不確かさのもとでの意思決定

伊藤　聡　数理・推論研究系　教授

ロバスト最適化と確率測度

外乱やシステムパラメータの変動などの不確かさが存在するとき，このような不確定性を確率的な変動として取り扱う最適化手法として確率計画法があり，制約条件が満たされる確率を保証する機会制約モデルなどがよく知られている。不確定要素に関する確率的情報が利用できない場合，ゲーム論的なmin-max戦略を考えることになるが，いわゆるロバスト最適化問題は無限個の不等式制約条件を持つ最適化問題

$$\min_{x\in X} f(x) \quad \text{subject to} \quad g(x,y) \le 0 \quad \forall y\in Y$$

あるいは最大値関数を含む最適化問題

$$\min_{x\in X} f(x) \quad \text{subject to} \quad \sup_{y\in Y} g(x,y) \le 0$$

として記述することができる。X を実Hilbert空間，Y をHausdorff空間，$f : X \to \mathbb{R}$，$g : X\times Y \to \mathbb{R}$ とするが，特にX が有限次元Euclid空間$\mathbb{R}^n$ のとき，半無限計画問題と呼ばれる。

ここで，最大値関数 $v : X \to \mathbb{R}$ を

$$v(x) := \sup_{y\in Y} g(x,y)$$

と定義する。いま，Y がコンパクトで，g が $X\times Y$ 上で連続ならば，最大解写像 $\widehat{Y} : X \to 2^Y$ を

$$\widehat{Y}(x) := \arg\max_{y\in Y} g(x,y) = \{\, y\in Y \mid g(x,y) = v(x)\,\}$$

により定義することができるが，最大解集合 $\widehat{Y}(x) \in 2^Y$ は任意の $x\in X$ に対して非空コンパクト，最大値関数 v は X 上で連続となる。さらに g が任意の $y\in Y$ に対し X 上でFréchet偏微分可能，かつ偏導関数 $\nabla_x g : X\times Y \to X$ が $X\times Y$ 上で連続ならば，最大値関数 v は X の任意の点の近傍で局所Lipshitz連続であり，$x\in X$ における一般勾配 $\partial^\circ v(x)$ は，最大解集合 $\widehat{Y}(x)$ 上でのみ正となる確率測度を用いて表現できる。

$$\begin{aligned}\partial^\circ v(x) &= \overline{\mathrm{co}}\,\{\, \nabla_x g(x,y) \mid y\in \widehat{Y}(x)\,\}\\ &= \left\{ \int_Y \nabla_x g(x,y)\,d\mu \;\middle|\; \int_Y d\mu = 1,\ \mu\ge 0,\ \int_{\widehat{Y}(x)^c} d\mu = 0 \right\}\end{aligned}$$

ここで $\overline{\mathrm{co}}$ は閉凸包を表している。

この確率測度による一般勾配の表現を用いれば，ロバスト最適化問題など，最大値関数を含む実Hilbert空間上で定義された最適化問題のKKT型最適性条件が得られ，またこれらを数値的に解くためのアルゴリズムを構成することができる。

確率測度の推定と測度空間における最適化

ロバスト最適化問題に留まらず，本質的に確率測度の推定問題に帰着する問題は少なくないが，測度空間における線形最適化問題を考えよう。

コンパクトなHausdorff空間 X に対して，X 上の有限な符号つきBorel測度からなるBanach空間を $M(X)$，また X 上の有限な（非負の）Borel測度からなる閉凸錐を $M(X)_+$ と書くことにし，以下のような $M(X)$ 上の最適化問題（一般化モーメント問題）を考える。

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{\mu\in\mathcal{M}} \int_X f(x)\,d\mu \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_X \psi(x,z)\,d\mu = h(z) \quad \forall z\in Z \end{cases}$$

ただし，$\mathcal{M}$ を $M(X)$ の凸集合，$h : Z \to \mathbb{R}$ とし，関数 $f : X \to \mathbb{R}$ および，各 $z\in Z$ に対して，関数 $\psi(\cdot, z) : X \to \mathbb{R}$ は任意の $\mu\in\mathcal{M}$ に関して可積分であるとする。Z は必ずしも有限集合でなくてよい。

応用上重要なのは $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M} \subset M(X)_+$ かつ線形不等式制約条件で規定されるとき，すなわち

$$\mathcal{M} = \left\{ \mu\in M(X)_+ \;\middle|\; \int_X \varphi(x,y)\,d\mu \ge g(y) \quad \forall y\in Y \right\}$$

のように与えられるときである。ここで，$g : Y \to \mathbb{R}$ とし，各 $y\in Y$ に対して，関数 $\varphi(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ は任意の $\mu\in M(X)_+$ に関して可積分であるとする。Y も有限集合であるとは限らない。

このとき，一般化モーメント問題は $M(X)$ 上の等式および不等式制約条件つき線形計画問題として以下のように書ける。

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{\mu\in M(X)} \int_X f(x)\,d\mu \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\,d\mu \ge g(y) \quad \forall y\in Y \\ \qquad\qquad\quad \displaystyle\int_X \psi(x,z)\,d\mu = h(z) \quad \forall z\in Z \\ \qquad\qquad\quad \mu \ge 0 \end{cases} \tag{P}$$

特に，Y, Z がコンパクトなHausdorff空間で，関数 f, g, h, φ, ψ がすべて連続であるとき，以下のような双対問題を考えることができる。

$$\begin{cases} \displaystyle\max_{\substack{\nu\in M(Y)\\ \xi\in M(Z)}} \int_Y g(y)\,d\nu + \int_Z h(z)\,d\xi \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_Y \varphi(x,y)\,d\nu + \int_Z \psi(x,z)\,d\xi \le f(x) \quad \forall x\in X \\ \qquad\qquad\quad \nu \ge 0 \end{cases} \tag{D}$$

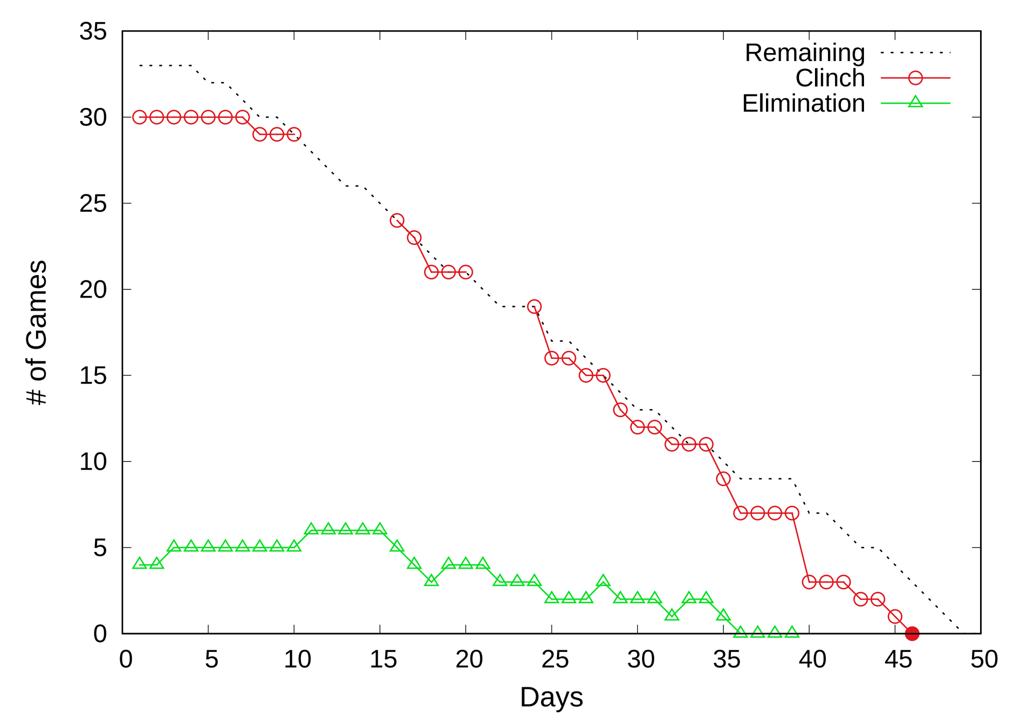
Y, Z が有限集合ならば，双対問題(D)は半無限線形計画問題となる。

測度空間 $M(X)$ は回帰的ではないが，関数 f, g 等の連続性を仮定することにより，双対問題(D)の双対が主問題(P)となるなど，回帰的なBanach空間に準じた双対理論を展開することができる。また，X, Y, Z のいずれかが無限集合であっても，それらを有限部分集合（$X_k := \{x_1^k, \dots x_{n_k}^k\} \subset X$，$Y_k := \{y_1^k, \dots y_{m_k}^k\} \subset Y$，$Z_k := \{z_1^k, \dots z_{l_k}^k\} \subset Z$）で緩和して得られる線形計画問題を逐次的に主双対内点法を用いて解く効率のよいアルゴリズムを構築することができる。

多層最適化によるクリンチ／エリミネーション計算

最悪の状況を想定するという意味で，リーグスポーツにおけるクリンチ数やエリミネーション数の計算もロバスト最適化による問題解決の一例と言える。

シーズン中のどの時点においても，最終的にリーグ優勝やプレーオフ出場権など特定の状況（指標）が達成されることが確定する最小の勝ち試合数（クリンチ数），もしくは逆にその状況（指標）に届かないことが確定する最小の負け試合数（エリミネーション数）が存在する。



図に挙げた例では，エリミネーション数を，それぞれの時点で今後引分がないとしたときに，残りゲーム数から最小の負け試合数を引いた最大の勝ち試合数として表現している。順位決定に係る複数の判定基準が存在する場合のクリンチおよびエリミネーション数の計算を，多層の整数計画問題を解くことにより高速に行う汎用的な枠組みを開発している。