) *Econometrica*. **37** (3): 424–438)

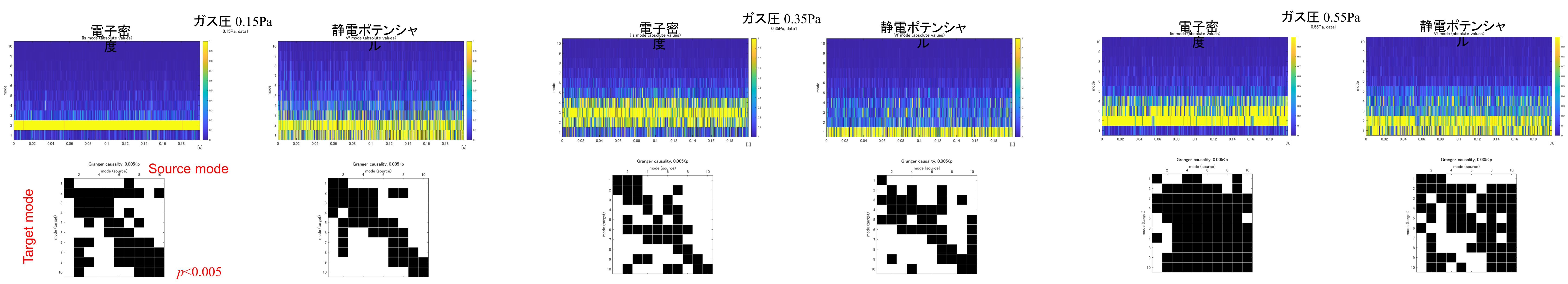
因果性の検定　Stationary Bootstrap (SB)



ブロック長(l_i) : 幾何分布, t_i: 一様分布
Bootstrap dataの定常性を保証。
correlated SB(cSB): すべてのチャンネルに共通の l_i と t_i を使用
uncorrelated SB(ucSB): チャンネルごとに独立にの l_i と t_iを発生させたもの

(Politis, D.N., Romano, J.P., 1994. American Statistical association 89)

3 結果



周波数ドメインでSVD分解されたあるモードが他のモードを励起したり抑制したりするフィードバック機構があるかどうかを多変量時系列解析のアプローチによる因果解析で検証可能性が示された。

線形解析の範疇では、ガス圧を高くするにつれmode間の因果性が高まる傾向があるが、因果性が低下し複雑度が低下する条件もあることが分かった。

4 議論: 非線形解析の導入

プラズマの現象は、高いエネルギー状態での電荷粒子の相互作用を伴うため、非線形解析の必要性が高い。これは、プラズマの特性の解析は一般的な線形モデルでは不十分である。そこで、非線形解析を導入してプラズマの振る舞いを予測するための非線形モデリングの基礎的研究が必要である

指数型ARモデル (T. Ozaki 1980, V. Haggan and T. Ozaki 1981)

$$x_t=\sum_{i=1}^{p}\underbrace{\left\{\phi_i+\pi_i\exp\left(-\gamma x_{t-1}^2\right)\right\}}_{\text{非線形項}}x_{t-i}+e_t$$

多変量型への拡張

$$y_t^l=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{p}\left\{\phi_i^{lm}+\pi_i^{lm}\exp\left(-\gamma\left(y_{t-1}^m\right)^2\right)\right\}y_{t-p}^m+e_t^l$$

パラメータの推定が難しい（特にγ）

物理モデルが未知なので、
セミパラメトリックモデルの導入

$$x_t=\sum_{i=1}^{p}a_i x_{t-1}+f(X_t)+e_t$$

カーネルの計算量が膨大になる

本研究の一部は以下の研究費の助成の元に行われている
情報・システム研究機構 戦略的研究プロジェクト
統計数理研究所共同利用研究 2023-ISMCRP-2007